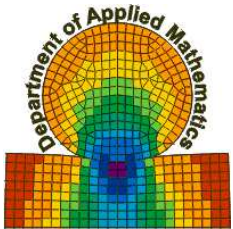


Rychlé výpočetní metody pro Maxwellovy rovnice

VŠB–TU Ostrava, 14. dubna 2005

D. Lukáš



Katedra aplikované matematiky,
Centrum pokročilých a **inovačních** technologií,
VŠB–Technická univerzita Ostrava



email: dalibor.lukas@vsb.cz

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Maxwellovy rovnice

Popisují elektromagnetické pole v prostoru a čase.

$\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$, $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$... magnetické indukce, intenzita; $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x})\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$

$\mathcal{D}(\mathbf{x}, t)$, $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$... elektrická indukce, intenzita; $\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x})\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$

$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t)$... hustota elektrického proudu vnučená vnějším zdrojem; $\operatorname{div}\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = 0$

$\rho(\mathbf{x})$... hustota elektrického náboje

$\sigma(\mathbf{x})$... elektrická vodivost

v $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$:

$$\operatorname{rot}\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) + \sigma(\mathbf{x})\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial\mathcal{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})$$

$$\operatorname{div}\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Navíc: $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$ pro $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ a $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{B}_0(\mathbf{x})$, $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{x})$

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Nechť $\omega > 0$ je úhlová frekvence a necht'

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{C}^3$$

Pak také

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{C}^3$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{C}^3$$

Je-li ω malé, zanedbáme Maxwellovy posuvné proudy $\omega^2 \varepsilon(\mathbf{x})$ a máme nízko-frekvenční semidefinitní případ:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right) + i\omega \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) = i\omega \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega$$

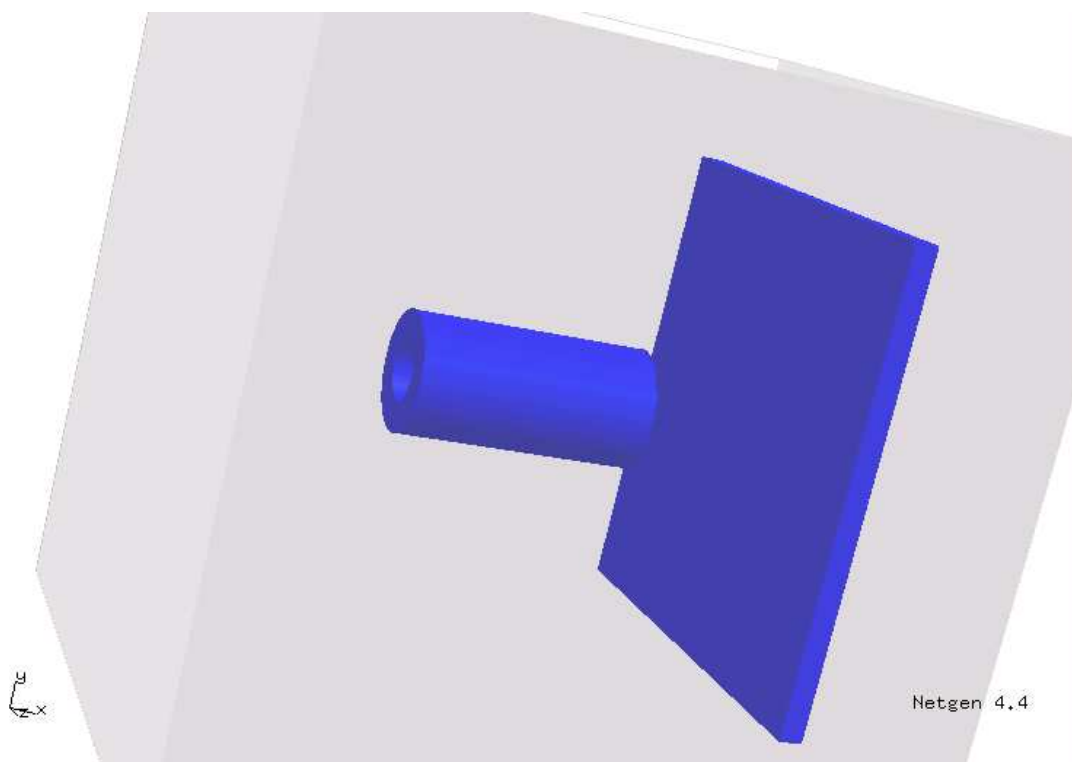
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{na } \partial\Omega$$

Magnetické pole: $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{i}{\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x})$

Vířivé proudy: $\mathbf{J}^{\text{eddy}}(\mathbf{x}) = i\omega \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$

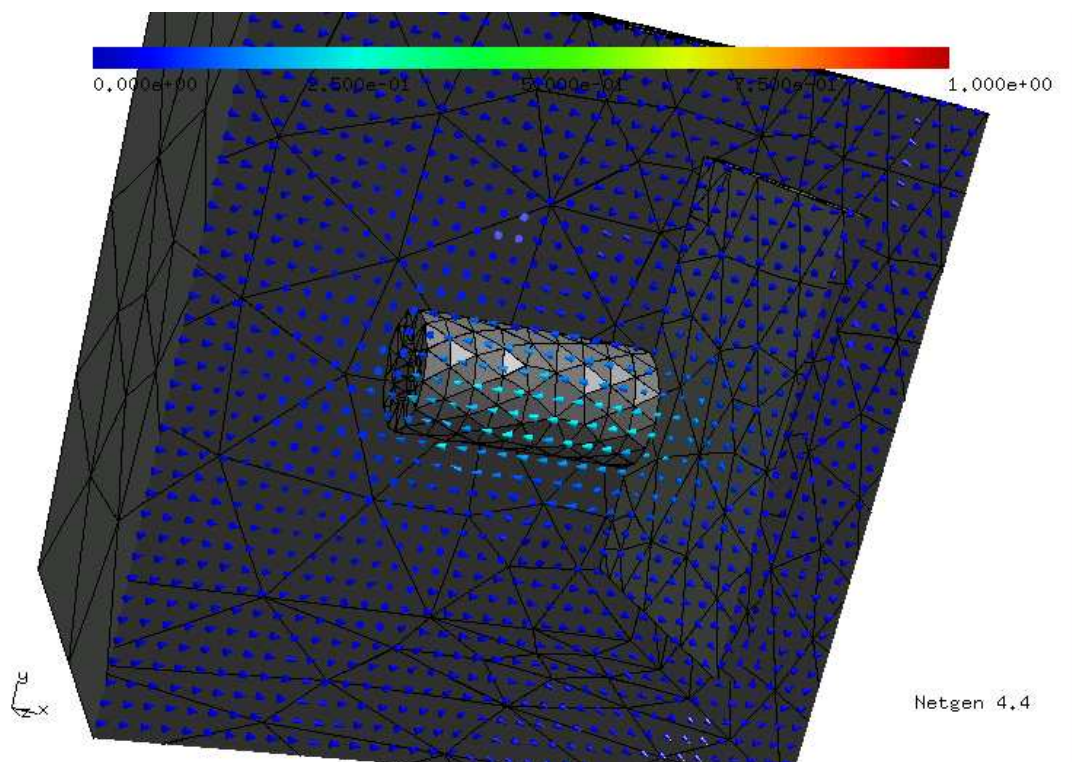
Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Geometrie: cívka a vodivý plát



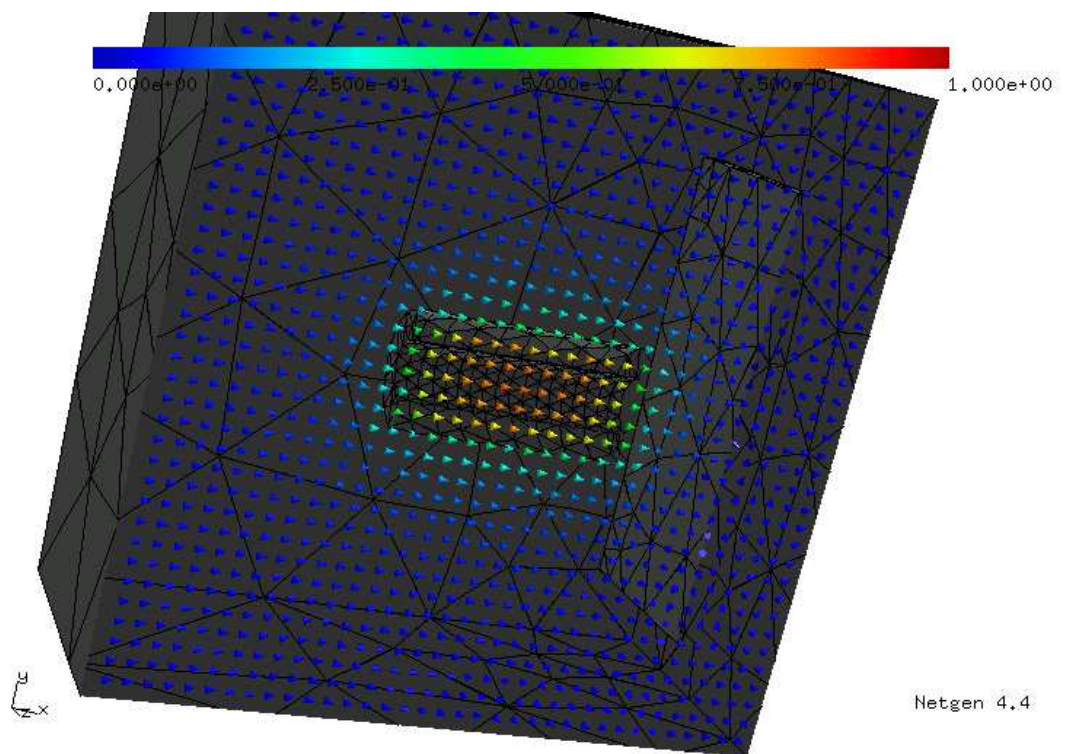
Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Magnetické pole



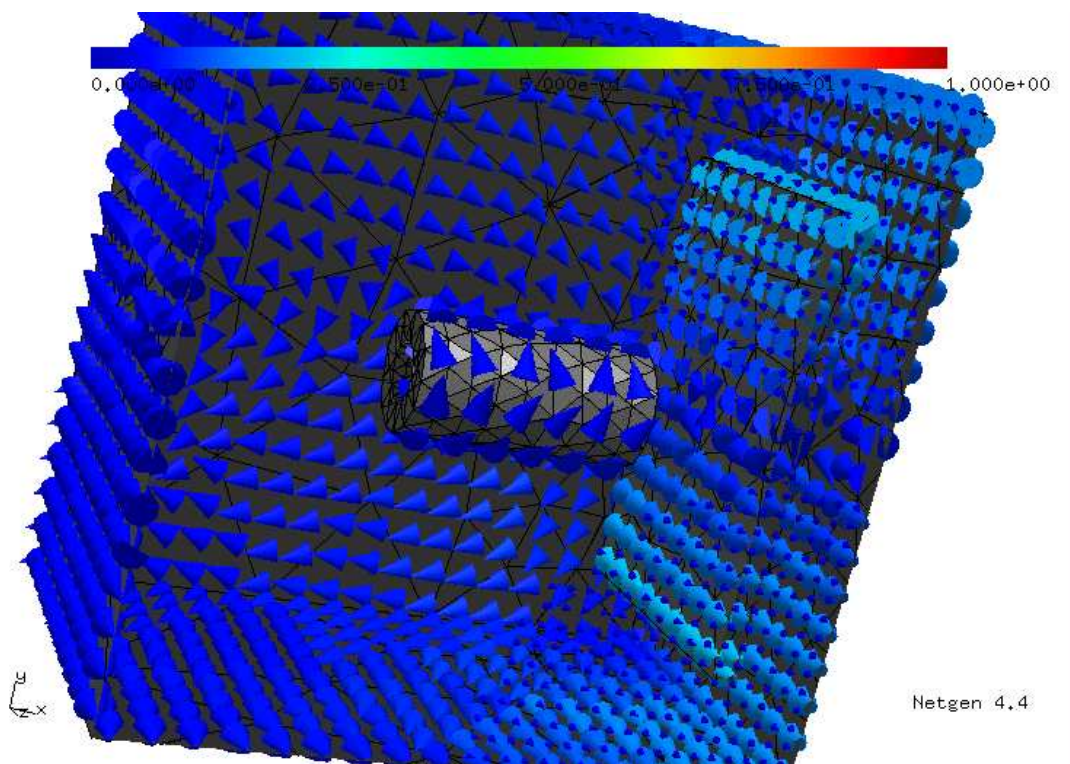
Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Magnetické pole



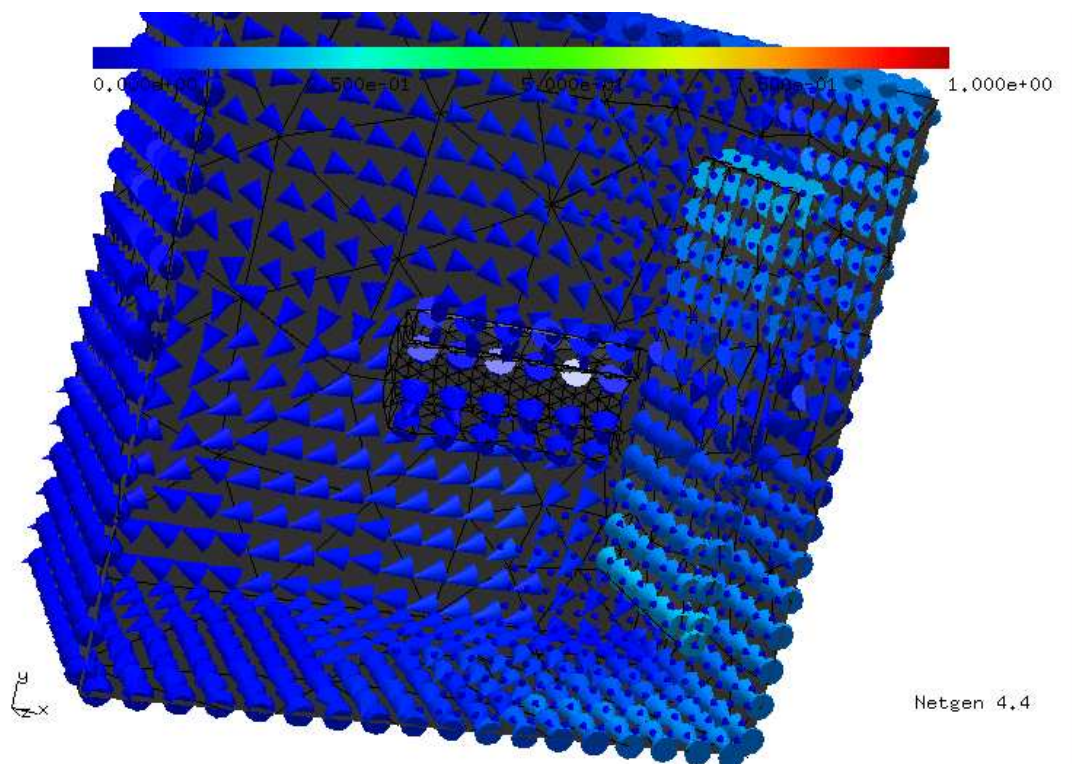
Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Elektrické pole



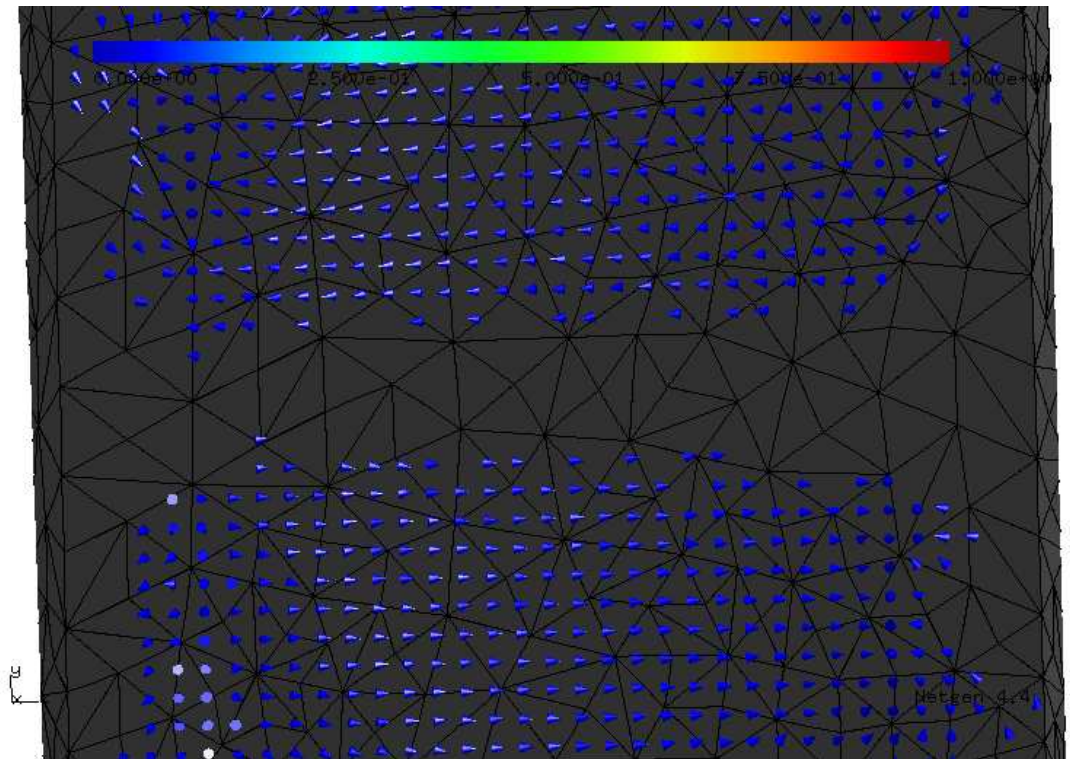
Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Elektrické pole



Maxwellovy rovnice: nízko-frekvenční případ

Vířivé proudy ve vodivém plátu



Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - **Elektrostatika**
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Maxwellovy rovnice: elektrostatika

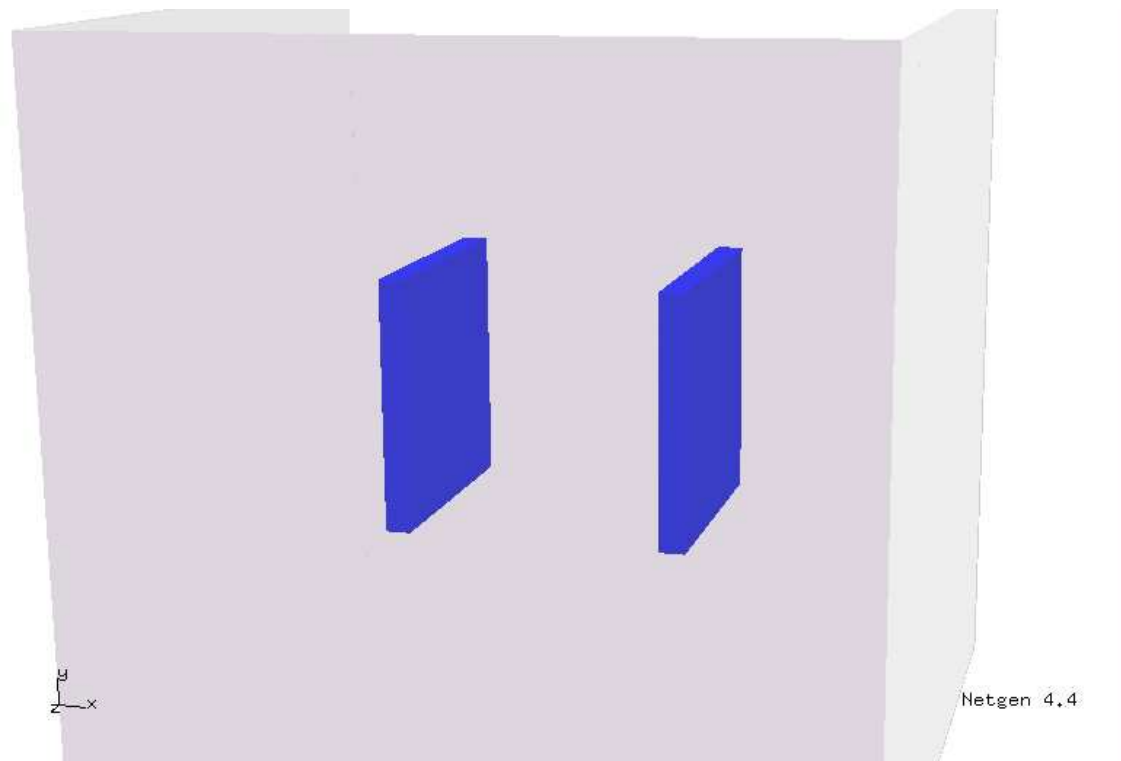
Je-li $\omega = 0$, pak $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\mathbf{grad}\Phi(\mathbf{x})$, kde Φ je skalární elektrický potenciál (napětí).

Máme úlohu elektrostatiky:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{grad}\Phi(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \Phi(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

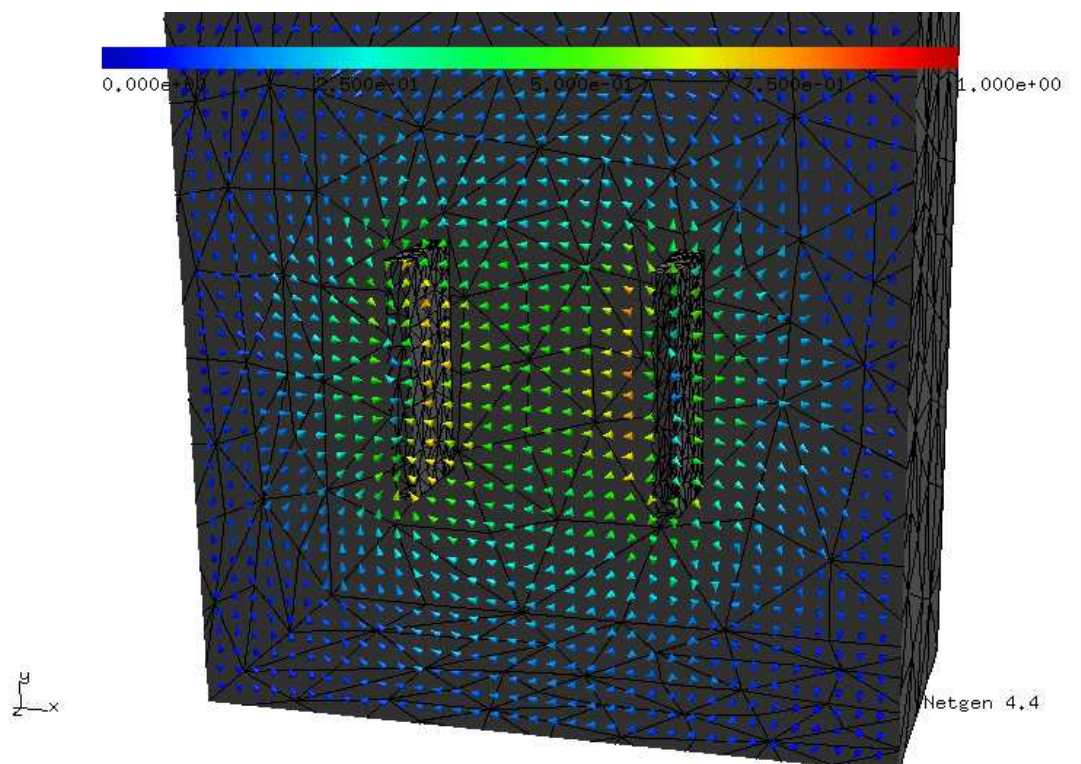
Maxwellovy rovnice: elektrostatika

Geometrie: desky kondenzátoru



Maxwellovy rovnice: elektrostatika

Elektrické pole



Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Maxwellovy rovnice: magnetostatika

Zavedme magnetický vektorový potenciál \mathbf{u} :

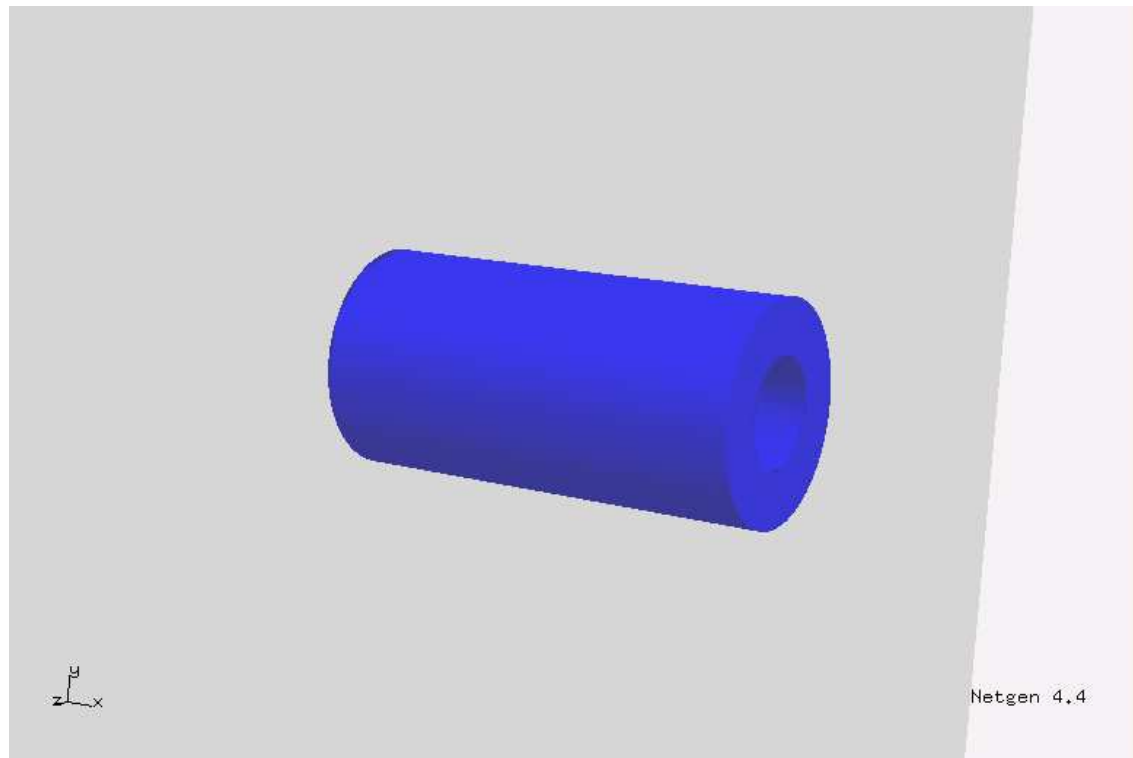
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$$

a máme úlohu magnetostatiky:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \mathbf{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) &= \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

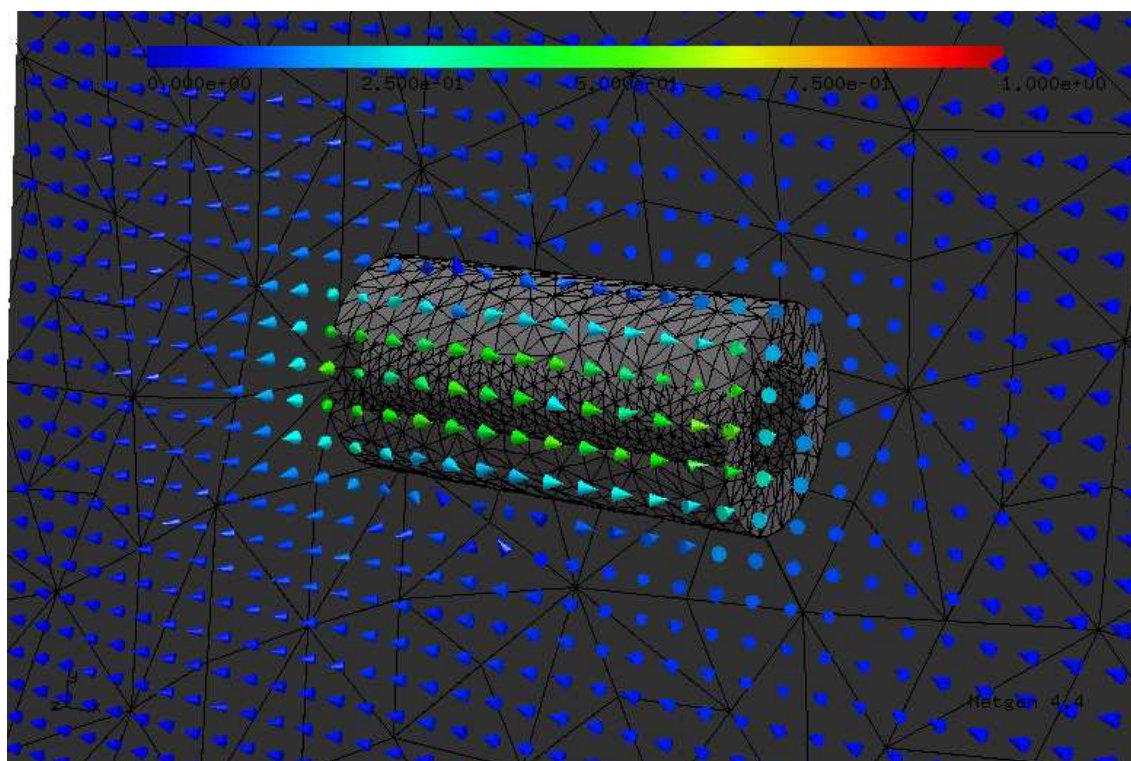
Maxwellovy rovnice: magnetostatika

Geometrie: cívka protékaná proudem



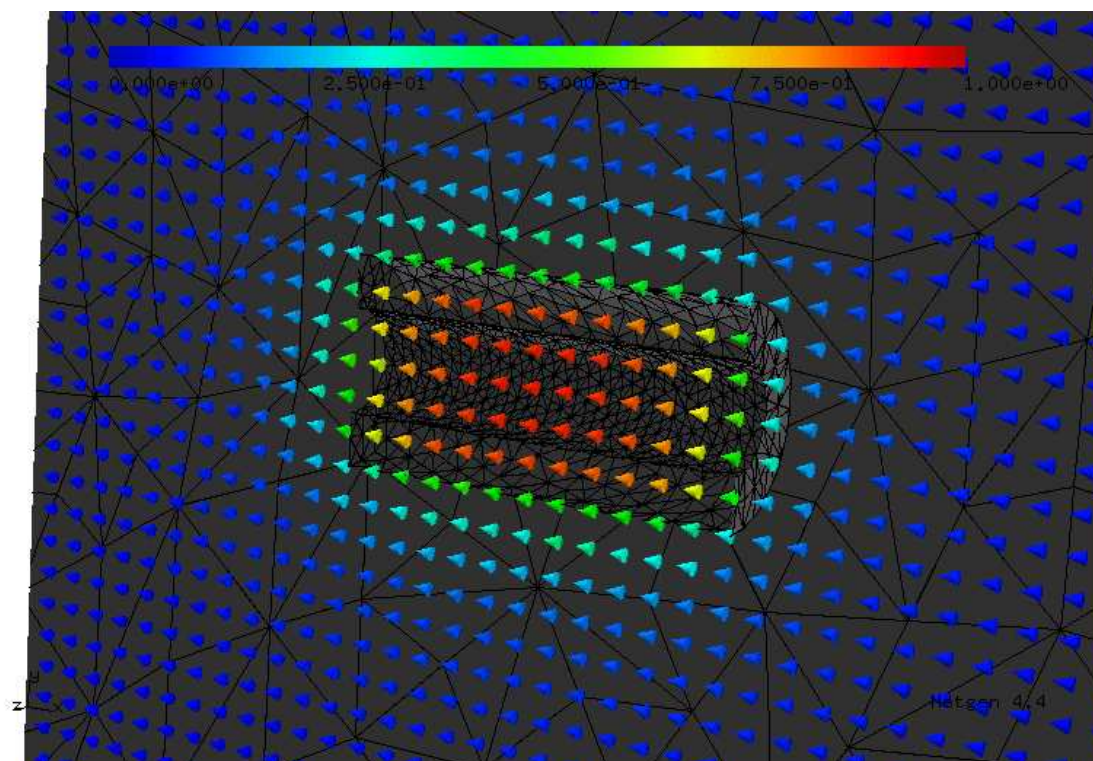
Maxwellovy rovnice: magnetostatika

Magnetické pole



Maxwellovy rovnice: magnetostatika

Magnetické pole

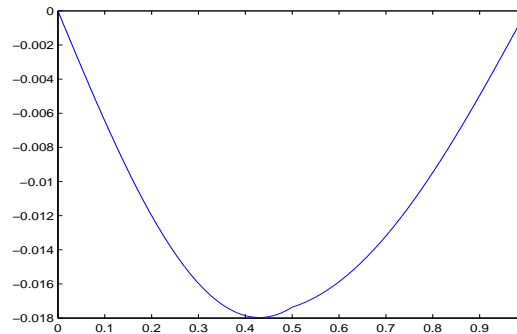


Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Multigrid pro 1D úlohu struny

Mějme příčně zatíženou strunu, jejíž průhyb je popsán eliptickou (parciální) diferenciální rovnicí $Au(\mathbf{x}) = b$, $A \approx \Delta + I$, na duálu k Hilbertově prostoru $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.



Diskretizujme úlohu na hierarchii sítí:

$$\mathcal{T}_0 := \{0, 1/2, 1\}: \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0,$$

$$\mathcal{T}_1 := \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}: \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1 \text{ atd.}$$

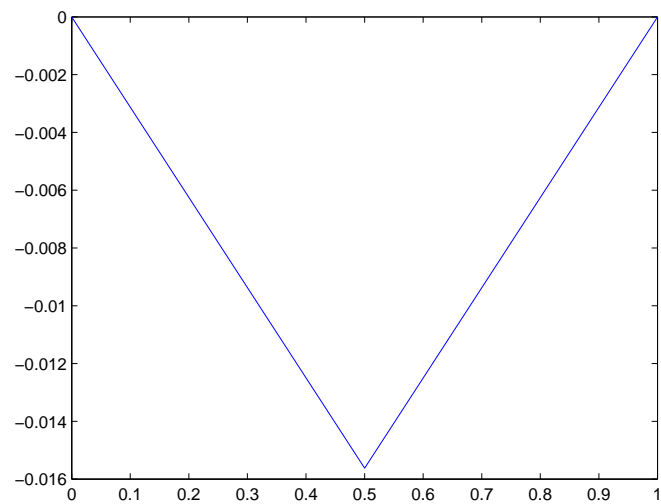
Nechť $(V_l, \langle \cdot, \cdot \rangle_l)$ jsou příslušné diskretizace Hilbertova prostoru V a necht' E_l^L , kde $l < L$, je operátor rozšíření z V_l do V_L .

Označme dále $N_l := \dim V_l$, $h_l := \frac{1}{N_l - 1}$.

Multigrid pro 1D úlohu struny

Hrubé řešení

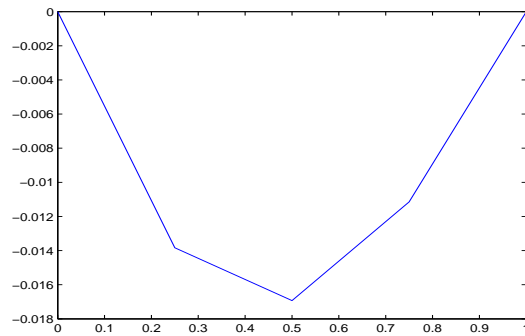
$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0$$



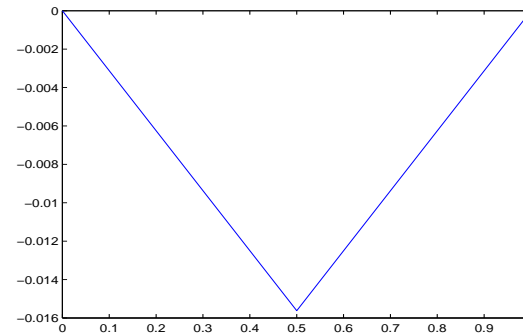
Multigrid pro 1D úlohu struny

Dekompozice

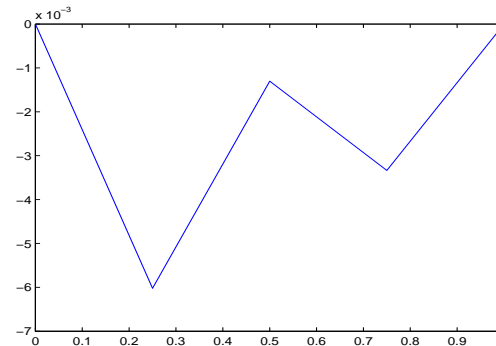
$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1$$



$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0$$



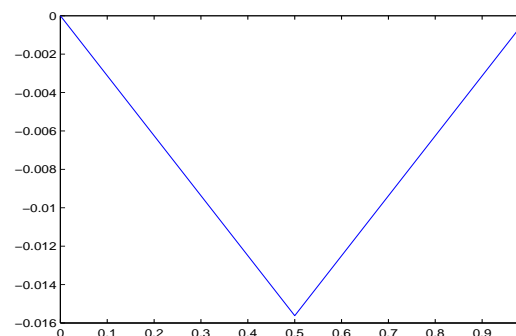
$$\mathbf{w}_1 := \mathbf{u}_1 - \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0$$



Multigrid pro 1D úlohu struny

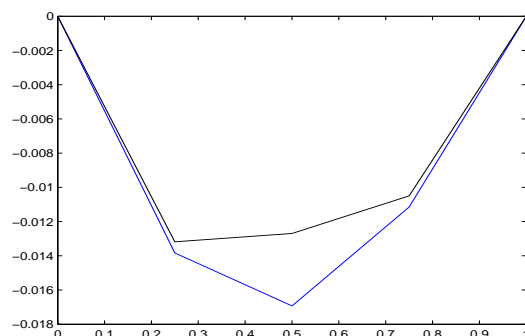
Vyhlazení chyby

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0$$

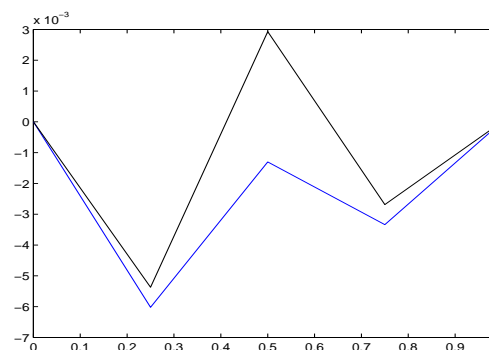


$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{u}_1^1 := \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_1^1$$



$$\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}_1^1 := (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0)$$



Multigrid pro 1D úlohu struny

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0$$

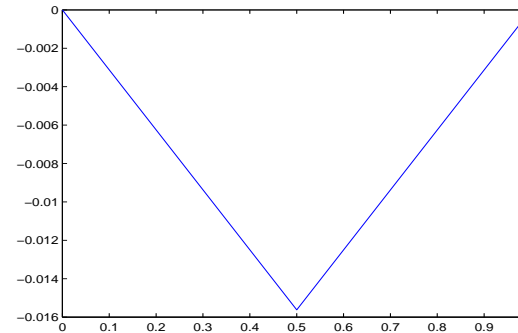
Opakované vyhlazení chyby

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{u}_1^1 := \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_1^1$$

$$\mathbf{u}_1^2 := \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{w}_1^2$$

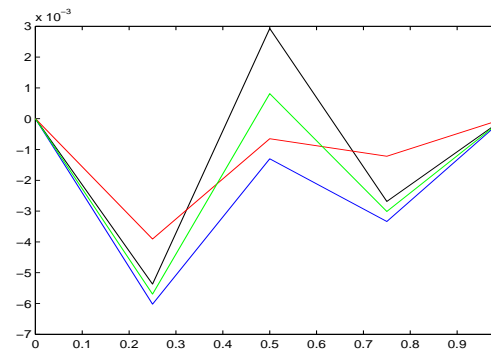
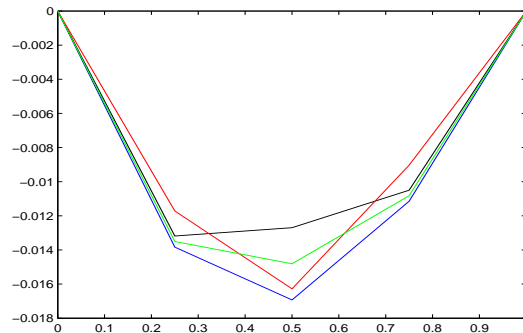
$$\mathbf{u}_1^3 := \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{w}_1^3$$



$$\mathbf{w}_1^1 := (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{w}_1^2 := (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_1^1)$$

$$\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}_1^3 := (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_1^1 + \mathbf{w}_1^2)$$



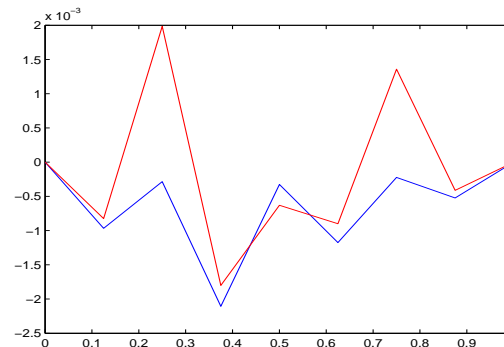
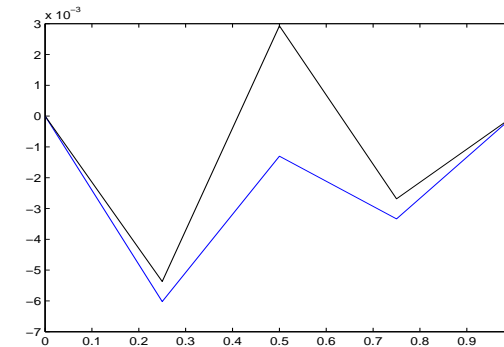
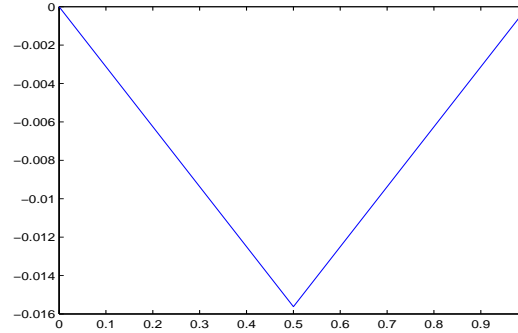
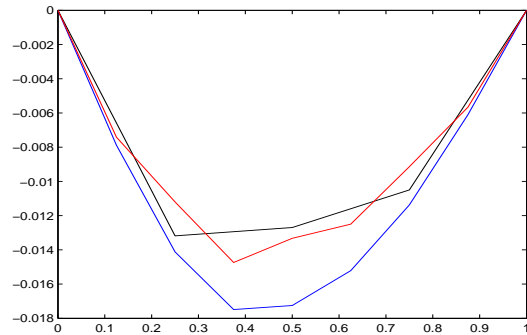
Multigrid pro 1D úlohu struny

Více úrovní

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{u}_1^1 := \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0^1 + \mathbf{w}_1^1$$

$$\mathbf{u}_2^1 := \mathbf{E}_1^2 \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{w}_2^1$$



$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}_1^1 := (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_0^1 \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{w}_2 := \mathbf{u}_2 - \mathbf{E}_1^2 \mathbf{u}_1 \approx \mathbf{w}_2^1 := (\text{diag} \mathbf{A}_2)^{-1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_1^1)$$

Multigrid pro 1D úlohu struny

Dekompozice operátoru

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_0^1 \mathbf{A}_0 (\mathbf{E}_0^1)^T + [\mathbf{A}_1 - \mathbf{E}_0^1 \mathbf{A}_0 (\mathbf{E}_0^1)^T]$$

Multigridový předpodmiňovač = multiplikativní Schwarzova metoda

$$(\mathbf{A}_1)^{-1} \approx (\mathbf{C}_1^{\text{MG}})^{-1} := \mathbf{E}_0^1 (\mathbf{A}_0)^{-1} (\mathbf{E}_0^1)^T + (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} [\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_0^1 (\mathbf{A}_0)^{-1} (\mathbf{E}_0^1)^T]$$

Aditivní Schwarzova metoda

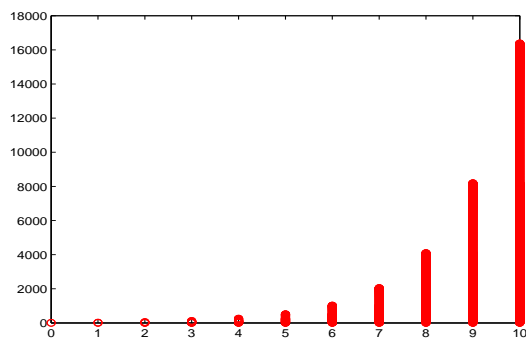
$$(\mathbf{A}_1)^{-1} \approx (\mathbf{C}_1^{\text{ASM}})^{-1} := \mathbf{E}_0^1 (\mathbf{A}_0)^{-1} (\mathbf{E}_0^1)^T + (\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1}$$

Aditivní rozklad operátoru může být také indukován rozkladem výpočetní oblasti. Pak získáváme [předpodmínění metodou rozložení oblasti](#).

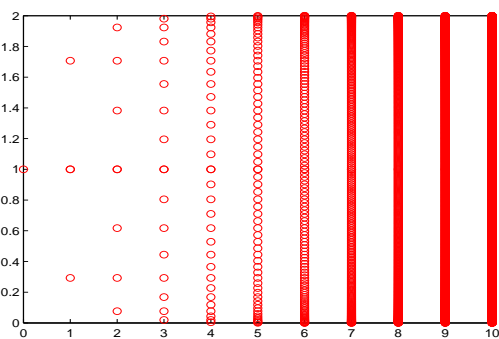
Multigrid pro 1D úlohu struny

Dekompozice spektra operátoru

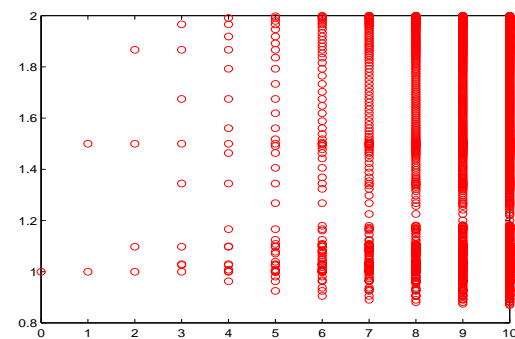
$$\sigma(\mathbf{A}_l)$$



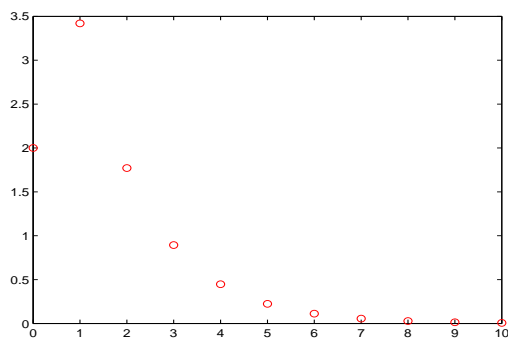
$$|\sigma((\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_l)|$$



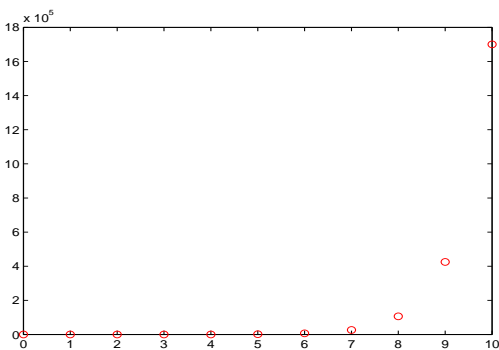
$$|\sigma((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l)|$$



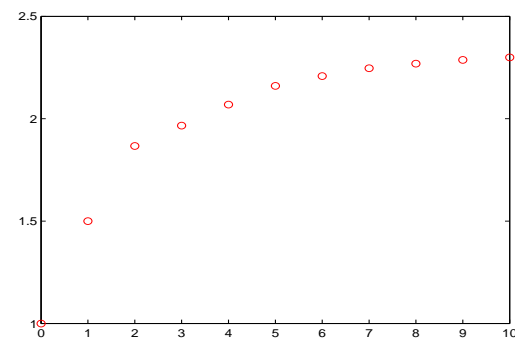
$$\min \sigma(\mathbf{A}_l)$$



$$\text{cond}((\text{diag} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_l)$$



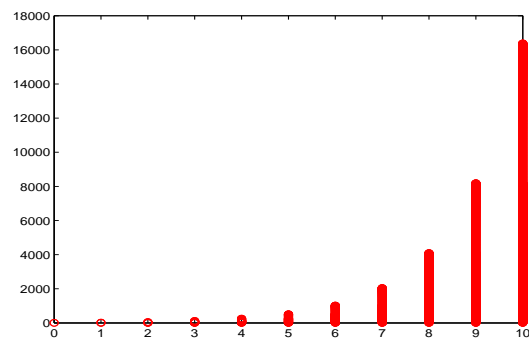
$$\text{cond}((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l)$$



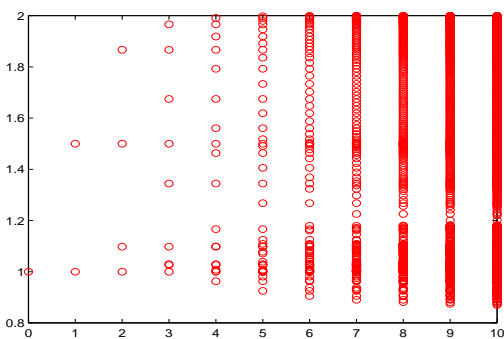
Multigrid pro 1D úlohu struny

Dekompozice spektra operátoru

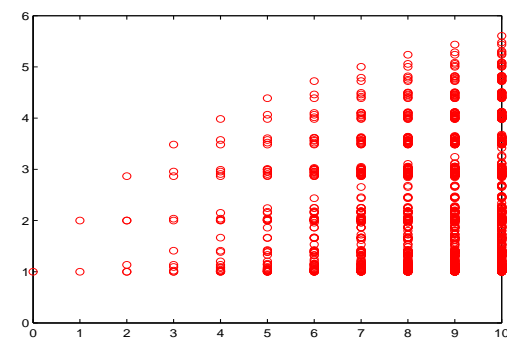
$$\sigma(\mathbf{A}_l)$$



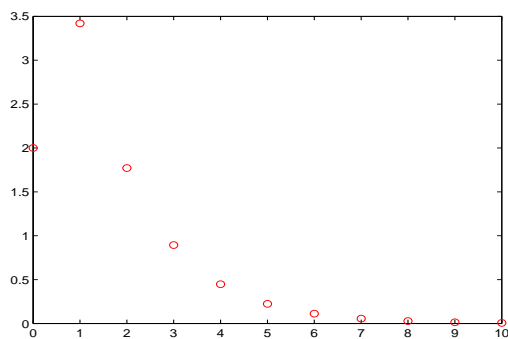
$$|\sigma((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l)|$$



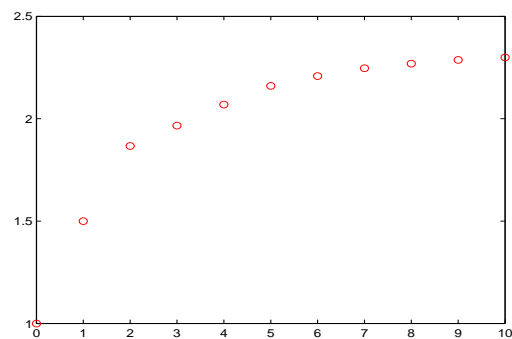
$$|\sigma((\mathbf{C}_l^{\text{ASM}})^{-1} \mathbf{A}_l)|$$



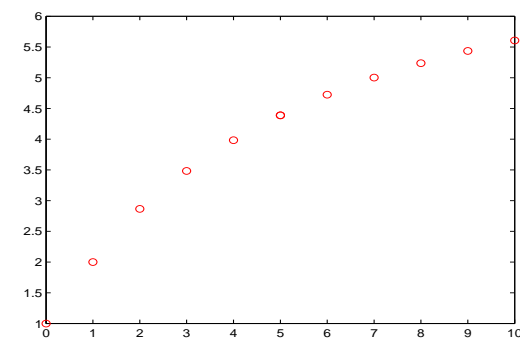
$$\min \sigma(\mathbf{A}_l)$$



$$\text{cond}((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l)$$



$$\text{cond}((\mathbf{C}_l^{\text{ASM}})^{-1} \mathbf{A}_l)$$



Multigrid pro 1D úlohu struny

Matlabovské soubory můžete najít na

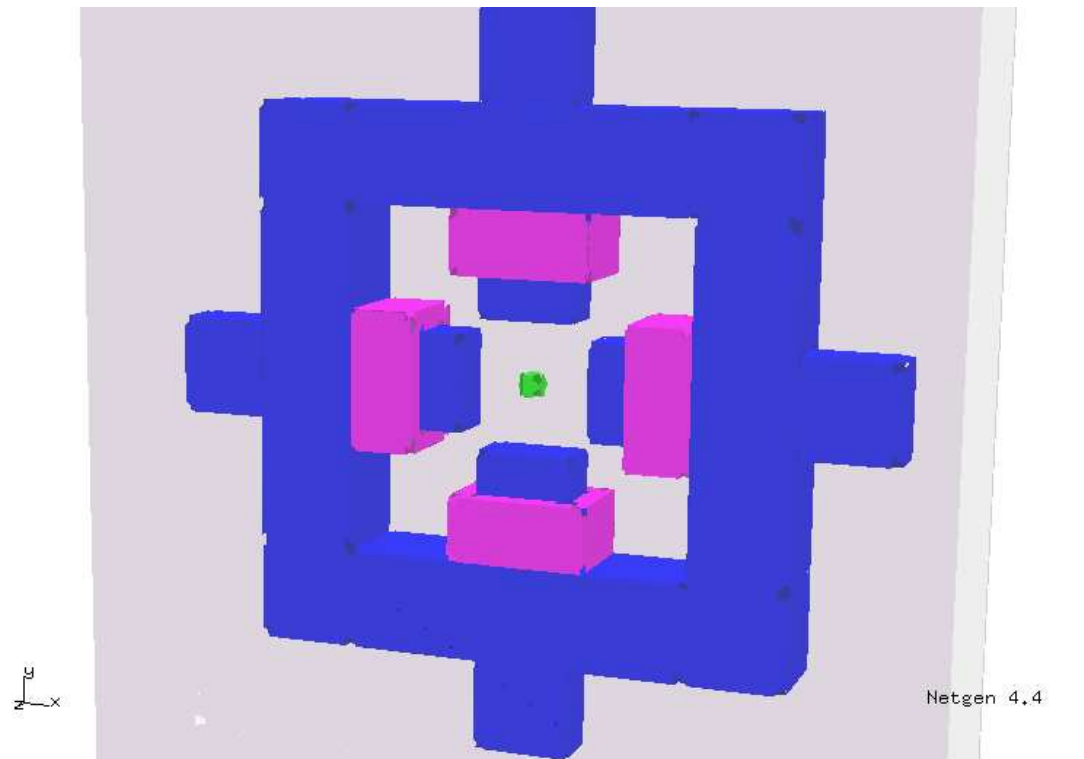
http://lukas.am.vsb.cz/Teaching/1d_multigrid/

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

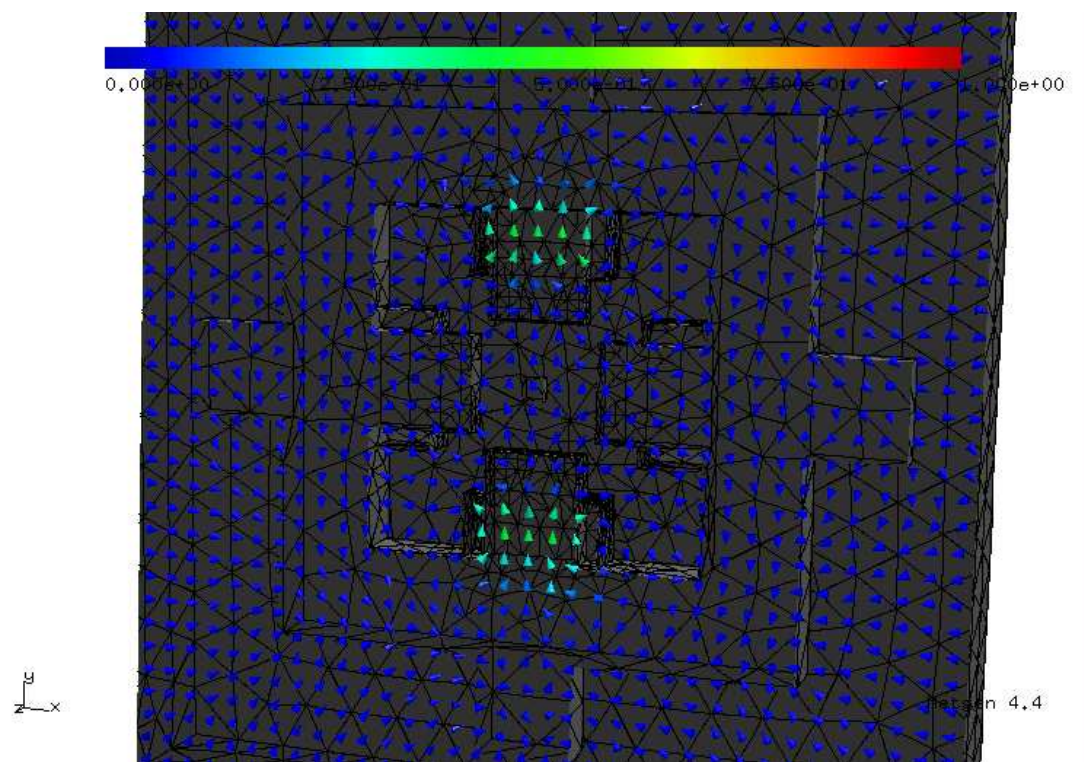
Porovnání metod na reálné úloze

Elektromagnet: geometrie



Porovnání metod na reálné úloze

Elektromagnet: rozložení magnetického pole



Porovnání metod na reálné úloze

předpodmiňovač	doba výpočtu [s] (PCG iterace/čas [s])				
	$N_0 = 10805$	$N_1 = 19889$	$N_2 = 59242$	$N_3 = 193436$	$N_4 = 723357$
$(\mathbf{A}_l)^{-1}$	12.71 (1/0.04)	30.42 (1/0.08)	224.75 (1/0.42)	nedostatek paměti	
$(\text{diag}\mathbf{A}_l)^{-1}$	7.78 (38/0.15)	13.08 (53/0.39)	37.95 (70/2.08)	128.62 (98/11.64)	529.16 (160/78.96)
$(\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1}$	11.84 (1/0.03)	13.7 (5/0.42)	37.14 (6/2.13)	125.95 (6/8.42)	495.34 (6/35.97)

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - **Analýza optimální konvergence**
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Multigrid: analýza optimální konvergence

MG(l)

if $l = 0$ **then**

$$\mathbf{u}_0 := (\mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{b}_0$$

else

$$\mathbf{u}_{l-1} := \text{MG}(l-1) \text{ [Coarse solution]}$$

$$\mathbf{w}_l := \mathbf{S}_l(\mathbf{u}_{l-1}) \text{ [Postsmoothing]}$$

$$\mathbf{u}_l := \mathbf{E}_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1} + \mathbf{w}_l$$

end if

$$\text{Jacobiho smoother: } \mathbf{S}_l(\mathbf{u}_{l-1}) := (\text{diag} \mathbf{A}_l)^{-1} [\mathbf{b}_l - \mathbf{A}_l \mathbf{E}_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1}]$$

Optimální výpočetní složitost

$$\left. \begin{array}{l} \text{CPU}(\text{MG}(0)) \leq C_0 N_0 \\ \text{CPU}(\text{MG}(l)) \leq \text{CPU}(\text{MG}(l-1)) + C_l N_l \\ N_l \leq c_l \beta^l \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{CPU}(\text{MG}(l)) \leq \sum_{i=1}^l c_i C_i \beta^i \leq C \frac{\beta^l - 1}{\beta - 1} \\ \text{Tedy} \\ \text{CPU}(\text{MG}(l)) = O(N_l) \end{array}$$

Multigrid: analýza optimální konvergence

Stejně omezený počet iterací

Počet iterací je úměrný číslu podmíněnosti

$$\text{cond}((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l) = \frac{\lambda_{\max}((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l)}{\lambda_{\min}((\mathbf{C}_l^{\text{MG}})^{-1} \mathbf{A}_l)}.$$

Ukážeme, že \mathbf{C}_l^{MG} i $\mathbf{C}_l^{\text{ASM}}$ jsou stejně spektrálně ekvivalentní s \mathbf{A} , tj.

$(\exists c, C, k, K > 0) (\forall l \in \{0, 1, 2, \dots\}) (\forall \mathbf{u}_l \in V_l) :$

$$c \langle \mathbf{C}_l^{\text{MG}} \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l \leq k \langle \mathbf{C}_l^{\text{ASM}} \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l \leq \langle \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l \leq K \langle \mathbf{C}_l^{\text{ASM}} \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l \leq C \langle \mathbf{C}_l^{\text{MG}} \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l.$$

Aditivní Schwarzovo lemma

Pro $\mathbf{u}_l \in V_l$ platí:

$$\|\mathbf{u}_l\|_{l, \text{ASM}}^2 := \langle \mathbf{C}_l^{\text{ASM}} \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l = \inf_{\mathbf{v}_i \in V_i: \mathbf{u}_l = \sum_{i=0}^l \mathbf{E}_i^l \mathbf{v}_i} \sum_{i=0}^l \langle \mathbf{C}_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle_i,$$

kde v našem případě $\mathbf{C}_0 := \mathbf{A}_0$, $\mathbf{C}_i := \text{diag} \mathbf{A}_i$ pro $i \in \{1, 2, \dots\}$.

Multigrid: analýza optimální konvergence

Zesílená Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$(\exists C_{\text{ort}} > 0) (\exists \gamma \in (0, 1)) (\forall \mathbf{u}_i \in V_i) (\forall \mathbf{v}_j \in V_j) : \\ \langle \mathbf{A}_l \mathbf{E}_i^l \mathbf{u}_i, \mathbf{E}_j^l \mathbf{v}_j \rangle_l \leq C_{\text{ort}} \gamma^{|i-j|} \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{C}_i} \|\mathbf{v}_j\|_{\mathbf{C}_j}$$

Důkaz využívá tzv. inverzní nerovnost: $\|\nabla v_h(\mathbf{x})\|_{L_2} \leq ch^{-1} \|v_h(\mathbf{x})\|_{L_2}$.

Pak pro libovolné $\mathbf{u}_l \in V_l$ a pro jeho dekompozici dle aditivní Schwarzovy teorie

$\mathbf{u}_l = \sum_{i=0}^l \mathbf{E}_i^l \mathbf{v}_i$ platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l &= \sum_{i,j=0}^l \langle \mathbf{A}_l \mathbf{E}_i^l \mathbf{v}_i, \mathbf{E}_j^l \mathbf{v}_j \rangle_l \leq C_{\text{ort}} \sum_{i,j=0}^l \gamma^{|i-j|} \|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{C}_i} \|\mathbf{v}_j\|_{\mathbf{C}_j} \\ &\leq C_{\text{ort}} \max_i \sum_{j=0}^l \gamma^{|i-j|} \|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{C}_i} \|\mathbf{v}_j\|_{\mathbf{C}_j} \leq C_{\text{ort}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma^{|i-j|} \sum_{k=0}^l \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbf{C}_k}^2 \\ &\leq C_{\text{ort}} \frac{2}{1-\gamma} \langle \mathbf{C}_l^{\text{ASM}} \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l \end{aligned}$$

Multigrid: analýza optimální konvergence

Stabilita dekompozice

Zbývá dokázat, že

$$(\exists C_{\text{stab}} > 0) (\forall \mathbf{u}_l \in V_l) : \\ \inf_{\mathbf{v}_i \in V_i: \mathbf{u}_l = \sum_{i=0}^l \mathbf{E}_i^l \mathbf{v}_i} \sum_{i=0}^l \langle \mathbf{C}_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle_i \leq C_{\text{stab}} \langle \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l.$$

Nechť $I_l : L_2 \mapsto V_l$ je kvazi-interpolační operátor. Pak platí:

$$\|\mathbf{u}_l\|_{l, \text{ASM}}^2 \preceq \sum_{i=0}^l (h_i)^{-2} \|(I_i - I_{i-1})u_i\|_{L_2}^2 \preceq \sum_{i=0}^l h_i^{-2} \|u_i - v\|_{L_2}^2 + (h_i)^4 \|v\|_{H^2}^2$$

Zavedme $K(h^2, u) := \sqrt{\inf_{v \in H^2} \{\|u - v\|_{L_2}^2 + h^2 \|v\|_{H^2}^2\}}$, měří hladkost u ve škále h . Fourierovým rozkladem $u_l(\mathbf{x})$ v \mathbb{R} zjistíme, že $\|\mathbf{u}_l\|_{l, \text{ASM}}^2 \preceq \sum_{i \in \mathbb{Z}} (h_i)^{-2} K((h_i)^2, u_i(\mathbf{x})) \preceq \|\nabla u_l(\mathbf{x})\|_{L_2}^2 \preceq \langle \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l \rangle_l$, přičemž pro Lipschitzovskou oblast Ω je u_l spojitě rozšiřitelné do \mathbb{R} , což bude zahrnuto do C_{stab} .

Multigrid: analýza optimální konvergence

Spektrální ekvivalence \mathbf{C}_l^{MG} s $\mathbf{C}_l^{\text{ASM}}$ je (pouze) dalším technickým oříškem.

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Chceme předpokládat operátor $\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \approx (\mathbf{rot}\mathbf{u}, \mathbf{rot}\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2}$.

Nédélec 1980, Hiptmair 1998

Vše je založeno na Helmholtzově dekompozici

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) = \mathbf{Ker}_0(\mathbf{rot})^\perp \oplus \mathbf{Ker}_0(\mathbf{rot}),$$

kde $\mathbf{Ker}_0(\mathbf{rot})^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$ a $\mathbf{Ker}_0(\mathbf{rot}) = \nabla H_0^1$.

Multigridová dekompozice pak vyhlazuje každou složku jinak:

$$V_l = V_0 + \sum_{i=1}^l \left(\sum_{e \text{ je hrana v } \mathcal{T}_i} \operatorname{span}(\boldsymbol{\xi}_e) + \sum_{\mathbf{x} \text{ je uzel v } \mathcal{T}_i} \operatorname{span}(\operatorname{grad}\varphi_{\mathbf{x}}) \right),$$

kde $\boldsymbol{\xi}_e$ je lineární Nédélecova hranová FE-bázová funkce, $\varphi_{\mathbf{x}}$ je lineární Lagrangeova uzlová FE-bázová funkce a V_0 je lineární Nédélecův prostor na hrubé diskretizaci \mathcal{T}_0 .

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Multigridová dekompozice

$$V_l = V_0 + \sum_{i=1}^l \left(\sum_{e \text{ je hrana v } \mathcal{T}_i} \text{span}(\boldsymbol{\xi}_e) + \sum_{\mathbf{x} \text{ je uzel v } \mathcal{T}_i} \text{span}(\text{grad}\varphi_{\mathbf{x}}) \right),$$

kde $\boldsymbol{\xi}_e$ je lineární Nédélecova hranová FE-bázová funkce, $\varphi_{\mathbf{x}}$ je lineární Lagrangeova uzlová FE-bázová funkce a V_0 je lineární Nédélecův prostor na hrubé diskretizaci \mathcal{T}_0 . Označme Z_l diskretizaci (přes \mathcal{T}_l) prostoru H_0^1 pomocí lineárních uzlových FE-funkcí.

Hiptmairův smoother

$$\mathbf{u}_{l+1/2} := \mathbf{u}_l + (\text{diag}\mathbf{A}_{l+1})^{-1}[\mathbf{b}_{l+1} - \mathbf{A}_{l+1}\mathbf{u}_l]$$

$$\mathbf{u}_{l+1} := \mathbf{u}_{l+1/2} + \mathbf{T}_{l+1}(\text{diag}\Delta_{l+1})^{-1}(\mathbf{T}_{l+1})^T[\mathbf{b}_{l+1} - \mathbf{A}_{l+1}\mathbf{u}_{l+1/2}]$$

$\mathbf{T}_{l+1} : \nabla Z_{l+1} \mapsto V_{l+1} \dots$ transformace z Lagrangeovského do Nédélecova prostoru, Δ_{l+1} je Laplaceův operátor diskretizovaný v Z_{l+1} .

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Smíšená úloha

Častěji potřebujeme řešit úlohu

$$(\mathbf{rot}\mathbf{u}, \mathbf{rot}\mathbf{v})_{L_2} = (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{L_2}$$

na prostoru $\mathbf{Ker}_0(\mathbf{rot})^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$. To vede na následující smíšenou (sedlobodovou) úlohu:

Hledáme $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) \times H_0^1$:

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{rot}\mathbf{u}, \mathbf{rot}\mathbf{v})_{L_2} & +(\nabla p, \mathbf{v})_{L_2} = (\mathbf{J}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) \\ (\mathbf{u}, \nabla q)_{L_2} & = 0 & \forall q \in H_0^1 \end{array}$$

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Smíšená úloha

Hledáme $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) \times H_0^1$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{L_2} + (\nabla p, \mathbf{v})_{L_2} &= (\mathbf{J}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}) \\ (\mathbf{u}, \nabla q)_{L_2} &= 0 & \forall q \in H_0^1 \end{aligned}$$

Diskretizace

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l + (\mathbf{B}_l)^T \mathbf{p}_l &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B}_l \mathbf{u}_l &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Prostor $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot})$ jsme nahradili V_l , H_0^1 jsme nahradili Z_l .

\mathbf{A}_l není pozitivně definitní!

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Zou 2003

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l + (\mathbf{B}_l)^T \mathbf{p}_l &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B}_l \mathbf{u}_l &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Zou modifikuje operátor \mathbf{A}_l následovně:

$$\hat{\mathbf{A}}_l := \mathbf{A}_l + (\mathbf{B}_l)^T (\hat{\mathbf{C}}_l)^{-1} \mathbf{B}_l,$$

kde $\hat{\mathbf{C}}_l : Z_l \mapsto Z_l$ je předpodmiňovač pro Laplaceův operátor. Pak $\hat{\mathbf{A}}$ už je pozitivně definitní a následující systém dává stejné řešení:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_l \mathbf{u}_l + (\mathbf{B}_l)^T \mathbf{p}_l &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B}_l \mathbf{u}_l &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{A}}$ je navíc spektrálně ekvivalentní se skalárním součinem v $\mathbf{H}_0(\text{rot})$! Při použití Uzawaova algoritmu pak v každé iteraci řešíme jeden systém s $\hat{\mathbf{A}}_l$ – použijeme Hiptmairův multigrid – a jednu Laplaceovu úlohu. Umíme zkonstruovat optimální řešič!

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Úloha s rozšířenými Lagrangiány

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}^*p &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Kromě Uzawova algoritmu můžeme k řešení smíšené úlohy použít algoritmus rozšířených Lagrangiánů, který minimalizuje funkcionál

$$L(\mathbf{u}, p, \rho) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle p, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle + \frac{\rho}{2} \langle \iota^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle,$$

kde $\mathbf{A} : V \mapsto V$, $\mathbf{B} : V \mapsto Z$ a $\iota : V' \mapsto V$ je Rieszův izomorfismus.

To vede na systém

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \rho \mathbf{B}^* \iota^{-1} \mathbf{B})\mathbf{u} + \mathbf{B}^*p &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Úloha s rozšířenými Lagrangiány

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \rho \mathbf{B}^* \iota^{-1} \mathbf{B})\mathbf{u} + \mathbf{B}^* p &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Hiptmair 1996

řeší smíšenou úlohu, která je duální k Laplaceově s pravou stranou f , s Neumannovou podmínkou g na Γ_N a s homogenní Dirichletovou podmínkou na Γ_D .

Hledáme $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_N}(\text{div}) \times L_2$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2} + (p, \text{div}\mathbf{v})_{L_2} &= g(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_N}(\text{div}) \\ (\text{div}\mathbf{u}, p)_{L_2} &= f(w) & \forall w \in L_2\end{aligned}$$

kde p je tentokrát řešení původní Laplaceovy úlohy a $\mathbf{u} = \nabla p$ je tok.

Hiptmair konstruuje předpodmiňovač \mathbf{C}_ρ pro $\mathbf{A}_\rho := \mathbf{A} + \rho \mathbf{B}^* \iota^{-1} \mathbf{B}$ tak, že pro malé ρ $\text{cond}((\mathbf{C}_\rho)^{-1} \mathbf{A}_\rho) = O\left(\frac{1}{\rho^{3/2}}\right)$ nezávisle na jemnosti diskretizace (pro velké ρ : $O(1)$).

Multigrid pro Maxwellovy rovnice

Úloha s rozšířenými Lagrangiány

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \rho \mathbf{B}^* \iota^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{u} + \mathbf{B}^* p &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dostál 2005

prezentuje nový typ analýzy pro algoritmus rozšířených Lagrangiánů s adaptivní kontrolou přesnosti. Ukazuje mimo jiné, že penalizační parametr ρ je ohraničen nezávisle na předpodmínění vazeb \mathbf{B} .

Náš cíl

je vyvinout optimální řešič při použití Dostálova algoritmu rozšířených Lagrangiánů s adaptivní kontrolou přesnosti.

Řešení: použijeme regularizaci $\hat{\mathbf{A}}$ Maxwellova operátoru podle Zoua a předpodmíníme matici $\hat{\mathbf{A}}_\rho := \hat{\mathbf{A}} + \rho \mathbf{B}^* \iota^{-1} \mathbf{B}$ podle Hiptmaira. Z analýzy Prof. Dostála snad vyplyne, že výsledný předpodmiňovač $\hat{\mathbf{C}}_\rho$ bude optimální nezávisle na ρ .

Osnova

- Maxwellovy rovnice: příklady úloh
 - Vířivé proudy
 - Elektrostatika
 - Magnetostatika
- Více-úrovňové metody
 - Multigrid pro 1D úlohu struny
 - Porovnání metod na reálné úloze
 - Analýza optimální konvergence
 - Multigrid pro Maxwellovy rovnice
- Závěr

Závěr

Chceme vyvinout a analyzovat rychlé Maxwellovy řešiče pro

- měnící se penalizací ρ
- perturbace operátoru při tvarové optimalizaci
- perturbace operátoru při topologické optimalizaci
- smíšené úlohy plynoucí z "all-at-once" přístupu v optimalizaci

Závěr

Chceme vyvinout a analyzovat rychlé Maxwellovy řešiče pro

- měnící se penalizací ρ
- perturbace operátoru při tvarové optimalizaci
- perturbace operátoru při topologické optimalizaci
- smíšené úlohy plynoucí z "all-at-once" přístupu v optimalizaci

Děkuji za pozornost!