Domácí úkol č. 12

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-6\\ -5\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -4\end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} -x_2+2x_3+x_4 &= -1\\ x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 1\\ 2x_1+3x_2\qquad +x_4 &= 1\\ -x_1-2x_2+x_3+x_4 &= -1\end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u}=(2,-2,1),\ \mathbf{v}=(2,2,2),\mathbf{w}=(-1,-1,1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p\in\mathcal{P}_2:=\{a_0+a_1x+a_2x^2:\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1,p_2,p_3\in\mathcal{P}_2$, kde

$$p(x)=1+2x-2x^2,\ p_1(x)=2+2x^2,\ p_2(x)=-1-2x^2,\ p_3(x)=x^2.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ v bázi $F:=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v}=(-2,-1,1),\ \mathbf{f}_1=(2,0,0),\ \mathbf{f}_2=(-1,-2,-1),\ \mathbf{f}_3=(-2,2,-2).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V=\{ax^2+bx+c\in\mathcal{P}_2|a+2b-c=0\wedge a+b=-b-c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,0))&=(1,2)\\ \mathcal{A}((1,1,1))&=(1,1)\\ \mathcal{A}((0,1,0))&=(2,1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\mathbf{v})=(2,3)$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}((1,-1,0)) = (2,2,-1)\\
&\mathcal{A}((1,1,1)) = (-1,1,-1)\\
&\mathcal{A}((-1,1,1)) = (1,3,-2).
\end{aligned}$$

10. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(1+x) = (1,-1,1)\\
&\mathcal{A}(1+x+x^2) = (1,0,1)\\
&\mathcal{A}(x) = (0,-1,0).
\end{aligned}$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1,2,1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (0,1,2)$.

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (-1,0,1,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,1,-1,-2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,0,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$