Domácí úkol č. 10

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} (-2-2\imath)x + y &= -1 \\ \imath x - \imath y &= 1 \end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (0,2,0),\ \mathbf{x} = (0,-2,1),\ \mathbf{y} = (1,-1,-1),\ \mathbf{z} = (1,1,2).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\ :\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x+1, \quad q(x) := x^2+3x-2, \quad r(x) := 4x+3.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (2,-2,-1),\ \mathbf{f}_1 = (1,-1,-1),\ \mathbf{f}_2 = (-1,2,0),\ \mathbf{f}_3 = (-1,1,-1).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2 | a+2b+c = 0 \wedge a+b = -b+c\}.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3)) = (x_1-2x_2, 2x_1+x_3, x_1+x_2+x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,1,-1)) &= (2,1) \\ \mathcal{A}((1,-1,1)) &= (-2,-1) \\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (4,2). \end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1+x) &= (1,2)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-1,1)\\ \mathcal{A}(x) &= (2,-1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (2,3)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Ortonormalizujte následující bázi ve standartním skalárním součinu:

$$((1,1,-2),(1,0,1),(0,-1,1)).$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \\ x-y-2z &= -1 \\ -2x-y-z &= 0 \end{aligned}$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$