Domácí úkol č. 14

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} (1+\imath)x + (1-\imath)y &= 1 \\ x - \imath y &= 0 \end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (-2,-2,-1), \ \mathbf{x} = (-1,2,1), \ \mathbf{y} = (-1,2,1), \ \mathbf{z} = (-1,1,1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x + 2, \quad q(x) := x^2 - x, \quad r(x) := x^2 - 2.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (-1,-1,-2), \ \mathbf{f}_1 = (0,-1,1), \ \mathbf{f}_2 = (-2,2,-1), \ \mathbf{f}_3 = (-2,1,-2).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a + 2b + c = 0 \wedge a + b = -b + c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,3) \\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (1,2) \\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (1,1) \end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1,2,3))$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,-1,-1) \\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (-1,1,-1) \\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1 + x - x^2) &= (2, 1)\\ \mathcal{A}(1 - x + x^2) &= (2, -2)\\ \mathcal{A}(-1 + x + x^2) &= (0, -3).\end{aligned}$$

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Ortonormalizujte následující bázi ve standartním skalárním součinu:

$$((1, 1, -2), (1, 0, 1), (0, -1, 1)).$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1\\ x + y + z &= 0\\ x - y - 2z &= -1\\ -2x - y - z &= 0\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2, 0, -2, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1, 1, -1, -2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0, -2, 0, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0\\ 9 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$