Domácí úkol č. 11

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} -\imath x + (2-\imath)y &= 1-\imath \\ x - y &= \imath \end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \text{kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (0,-1,-2),\ \mathbf{v} = (-1,-1,-2), \mathbf{w} = (-1,0,0).$$

5. Rozhodněte, zda je $p \in \mathcal{P}_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$, kde

$$p(x) = -2 - x^2,\ p_1(x) = 2 + 2x - 2x^2,\ p_2(x) = -1 + x^2,\ p_3(x) = 1 + 2x + x^2.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} := \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := 4x^2 - 2x - 7, \quad q(x) := -2x^2 - 2$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := x^2 + 2x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := -x - 2, \quad \mathbf{e}_3(x) := -x^2 + 2x.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,1,-1)) &= (-1,1) \\ \mathcal{A}((1,-1,1)) &= (1,-1) \\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (1,1). \end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1 + x - x^2) &= (0, 1, 0)\\
\mathcal{A}(1 - x + x^2) &= (1, 1, 2)\\
\mathcal{A}(-1 + x + x^2) &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1, 2, 3)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
2x + y + z &= 1\\
x + y + z &= 0\\
x - y - 2z &= -1\\
-2x - y - z &= 0
\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2, 0, -2, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1, 1, -1, -2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0, -1, 1, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$