Domácí úkol č. 13

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\ \text{kde}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\0&-2&1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&1&-1\\3&0&-2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-2&1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \text{kde}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\-2&-2&2\\1&-1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde
$$\mathbf{v}=(-2,2,2),\ \mathbf{x}=(-2,-2,2),\ \mathbf{y}=(-2,-2,1),\ \mathbf{z}=(0,-1,-1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:
$$p(x):=2x^2+x-2,\quad q(x):=3x^2-3x+1,\quad r(x):=x^2-4x+3.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:
$$\mathcal{V}:=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ x_1+2x_2-2x_3=0,\ 2x_1+2x_2-2x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů
$$p(x):=4x^2-2x-7,\quad q(x):=-2x^2-2$$
v bázi $E:=\{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde
$$\mathbf{e}_1(x):=x^2+2x+1,\quad \mathbf{e}_2(x):=-x-2,\quad \mathbf{e}_3(x):=-x^2+2x.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definované předpisem
$$\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3))=(x_1-x_2+x_3,2x_1+x_2-x_3,-x_1-x_2-x_3)$$
je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definovaného předpisy
$$\mathcal{A}((1,1,-1))=(2,1)$$
$$\mathcal{A}((1,-1,1))=(2,-2)$$
$$\mathcal{A}((-1,1,1))=(0,-3).$$

10. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1+x) &= (1,-1,1) \\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (1,0,1) \\ \mathcal{A}(x) &= (0,-1,0). \end{aligned}$$

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_3) \in \mathbb{R}^2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1,2,1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (1,1,1)$.

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= -1 \\ -2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2,0,2,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,0,1,0)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,1,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -11 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$