Domácí úkol č. 1

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} (-2-2\imath)x + y &= -1 \\ \imath x - \imath y &= 1 \end{aligned}$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v}=(0,2,0),\ \mathbf{x}=(0,-2,1),\ \mathbf{y}=(1,-1,-1),\ \mathbf{z}=(1,1,2).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x):=x+1,\quad q(x):=x^2+3x-2,\quad r(x):=4x+3.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ v bázi $F:=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v}=(-1,-1,-2),\ \mathbf{f}_1=(0,-1,1),\ \mathbf{f}_2=(-2,2,-1),\ \mathbf{f}_3=(-2,1,-2).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V=\{ax^2+bx+c\in\mathcal{P}_2 | a+c=0\wedge b=c-a\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,0))&=(1,1)\\ \mathcal{A}((1,1,1))&=(-2,1)\\ \mathcal{A}((0,1,0))&=(1,-1)\end{aligned}$$

   Nalezněte $\mathcal{A}((1,2,1))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,-1,0))&=(1,2,0)\\ \mathcal{A}((1,1,1))&=(1,1,-1)\\ \mathcal{A}((-1,1,1))&=(0,1,1).\end{aligned}$$

10. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1-x) &= (1,1,-1) \\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (1,-1,0) \\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (2,0,-1). \end{aligned}$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -5 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (-2,0,2,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,1,-1,-2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,1,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 7 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$