Náhodný vektor

Martina Litschmannová

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Opakování: Náhodná veličina

- Co je to náhodná veličina?

  Funkce, která každému (dále nedělitelnému) výsledku náhodného pokusu (tj. elementárnímu jevu) přiřazuje reálné číslo.

  Zjednodušeně: číselný výsledek náhodného pokusu

- Co je to rozdělení náhodné veličiny X?

  Předpis, který umožňuje určit pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty z libovolné podmnožiny reálných čísel.

- Jaké základní typy náhodných veličin znáte?

  Diskrétní a spojité náhodné veličiny.

Opakování: Náhodná veličina

- Jaké funkce umožňují popsat rozdělení náhodných veličin?

Pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce (diskrétní NV),

hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce (spojitá NV).

- Jaké číselné charakteristiky náhodných veličin znáte?

Střední hodnota, kvantily (míry polohy),

rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient (míry variability),

šikmost, špičatost (míry šikmosti a špičatosti).

Náhodný vektor - motivace

„Povětrností podmínky byly toho dne příznivé. Posuďte sami: Slabá studená fronta tři sta padesát čtyři šestnáct, tři sta padesát čtrnáct, tři sta čtyřicet osm deset. Výška, tlak, teplota, rosný bod: tři sta pět, tisíc dvacet jedna celých, jedna desetina, dvanáct, jedna.“

(Jára Cimrmann)

Jsou situace, kdy je výsledek náhodného pokusu vyjádřen n-tici čísel.

V takovém případě potřebujeme pracovat s pojmem „náhodný vektor“.

Náhodný vektor

Náhodným vektorem rozumíme vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$, jehož složky $X_1, X_2, \cdots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované na stejném základním prostoru Ω.

Například:

- počet požadavků ve frontě a doba jejich obsluhy,
- délka a šířka vyrobené součástky,
- velikost krevních ztrát při operaci a doba hospitalizace…

Dále se pro zjednodušení omezíme pouze na

dvourozměrné náhodné vektory, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ jejichž všechny složky jsou buď diskrétní náhodné veličiny nebo spojité náhodné veličiny.

Náhodný vektor - značení

- Náhodný vektor značíme velkým tučným písmenem (např. $\boldsymbol{X}$),
- složky náhodného vektoru jsou náhodné veličiny, značíme je tedy velkými písmeny (např. X_1, X_2),
- realizace náhodného vektoru (hodnoty naměřené po realizaci pokusu) značíme malým tučným písmenem (např. $\boldsymbol{x}$).

Např.: Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává délku (D) v milimetrech a hmotnost (H) v gramech vysoustružené součástky. Při kontrole první součástky byla pozorována realizace $\boldsymbol{x_1} = (21, 12)^T$.

Rozdělení náhodného vektoru

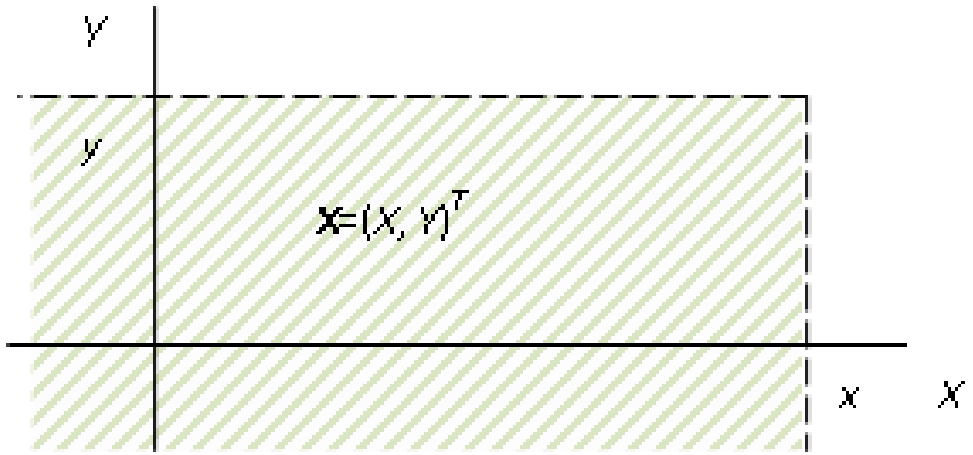
U náhodného vektoru musíme rozlišovat následující typy rozdělení:

- sdružené,
- marginální,
- podmíněné.

Sdružené rozdělení náhodného vektoru

Sdružená distribuční funkce dvourozměrného vektoru $\boldsymbol{X} = (X, Y)^T$ je definována předpisem

$$F(x, y) = P(X < x \wedge Y < y) = P(X < x, Y < y).$$



Grafická prezentace $F(x, y)$

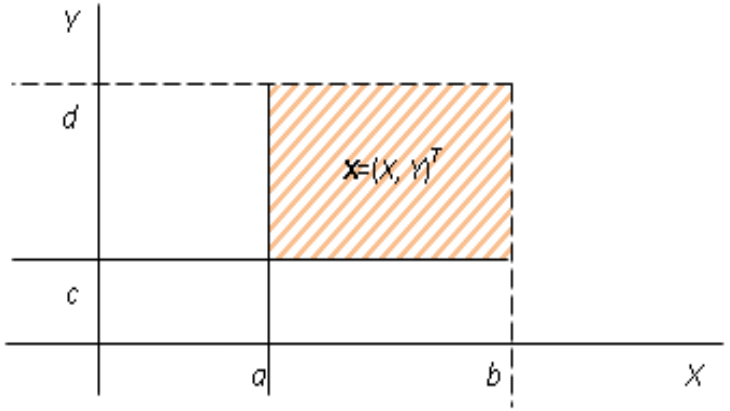
Sdružené rozdělení náhodného vektoru

Sdružená distribuční funkce dvourozměrného vektoru $\boldsymbol{X} = (X, Y)^T$ je definována předpisem

$$F(x, y) = P(X < x \wedge Y < y) = P(X < x, Y < y).$$

Vlastnosti sdružené distribuční funkce:

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leq F(x, y) \leq 1,$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0,$
3. $\lim\limits_{(x,y) \to (\infty, \infty)} F(x, y) = 1,$
4. $F(x, y)$ je neklesající v každé proměnné,
5. $F(x, y)$ je zleva spojitá v každé proměnné.
6. $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$



Diskrétní náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení

Náhodný vektor má diskrétní rozdělení (je diskrétní), jestliže existuje nejvýše spočetně mnoho hodnot náhodného vektoru tak, že

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} P\big((X = x_i) \wedge (Y = y_j)\big) = 1,\ n_1 \geq 1, n_2 \geq 1.$$

Funkce $P\big((X = x_i) \wedge (Y = y_j)\big)$ se nazývá sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ a značí se

$$P\big((X = x_i) \wedge (Y = y_j)\big) = P\big(X = x_i, Y = y_j\big) = p\big(x_i, y_j\big).$$

Diskrétní náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení

Funkce $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$ se nazývá sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ a značí se

$$P\big((X = x_i) \wedge (Y = y_j)\big) = P\big(X = x_i, Y = y_j\big) = p\big(x_i, y_j\big).$$

Vlastnosti sdružené pravděpodobnostní funkce:

1. Existuje pouze konečná nebo spočetná množina hodnot $\big(x_i, y_j\big)$, pro které je $p\big(x_i, y_j\big) > 0$,
2. $0 \leq p\big(x_i, y_j\big) \leq 1$,
3. $\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} p\big(x_i, y_j\big) = 1, \quad n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$,
4. $F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p\big(x_i, y_j\big)$.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_{n2}
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	…	$p(x_1, yn_2)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_2, yn_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
x_{n1}	$p(xn_1, y_1)$	$p(xn_1, y_2)$	…	$p(xn_1, yn_2)$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

c) Určete pravděpodobnost, že počet bitů se silnou deformaci bude menší než počet bitů se střední deformaci.

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \backslash X_{St}$	0	1	2
0			
1			
2			

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \backslash X_{St}$	0	1	2
0			
1			0,00
2		0,00	0,00

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,6·0,6	2·0,6·0,3	0,3·0,3
1	2·0,1·0,6	2·0,1·0,3	0,00
2	0,1·0,1	0,00	0,00

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

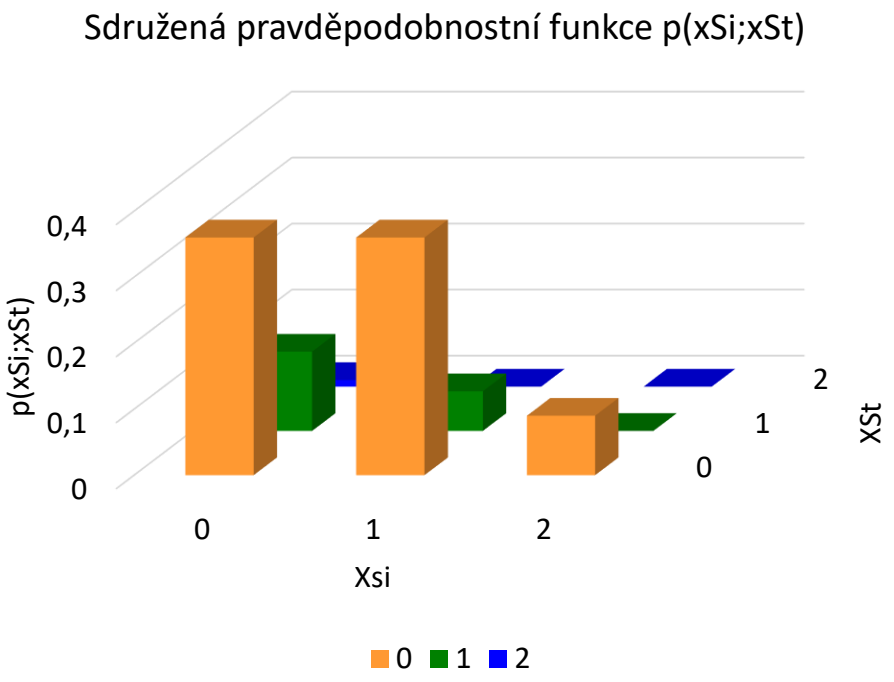
b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,36	0,36	0,09
1	0,12	0,06	0,00
2	0,01	0,00	0,00

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

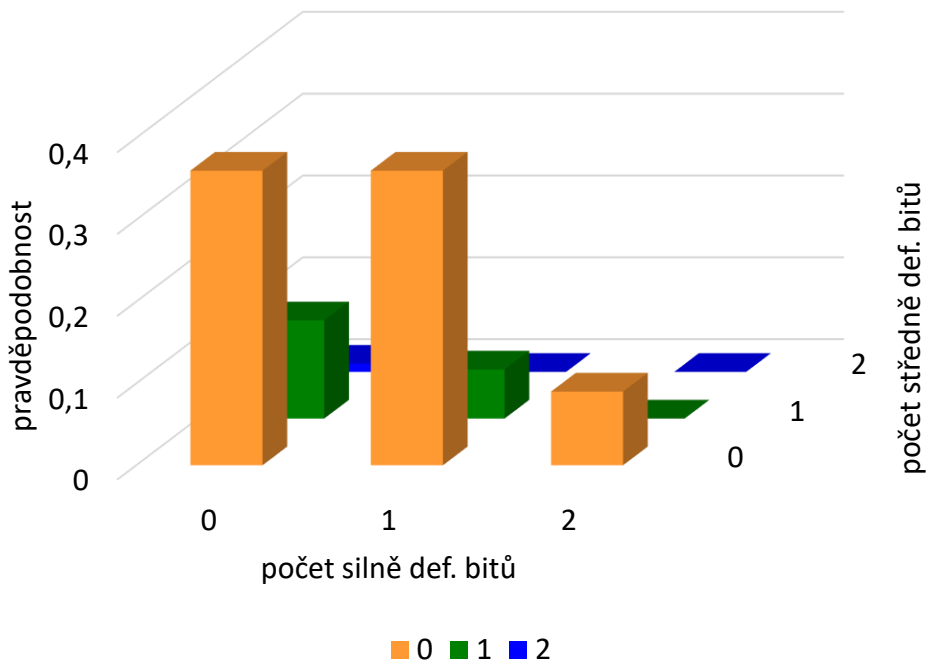
$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,36	0,36	0,09
1	0,12	0,06	0,00
2	0,01	0,00	0,00



Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,36	0,36	0,09
1	0,12	0,06	0,00
2	0,01	0,00	0,00



Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

c) Určete pravděpodobnost, že počet bitů se silnou deformaci bude menší než počet bitů se střední deformaci.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,36	0,36	0,09
1	0,12	0,06	0,00
2	0,01	0,00	0,00

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

a) Určete obor hodnot náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$\{(0;0)^T; (0;1)^T; (0;2)^T; (1;0)^T; (1;1)^T; (2;0)^T\}$

b) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

c) Určete pravděpodobnost, že počet bitů se silnou deformaci bude menší než počet bitů se střední deformaci.

$$P(X_{Si} < X_{St}) = 0{,}36 + 0{,}09 + 0 = 0{,}45$$

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,36	0,36	0,09
1	0,12	0,06	0,00
2	0,01	0,00	0,00

Spojitý náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení

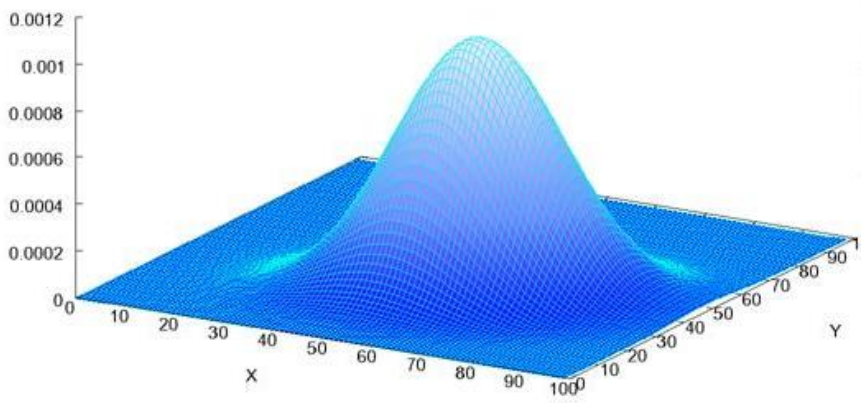
O náhodném vektoru se spojitým rozdělením (spojitém náhodném vektoru) mluvíme v případě, že náhodný vektor má absolutně spojitou distribuční funkci $F(x,y)$, tj. pokud existuje nezáporná funkce $f(x,y)$ taková, že

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s,t)\, ds\, dt.$$

Funkci $f(x,y)$ nazýváme sdruženou hustotou náh. vektoru $\boldsymbol{X}$.

Vlastnosti sdružené hustoty:

1. $f(x,y) \geq 0,$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1,$
3. existuje-li $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, pak $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$,
4. $P(a \leq X < b,\ c \leq Y < d) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x,y)\, dx\, dy.$



Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

a) Určete sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

b) Určete pravděpodobnost, že chyba měření délky bude menší než 0,1 mm a chyba měření hmotnosti bude menší než 0,3 g.

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

a) Určete sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

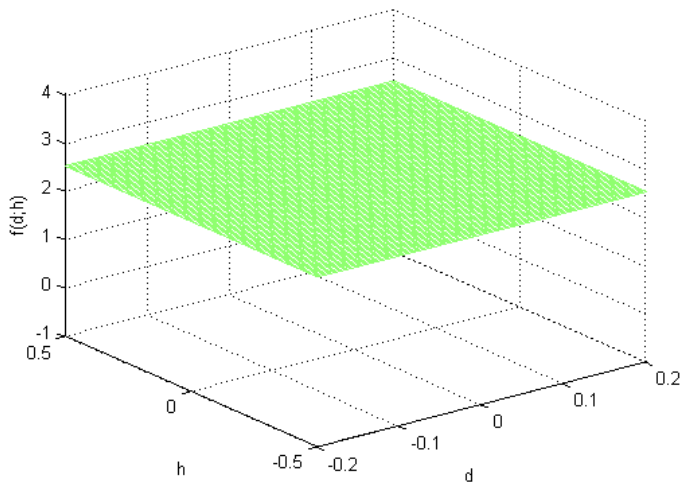
$$f(d;h) = \begin{cases} c & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$\int_{-0{,}2}^{0{,}2} \int_{-0{,}5}^{0{,}5} c \, dh \, dd = 1$$

$$\int_{-0{,}2}^{0{,}2} c \, dd = 1$$

$$0{,}4c = 1$$

$$\boldsymbol{c = 2{,}5}$$

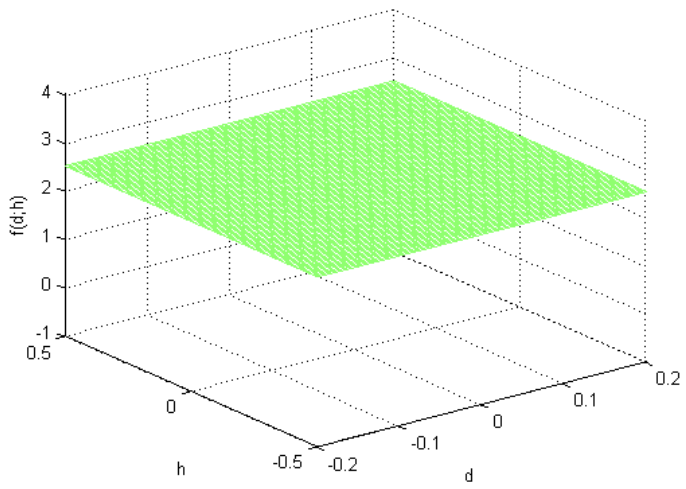


Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

a) Určete sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

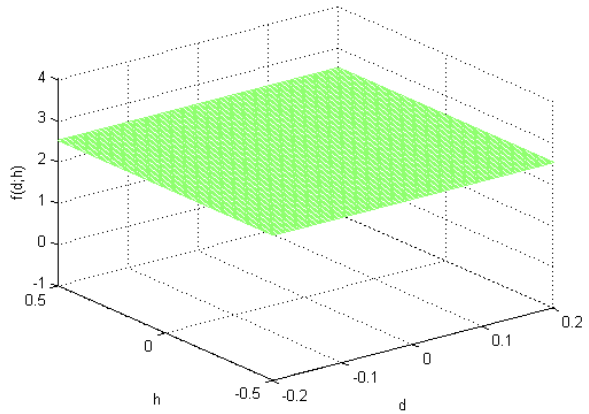


Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

a) Určete sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$



b) Určete pravděpodobnost, že chyba měření délky bude menší než 0,1 mm a chyba měření hmotnosti bude menší než 0,3 g.

$$P(-0{,}1 < D < 0{,}1; -0{,}3 < H < 0{,}3) = \int_{-0{,}1}^{0{,}1} \int_{-0{,}3}^{0{,}3} f(d;h)\, dh\, dd = \int_{-0{,}1}^{0{,}1} \int_{-0{,}3}^{0{,}3} 2{,}5\, dh\, dd = \mathbf{0,3}$$

Rozdělení náhodného vektoru

U náhodného vektoru musíme rozlišovat následující typy rozdělení:

- sdružené,
- marginální,
- podmíněné.

Marginální rozdělení náhodného vektoru

Je-li $(X, Y)^T$ náhodný vektor, pak se rozdělení náhodných veličin *X* a *Y* nazývá marginální rozdělení.

Marginální distribuční funkce $F_X(x)$, resp. $F_Y(y)$ náhodné veličiny *X*, resp. *Y* jsou určeny vztahy:

- $F_X(x) = P(X < x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y), \quad x \in \mathbb{R},$
- $F_Y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y), \quad y \in \mathbb{R}.$

Marginální rozdělení diskrétního náhodného vektoru

Je-li $p(x_i, y_j)$ sdružená pravděpodobnostní funkce diskrétního náh. vektoru $(X, Y)^T$, pak jsou marginální pravděpodobnostní funkce $P_X(x)$, resp. $P_Y(y)$ náhodné veličiny *X*, resp. *Y* určeny vztahy

- $P_X(x_i) = \sum_{(y_j)} p(x_i, y_j)\,,\ i \geq 1,$
- $P_Y(y_j) = \sum_{(x_i)} p(x_i, y_j)\,,\ j \geq 1.$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

d) Určete marginální pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	0,36	0,36	0,09
1	0,12	0,06	0,00
2	0,01	0,00	0,00

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

d) Určete marginální pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

kontrolní pole

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

d) Určete marginální pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

x_{Si}	$P(x_{Si})$
0	0,81
1	0,18
2	0,01
celkem	$\mathbf{1,00}$

x_{St}	$P(x_{St})$
0	0,49
1	0,42
2	0,09
celkem	$\mathbf{1,00}$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

d) Určete marginální pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

e) Určete marginální distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

x_{Si}	$P(x_{Si})$
0	0,81
1	0,18
2	0,01
celkem	$\mathbf{1,00}$

x_{St}	$P(x_{St})$
0	0,49
1	0,42
2	0,09
celkem	$\mathbf{1,00}$

x_{Si}	$F(x_{Si})$
$(-\infty; 0\rangle$	0,00
$(0; 1\rangle$	0,81
$(1; 2\rangle$	0,99
$(2; \infty)$	1,00

x_{St}	$F(x_{St})$
$(-\infty; 0\rangle$	0,00
$(0; 1\rangle$	0,49
$(1; 2\rangle$	0,91
$(2; \infty)$	1,00

Marginální rozdělení spojitého náhodného vektoru

Marginálními hustotami spojitého náhodného vektoru $(X, Y)^T$ rozumíme hustoty náhodných veličin X a Y, které lze vypočíst jako

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \ x \in \mathbb{R},$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx, \ y \in \mathbb{R}.$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

c) Určete marginální hustoty náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

d) Určete marginální distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

c) Určete marginální hustoty náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$f_D(d) = \int_{-\infty}^{\infty} f(d;h)dh,\ \ d \in \mathbb{R}$$

$$f_D(d) = \begin{cases} \int_{-0{,}5}^{0{,}5} 2{,}5dh & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle \\ 0 & d \notin \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle \end{cases}$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

c) Určete marginální hustoty náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$f_D(d) = \int_{-\infty}^{\infty} f(d;h)dh,\ \ d \in \mathbb{R}$$

$$f_D(d) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle \\ 0 & d \notin \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle \end{cases}$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

c) Určete marginální hustoty náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2\rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$f_H(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(d;h)dd,\ \ h \in \mathbb{R}$$

$$f_H(h) = \begin{cases} \int_{-0{,}2}^{0{,}2} 2{,}5dd & h \in \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \\ 0 & h \notin \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \end{cases}$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

c) Určete marginální hustoty náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \ x \in \mathbb{R}$$

$$f(d; h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$f_H(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(d; h)dd, \ h \in \mathbb{R}$$

$$f_H(h) = \begin{cases} 1 & h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & h \notin \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \end{cases}$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

d) Určete marginální distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$f_D(d) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle \\ 0 & d \notin \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle \end{cases}$$

$$f_H(h) = \begin{cases} 1 & h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & h \notin \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \end{cases}$$

Nezávislost náhodných veličin

Řekneme, že dvě náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě když

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lze ukázat, že je-li $\boldsymbol{X} = (X,Y)^T$ diskrétní náhodný vektor, pak náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, právě když platí

$$p(x_i, y_j) = P_X(x_i) \cdot P_Y(y_j), \qquad i \geq 1, j \geq 1.$$

Analogicky pro spojitý náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X,Y)^T$ lze ukázat, že náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, právě když platí

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

f) Určete, zda jsou náhodné veličiny X_{Si} a X_{St} nezávislé.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

X_{Si} a X_{St} jsou nezávislé NV $\Leftrightarrow$ $\forall x_{Si}, x_{St}: P(X_{Si} = x_{Si}, X_{St} = x_{St}) = P_{X_{Si}}(x_{Si}) \cdot P_{X_{St}}(x_{St})$,

$P(X_{Si} = 0, X_{St} = 0) \neq P(X_{Si} = 0) \cdot P(X_{St} = 0)$ $(0{,}36 \neq 0{,}81 \cdot 0{,}49)$ $\Rightarrow X_{Si}$ a X_{St} **nejsou** nezávislé NV

Příklad 2

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

e) Určete, zda jsou náhodné veličiny D a H nezávislé.

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$f_D(d) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle \\ 0 & d \notin \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle \end{cases}, \qquad f_H(h) = \begin{cases} 1 & h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & h \notin \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \end{cases}$$

$$f(d;h) = f_D(d) \cdot f_H(h), \qquad (d,h) \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad D, H \text{ jsou nezávislé náhodné veličiny}$$

Rozdělení náhodného vektoru

U náhodného vektoru musíme rozlišovat následující typy rozdělení:

- sdružené,
- marginální,
- podmíněné.

Podmíněné rozdělení náhodného vektoru

Podmíněné rozdělení X vzhledem k Y popisuje rozdělení náhodné veličiny X za předpokladu, že náhodná veličina Y nabyla hodnoty y.

Obdobně: Podmíněné rozdělení Y vzhledem k X popisuje rozdělení náhodné veličiny Y za předpokladu, že náhodná veličina X nabyla hodnoty x.

Podmíněné rozdělení definujeme jako podíl rozdělení sdruženého a příslušného marginálního.

Podmíněné rozdělení náhodného vektoru

Je-li $\boldsymbol{X} = (X, Y)^T$ **diskrétní náhodný vektor**, pak

podmíněná pravděpodobnostní funkce $P(x|y)$ je definována vztahem

$$P(x|y) = \frac{p(x,y)}{P_Y(y)}, \; P_Y(y) \neq 0.$$

Obdobně

podmíněná pravděpodobnostní funkce $P(y|x)$ je definována vztahem

$$P(y|x) = \frac{p(x,y)}{P_X(x)}, \; P_X(x) \neq 0.$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0			
1			
2			

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	?		
1			
2			

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

$$P(X_{Si} = 0|X_{St} = 0) = \frac{p(0;0)}{P_{X_{St}}(0)} = \frac{0,36}{0,49}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	36/49		
1			
2			

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

$$P(X_{Si} = 0|X_{St} = 0) = \frac{p(0;0)}{P_{X_{St}}(0)} = \frac{0,36}{0,49}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	36/49		
1	?		
2			

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

$$P(X_{Si} = 1|X_{St} = 0) = \frac{p(1;0)}{P_{X_{St}}(0)} = \frac{0,12}{0,49}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	36/49		
1	12/49		
2			

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

$$P(X_{Si} = 1|X_{St} = 0) = \frac{p(1;0)}{P_{X_{St}}(0)} = \frac{0,12}{0,49}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	36/49	36/42	1
1	12/49	6/42	0
2	1/49	0	0

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_{Si}|X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2
0	36/49	36/42	1
1	12/49	6/42	0
2	1/49	0	0
celkem	1	1	1

$$P(X_{Si}|X_{St}) = \frac{p(x_{Si};x_{St})}{P_{X_{St}}(x_{St})}$$

Podmíněné rozdělení náhodného vektoru

Je-li $\boldsymbol{X} = (X, Y)^T$ **spojitý náhodný vektor**, pak

podmíněná hustota $f(x|y)$ je definována vztahem

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \; f_Y(y) \neq 0.$$

Obdobně

podmíněná hustota $f(y|x)$ je definována vztahem

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \; f_X(x) \neq 0.$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

g) Určete podmíněnou hustotu $f(d|h)$.

$$f(d|h) = \frac{f(d;h)}{f_H(h)}, \qquad f_H(h) \neq 0$$

$$f(d;h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$f_H(h) = \begin{cases} 1 & h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & h \notin \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \end{cases}$$

$$f(d|h) = \begin{cases} 2{,}5 & d \in \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \\ 0 & d \notin \langle -0{,}2; 0{,}2 \rangle, h \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle \end{cases}$$

Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Při popisu náhodného vektoru rozlišujeme následující typy číselných charakteristik:

- sdružené,
- marginální,
- podmíněné.

Sdružené charakteristiky

Sdružené charakteristiky náhodného vektoru popisují vztahy mezi jeho jednotlivými složkami.

Sdružený obecný moment řádu $(r+s)$ náhodného vektoru $(X,Y)^T$

pro diskrétní náhodný vektor: $E(X^r \cdot Y^s) = \sum_i \sum_j x_i^r \cdot y_j^s \cdot p(x_i, y_j)\,,\ i \geq 1, j \geq 1$

pro spojitý náhodný vektor: $E(X^r \cdot Y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot y^s \cdot f(x,y) dx dy$

Sdružené charakteristiky

Sdružené charakteristiky náhodného vektoru popisují vztahy mezi jeho jednotlivými složkami.

Sdružený centrální moment řádu $(r+s)$ náhodného vektoru $(X,Y)^T$

pro diskrétní náhodný vektor:

$$E\big((X-EX)^r \cdot (Y-EY)^s\big) = \sum_i \sum_j (x_i - EX)^r \cdot \big(y_j - EY\big)^s \cdot p\big(x_i, y_j\big), \quad i \geq 1, j \geq 1$$

pro spojitý náhodný vektor:

$$E\big((X-EX)^r \cdot (Y-EY)^s\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-EX)^r \cdot (y-EY)^s \cdot f(x,y)dxdy$$

Sdružené charakteristiky

Kovariance $cov(X,Y)$ je definována jako sdružený centrální moment řádu $(1+1)$.

$$cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\cdot\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

Vlastnosti kovariance:

1. $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$ (výpočetní vztah)

   Důkaz:

   $$cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\cdot\big(Y - E(Y)\big)\Big) = E\big(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\big) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

2. $cov(X,X) = D(X)$,

3. $cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2cov(X,Y)$,

   Důkaz:

   $$cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = E\Big(\big(a_1X + b_1 - E(a_1X + b_1)\big)\cdot\big(a_2Y + b_2 - E(a_2Y + b_2)\big)\Big) =$$

   $$= E\big((a_1X + b_1 - a_1E(X) - b_1)\cdot(a_2Y + b_2 - a_2E(Y) - b_2)\big) = E\Big(\big(a_1X - a_1E(X)\big)\cdot\big(a_2Y - a_2E(Y)\big)\Big) =$$

   $$= E\Big(a_1a_2\big(X - E(X)\big)\cdot\big(Y - E(Y)\big)\Big) = a_1a_2E\Big(\big(X - E(X)\big)\cdot\big(Y - E(Y)\big)\Big) = a_1a_2cov(X,Y)$$

4. jsou-li X, Y nezávislé náhodné veličiny, pak $cov(X,Y) = 0$.

Sdružené charakteristiky

Kovarianční matice

$$var(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} cov(X,X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & cov(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

Vlastnosti kovarianční matice

1. Kovarianční matice je symetrická a pozitivně semidefinitní.

Střední hodnota součtu náhodných veličin

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
2. $E(aX) = aE(X), a \in \mathbb{R}$
3. $E(b) = b, b \in \mathbb{R}$

Rozptyl součtu náhodných veličin

1. $D(X+Y) = D(X) + D(Y) - 2cov(X,Y)$

Důkaz:

$$D(X+Y) = E\left(\left((X+Y) - E(X+Y)\right)^2\right) =$$

$$= E\left((X+Y)^2 - 2(X+Y)\cdot E(X+Y) + \left(E(X+Y)\right)^2\right) =$$

$$= E\left(X^2 + 2XY + Y^2 - 2XE(X) - 2XE(Y) - 2YE(X) - 2YE(Y) + \left(E(X)\right)^2 + 2E(X)E(Y) + \left(E(Y)\right)^2\right) =$$

$$= E\left(X^2\right) + 2E(XY) + E\left(Y^2\right) - 2\left(E(X)\right)^2 - 2E(X)E(Y) - 2E(X)E(Y) - 2\left(E(Y)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 + 2E(X)E(Y) + \left(E(Y)\right)^2 =$$

$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 + E\left(Y^2\right) - \left(E(Y)\right)^2 - 2\left(E(XY) - E(X)E(Y)\right) = D(X) + D(Y) - 2cov(X,Y)$$

2. jsou –li X, Y nezávislé NV, pak $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

3. $D(aX) = a^2 D(X), a \in \mathbb{R}$

Důkaz:

$$D(aX) = \mathrm{E}\left(\left(aX - E(aX)\right)^2\right) = E\left(a^2X^2 - 2aXE(aX) + \left(E(aX)\right)^2\right) = E\left(a^2X^2 - 2a^2XE(X) + a^2\left(E(X)\right)^2\right)$$

$$= a^2E\left(X^2\right) - 2a^2\left(E(X)\right)^2 + a^2\left(E(X)\right)^2 == a^2E\left(X^2\right) - a^2\left(E(X)\right)^2 = a^2\left(E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2\right) = a^2D(X)$$

4. $D(b) = 0, b \in \mathbb{R}$

Důkaz: $D(b) = \mathrm{E}\left(\left(b - E(b)\right)^2\right) = \mathrm{E}\left((0)^2\right) = 0$

Rozptyl součtu náhodných veličin

1. $D(X+Y) = D(X) + D(Y) - 2cov(X,Y)$
2. jsou –li X, Y nezávislé NV, pak $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$
3. $D(aX) = a^2 D(X), a \in \mathbb{R}$
4. $D(b) = 0, b \in \mathbb{R}$

Korelační koeficient

Korelační koeficient $\rho(X,Y)$ je mírou závislosti náhodných veličin X, Y.

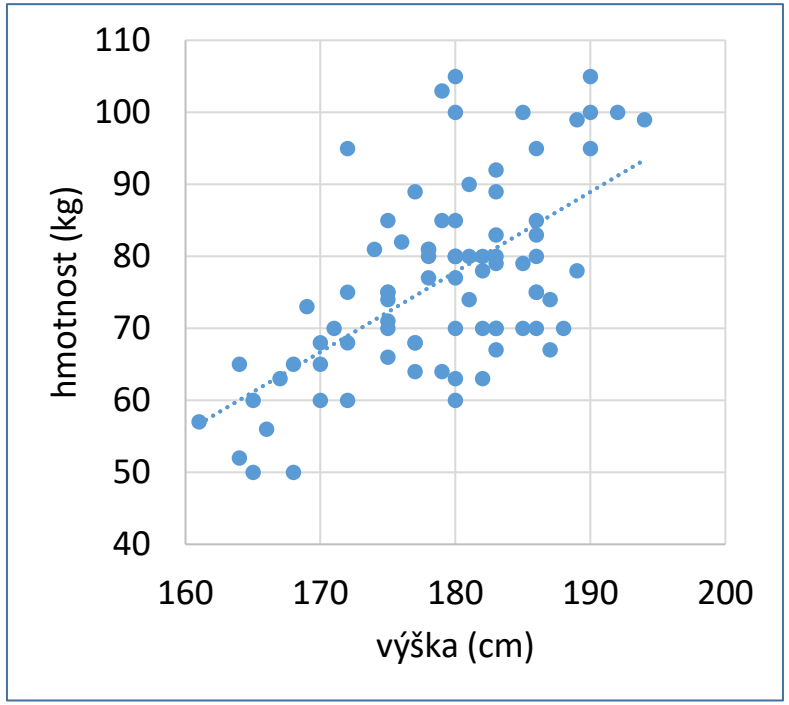
$$\rho(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}, & DX, DY \neq 0, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Pearsonův výběrový korelační koeficient je mírou **lineární** závislosti.

$$r = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_X \cdot s_Y}$$

Korelační koeficient

- **Vizualizace – bodový graf**

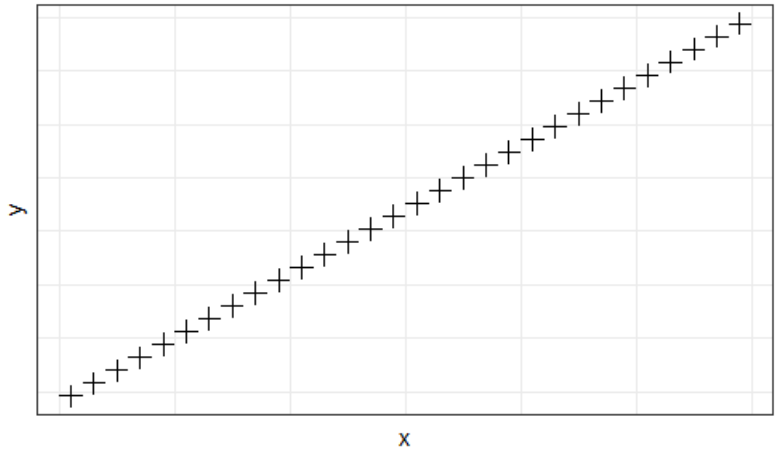


- **Pearsonův výběrový korelační koeficient**

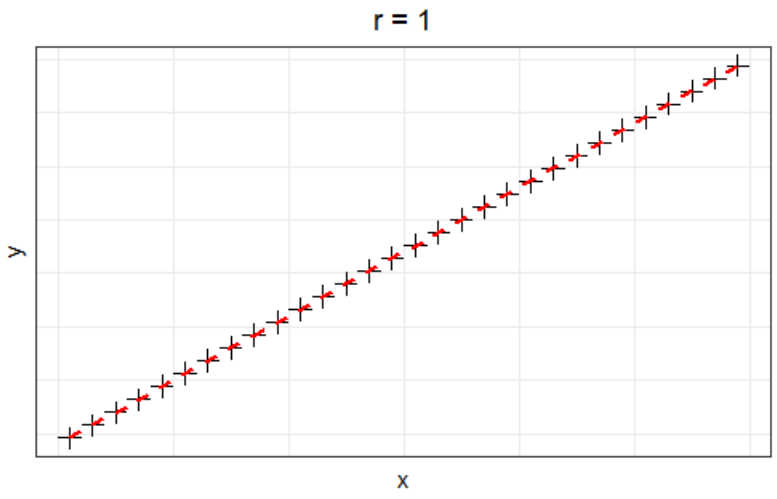
$$r = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{s_X \cdot s_Y}$$

- $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$,
- $r(X,Y) = r(Y,X)$,
- $r(X,X) = 1$,
- je-li $r(X,Y) = 0$, říkáme, že X, Y jsou nekorelované znaky,
- je-li $r(X,Y) > 0$, říkáme, že X, Y jsou pozitivně korelované (s rostoucím X roste Y),
- je-li $r(X,Y) < 0$, říkáme, že X, Y jsou negativně korelované (s rostoucím X klesá Y),
- je-li $|r(X,Y)| = 1$, pak je mezi X a Y lineární závislost.

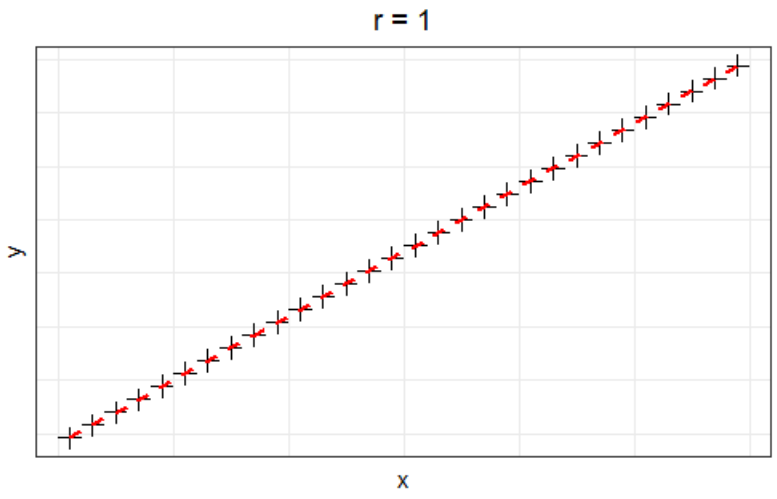
Pearsonův korelační koeficient

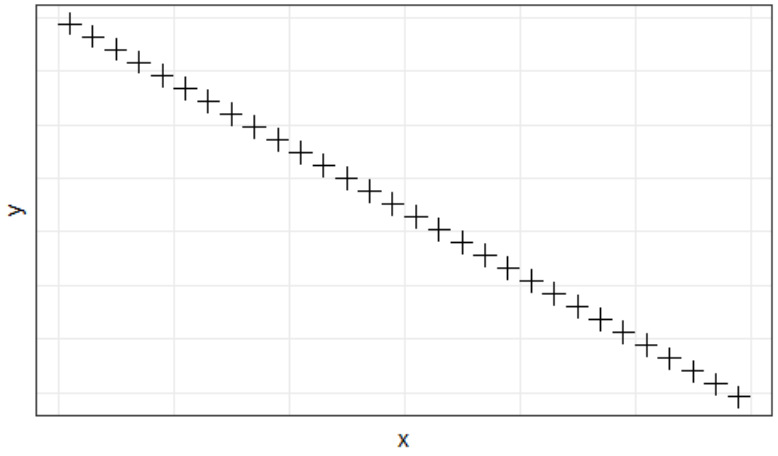


Pearsonův korelační koeficient

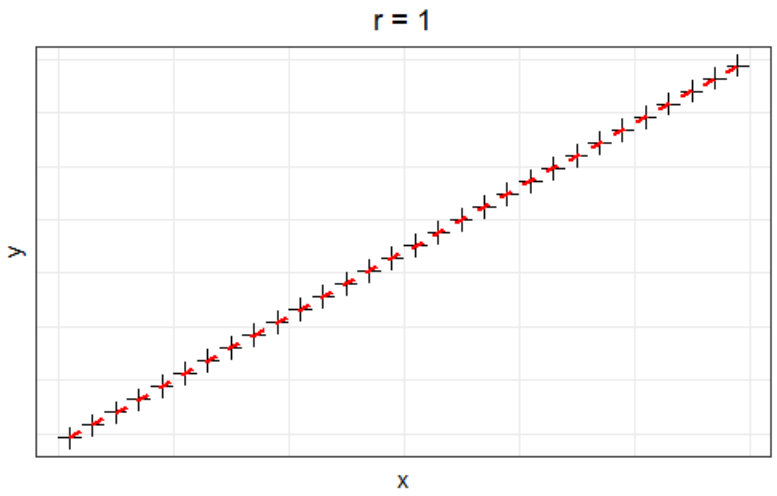


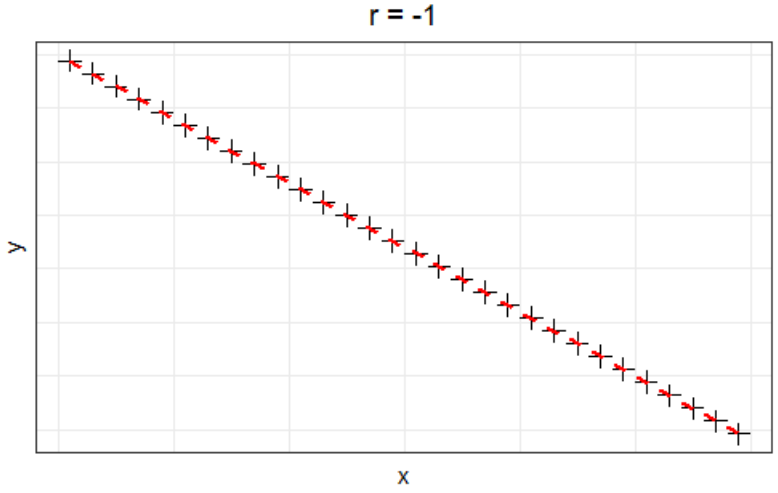
Pearsonův korelační koeficient



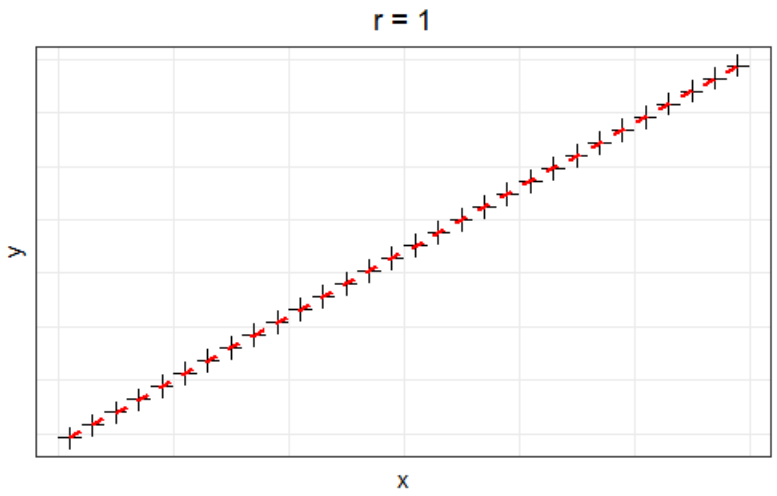


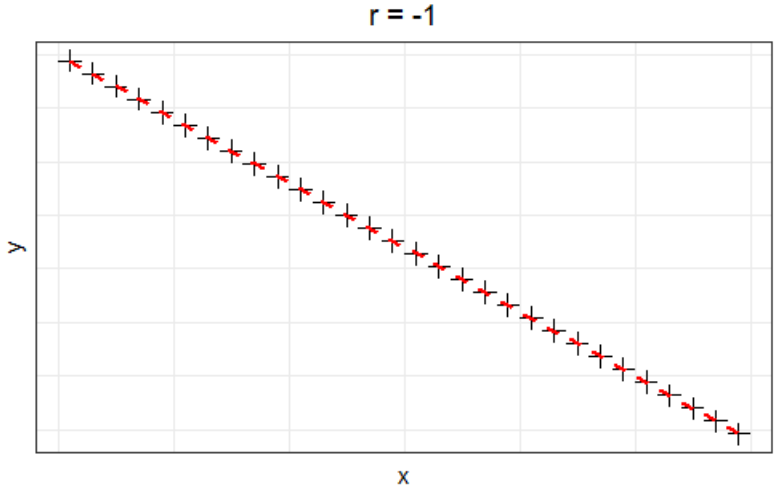
Pearsonův korelační koeficient

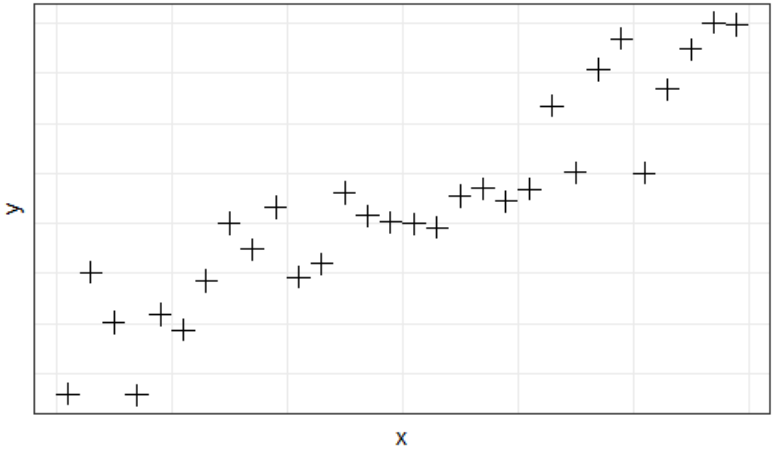




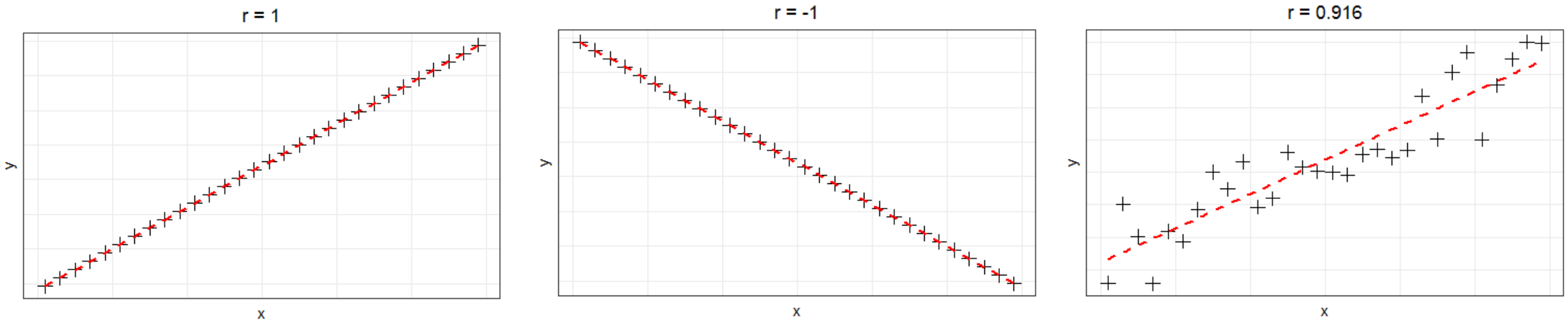
Pearsonův korelační koeficient



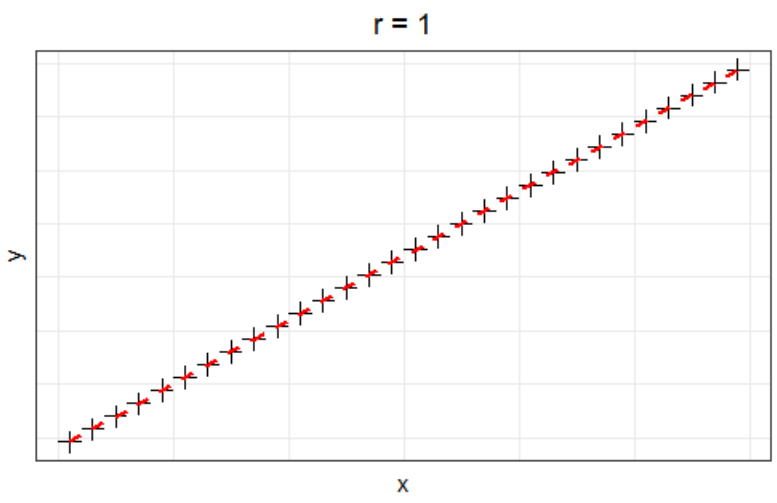


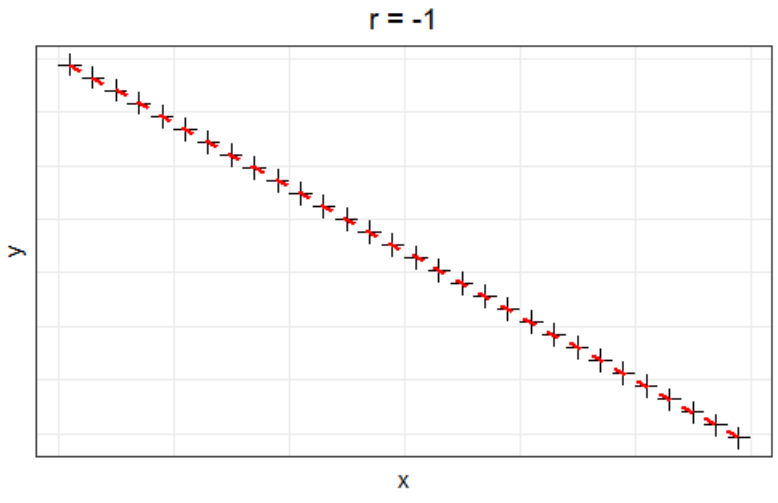


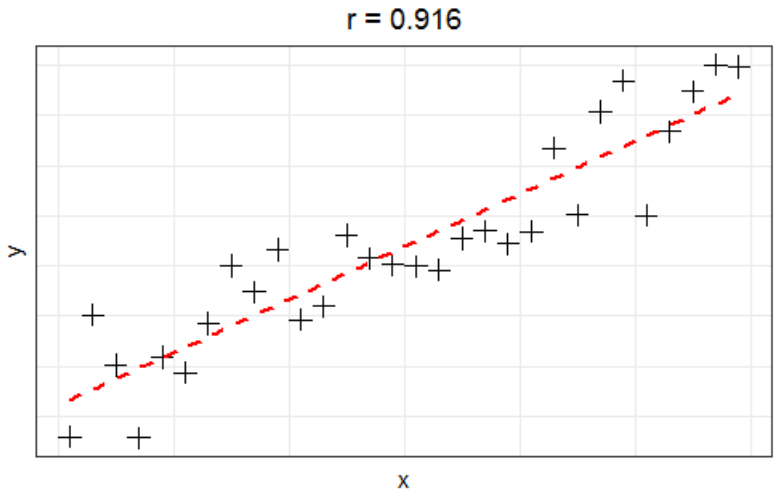
Pearsonův korelační koeficient

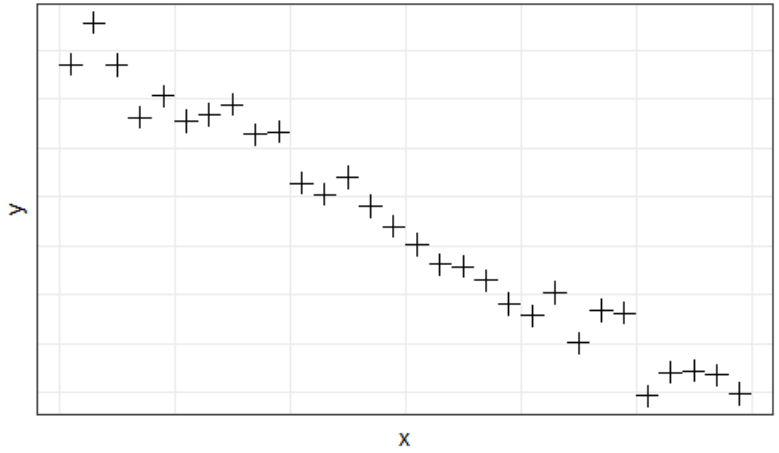


Pearsonův korelační koeficient

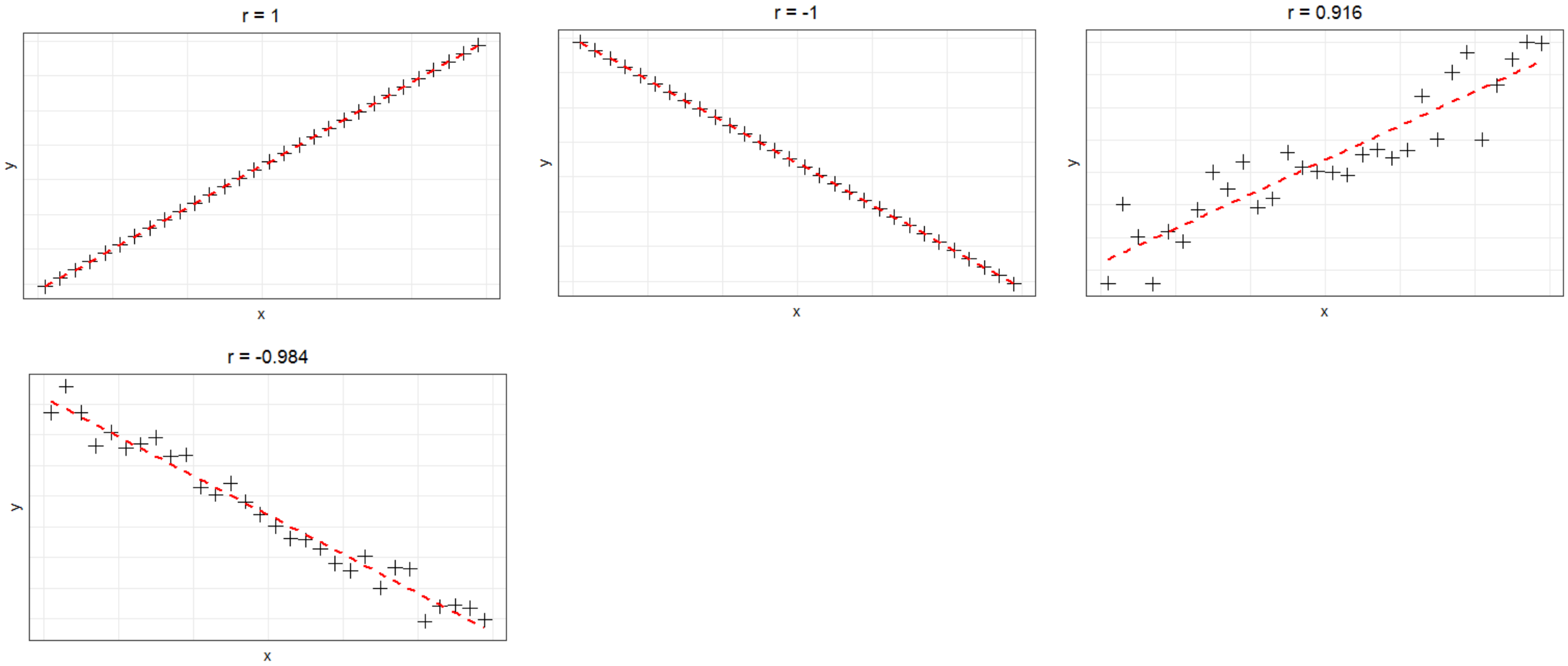




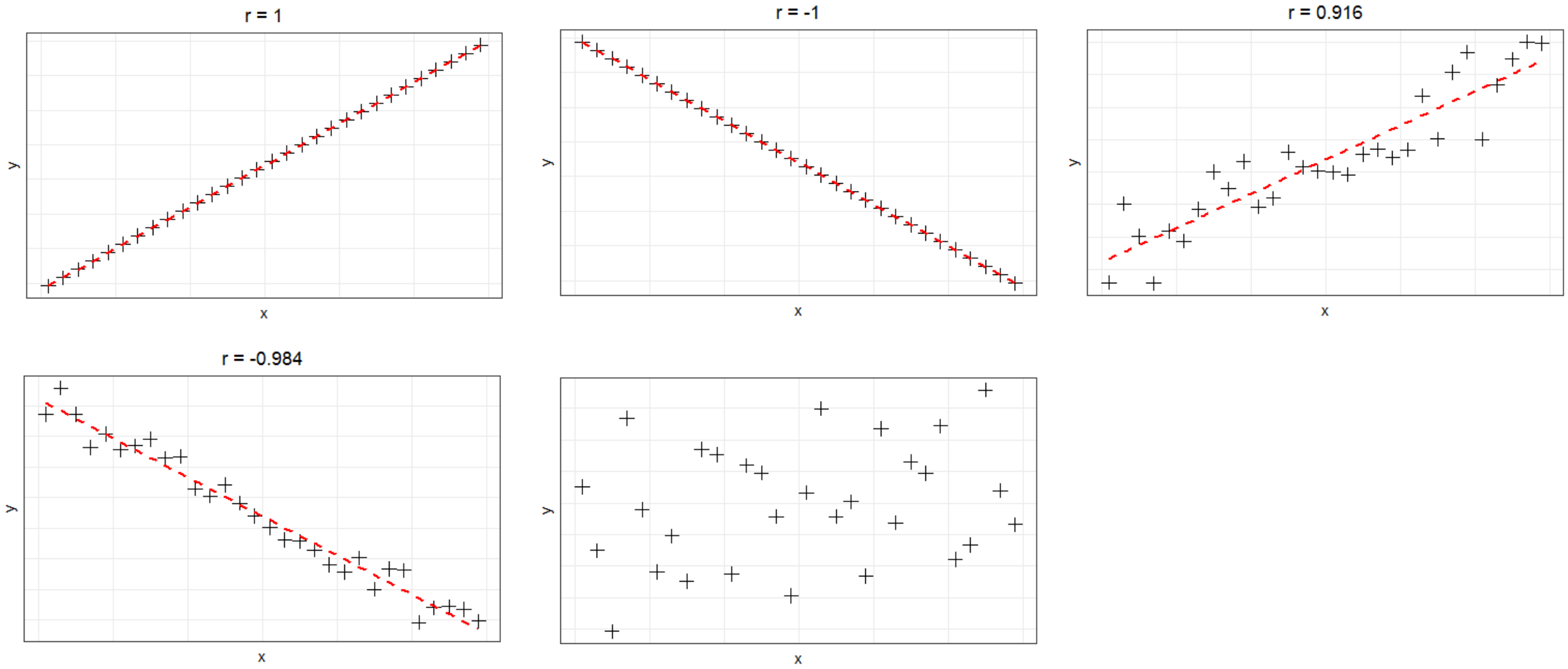




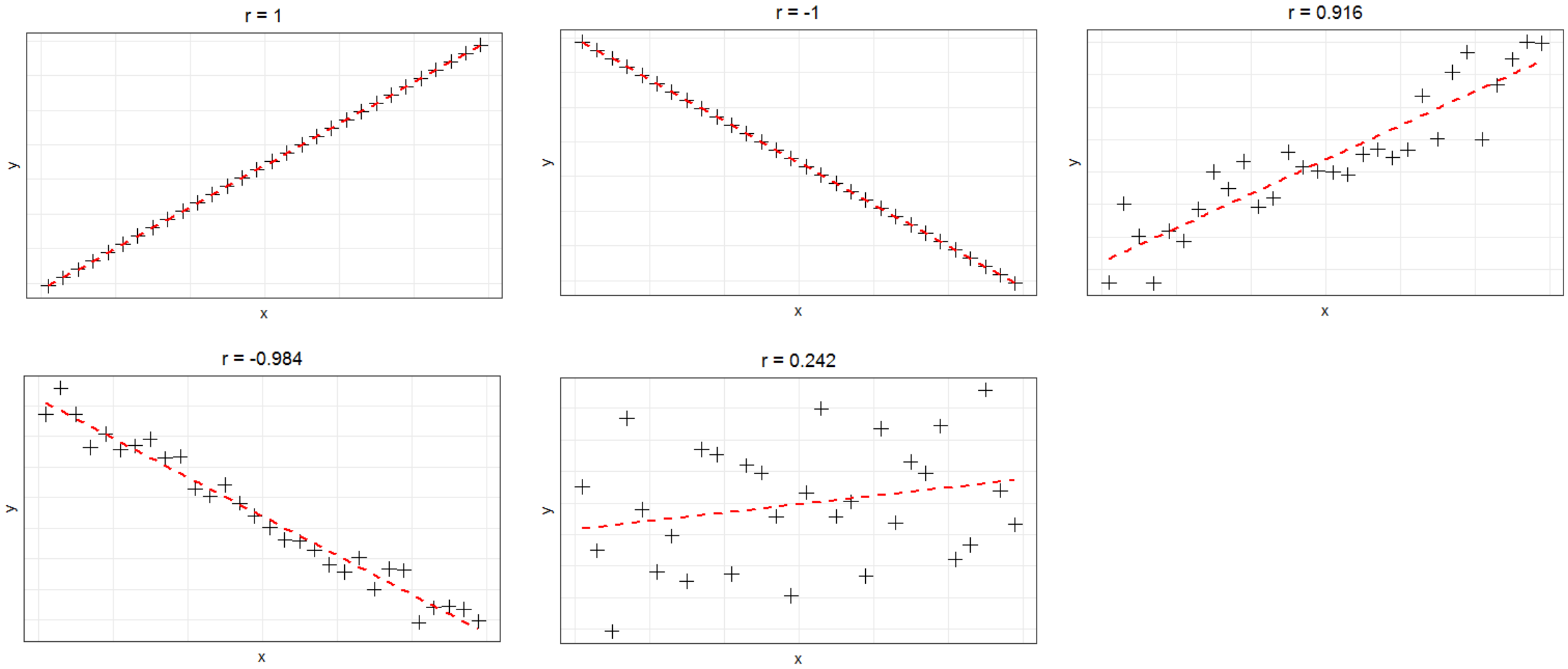
Pearsonův korelační koeficient



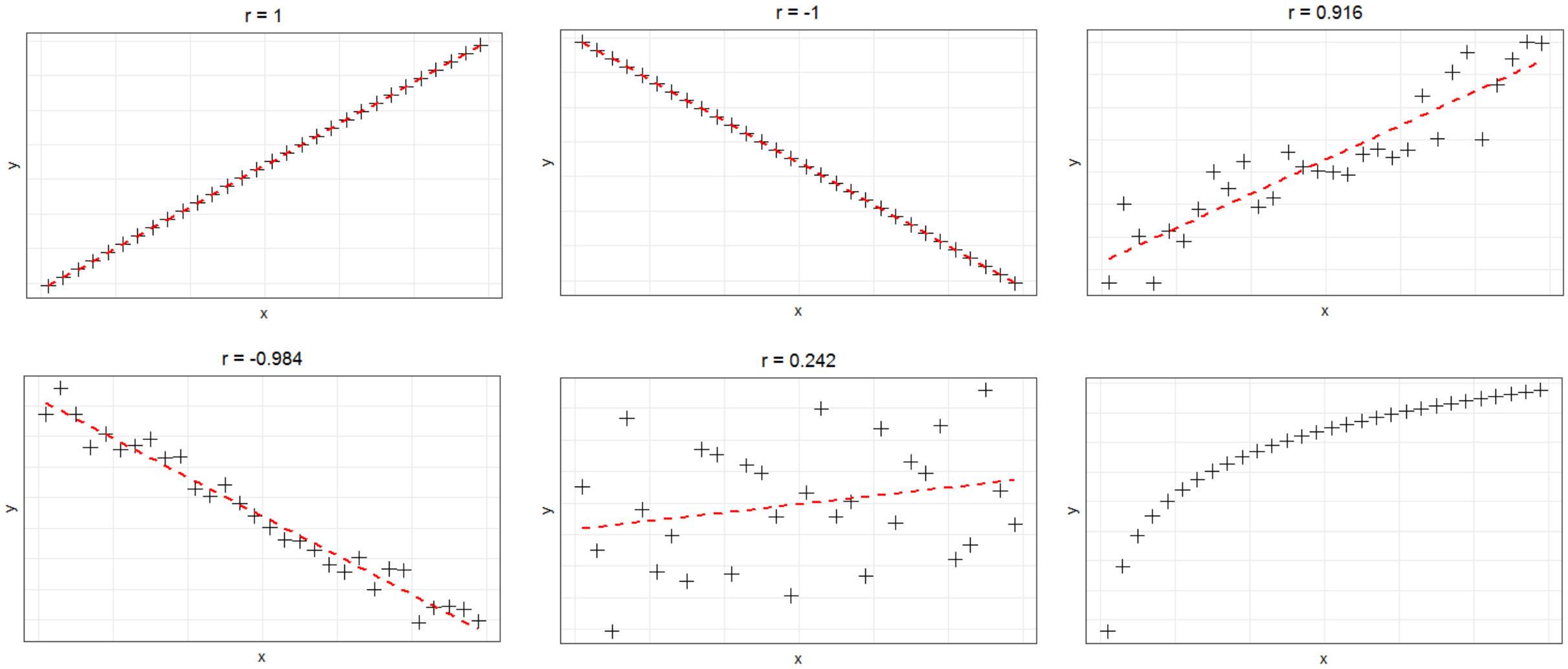
Pearsonův korelační koeficient



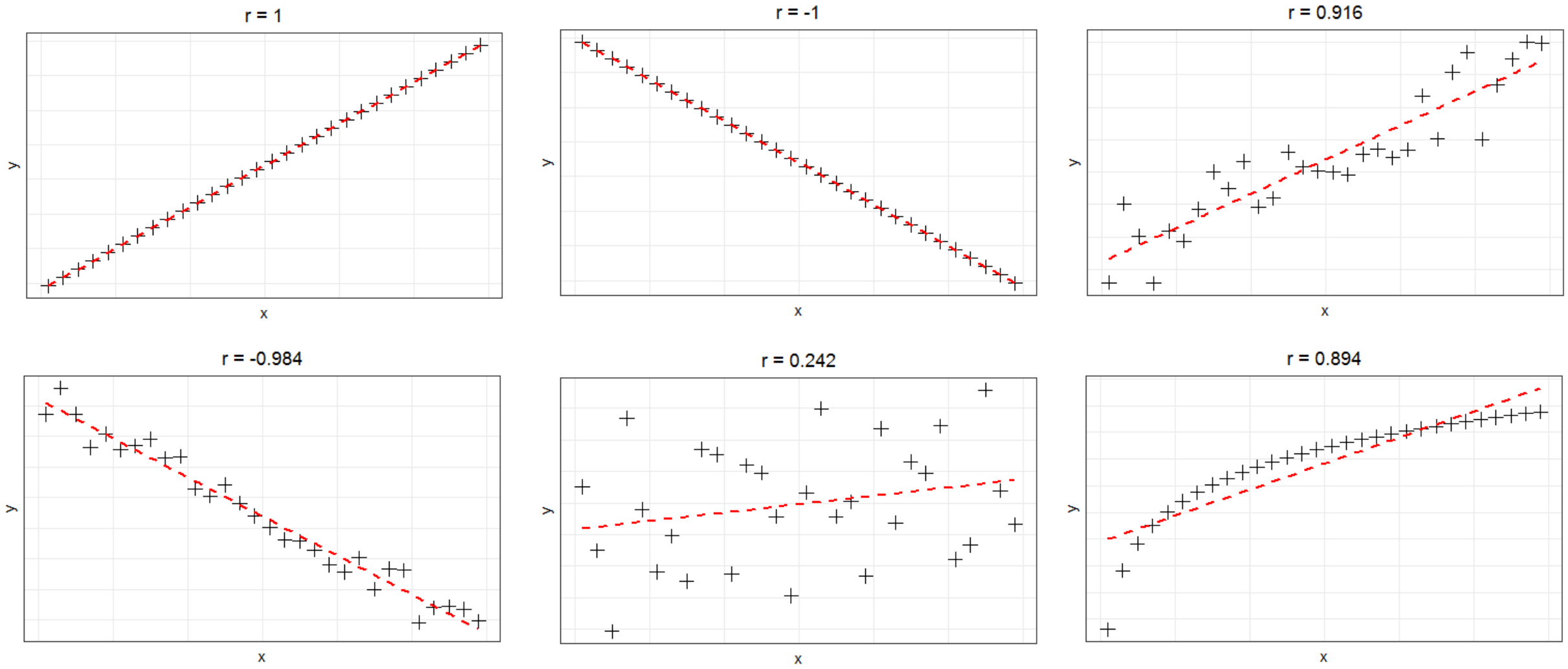
Pearsonův korelační koeficient



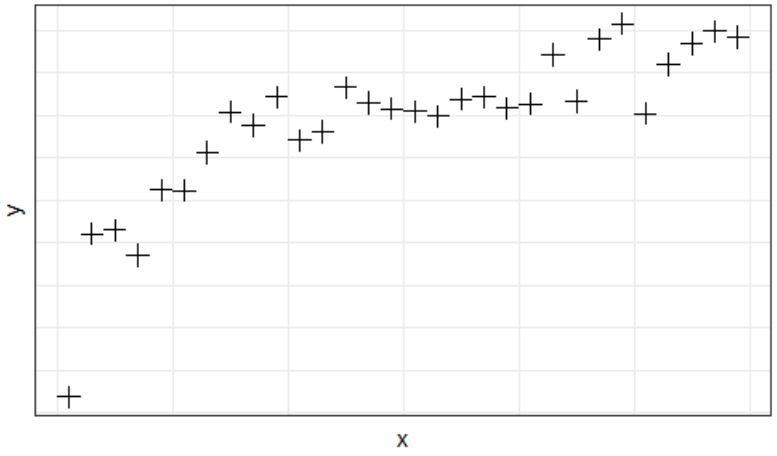
Pearsonův korelační koeficient



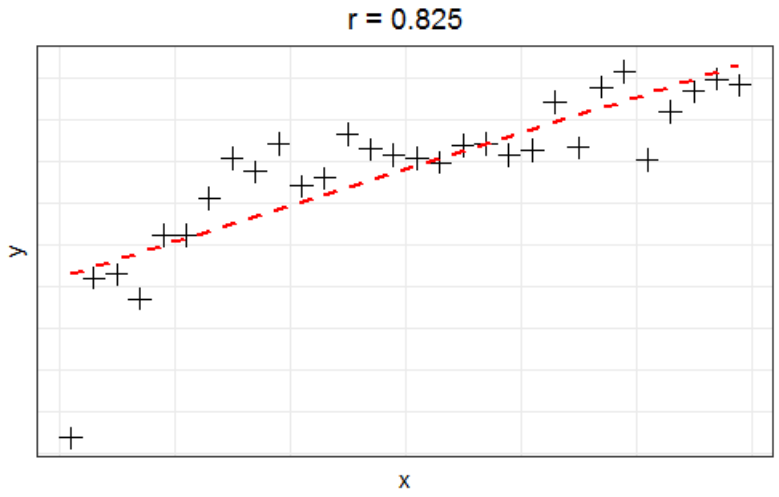
Pearsonův korelační koeficient



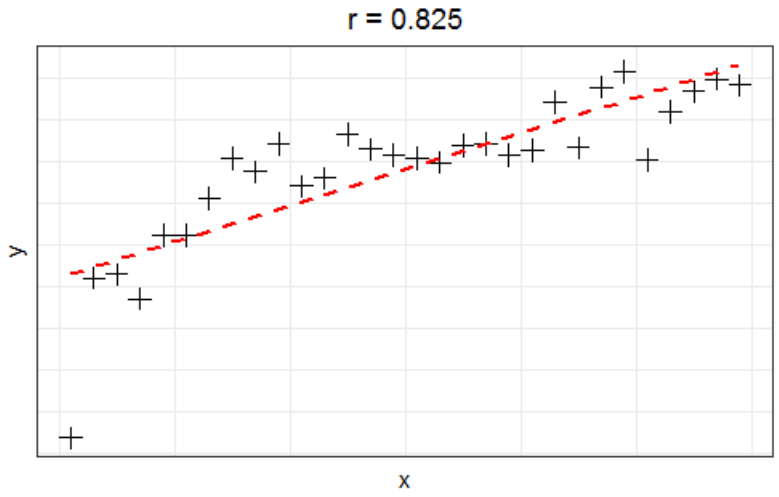
Pearsonův korelační koeficient

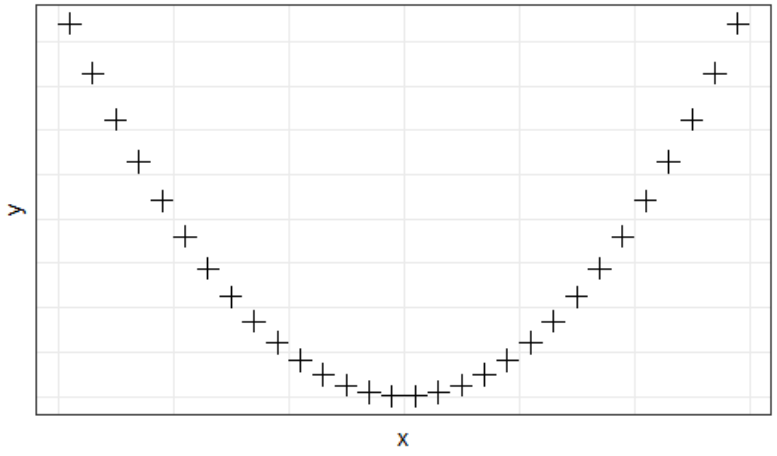


Pearsonův korelační koeficient

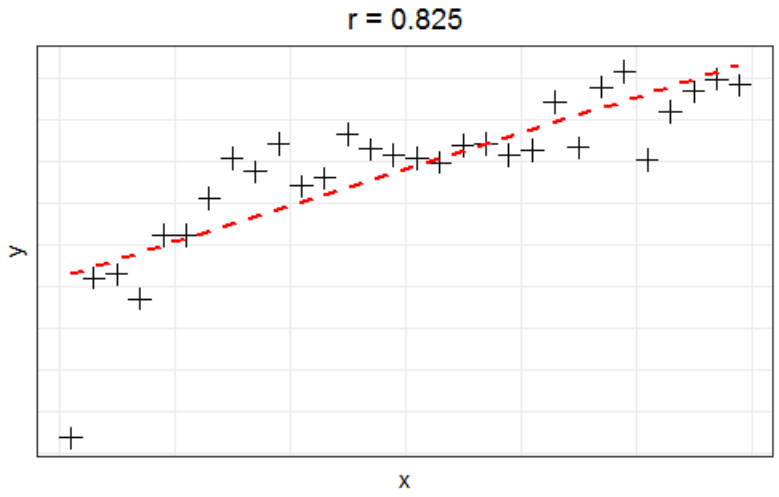


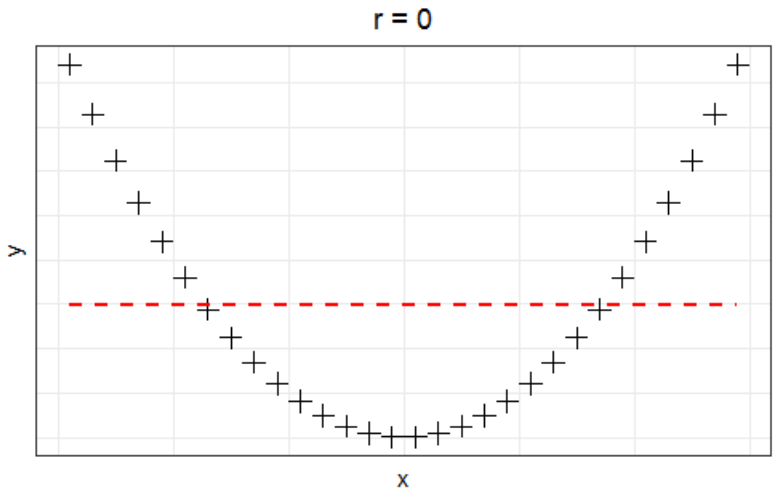
Pearsonův korelační koeficient



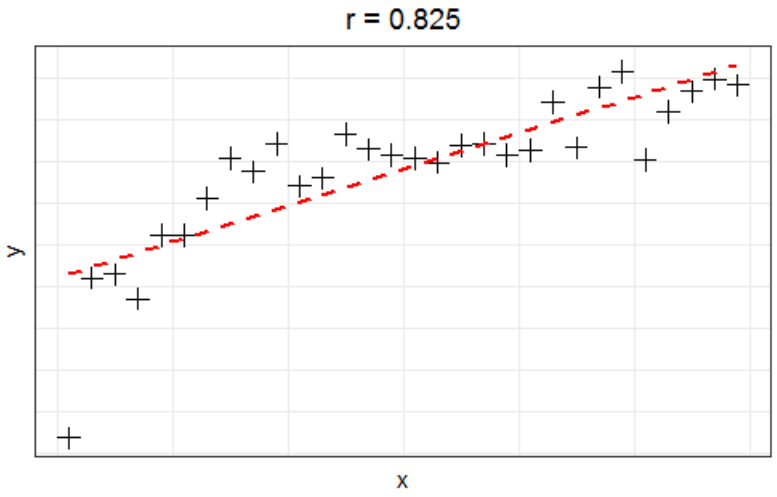


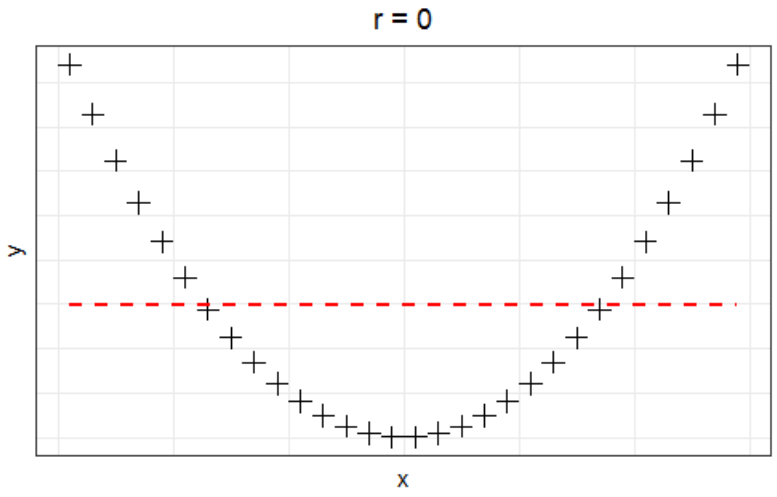
Pearsonův korelační koeficient

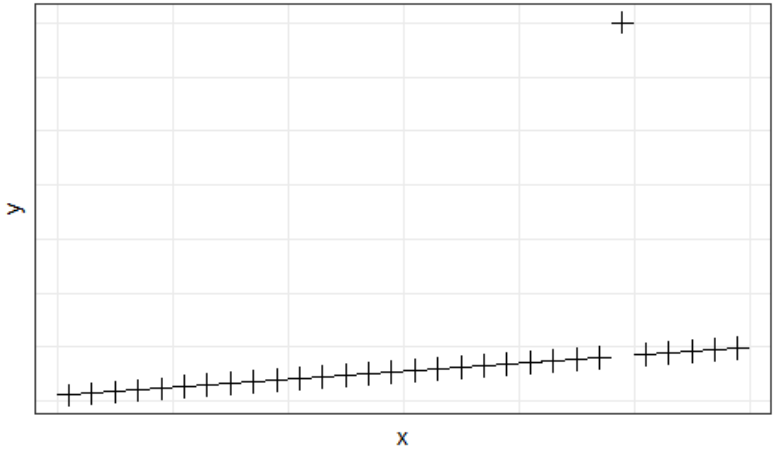




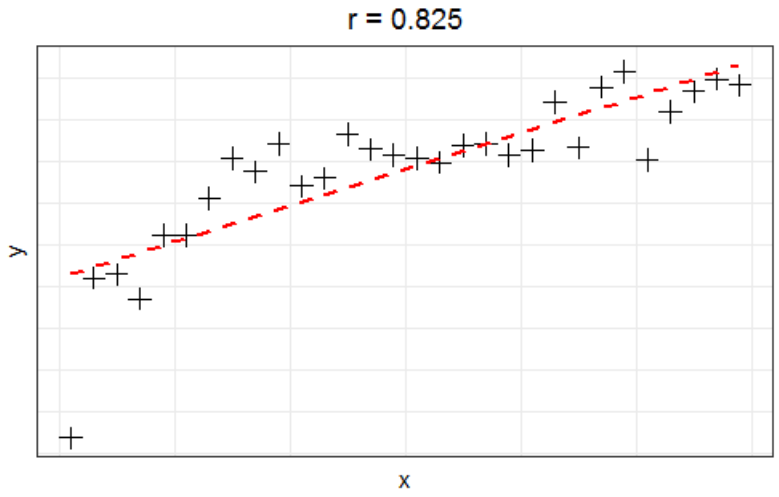
Pearsonův korelační koeficient

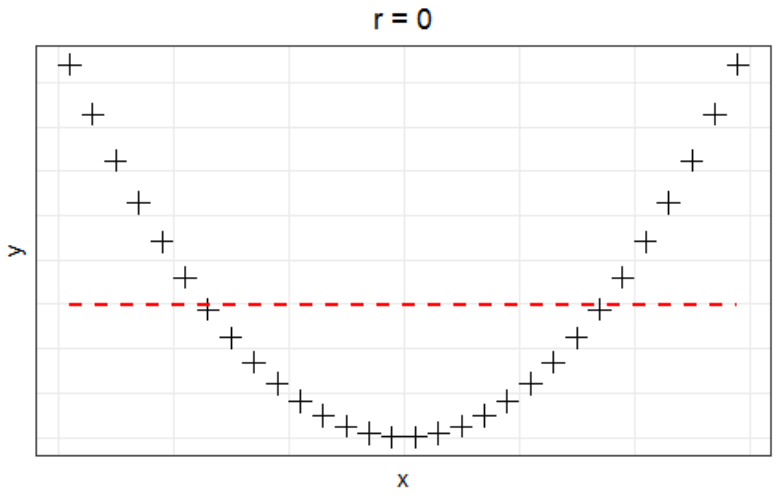


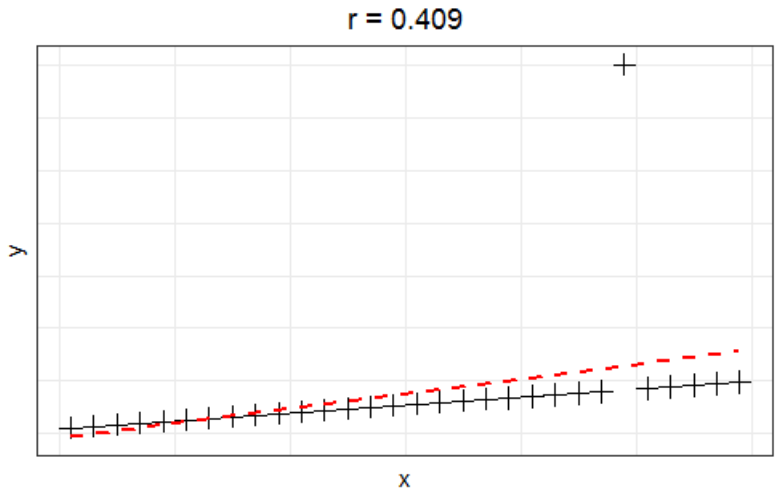




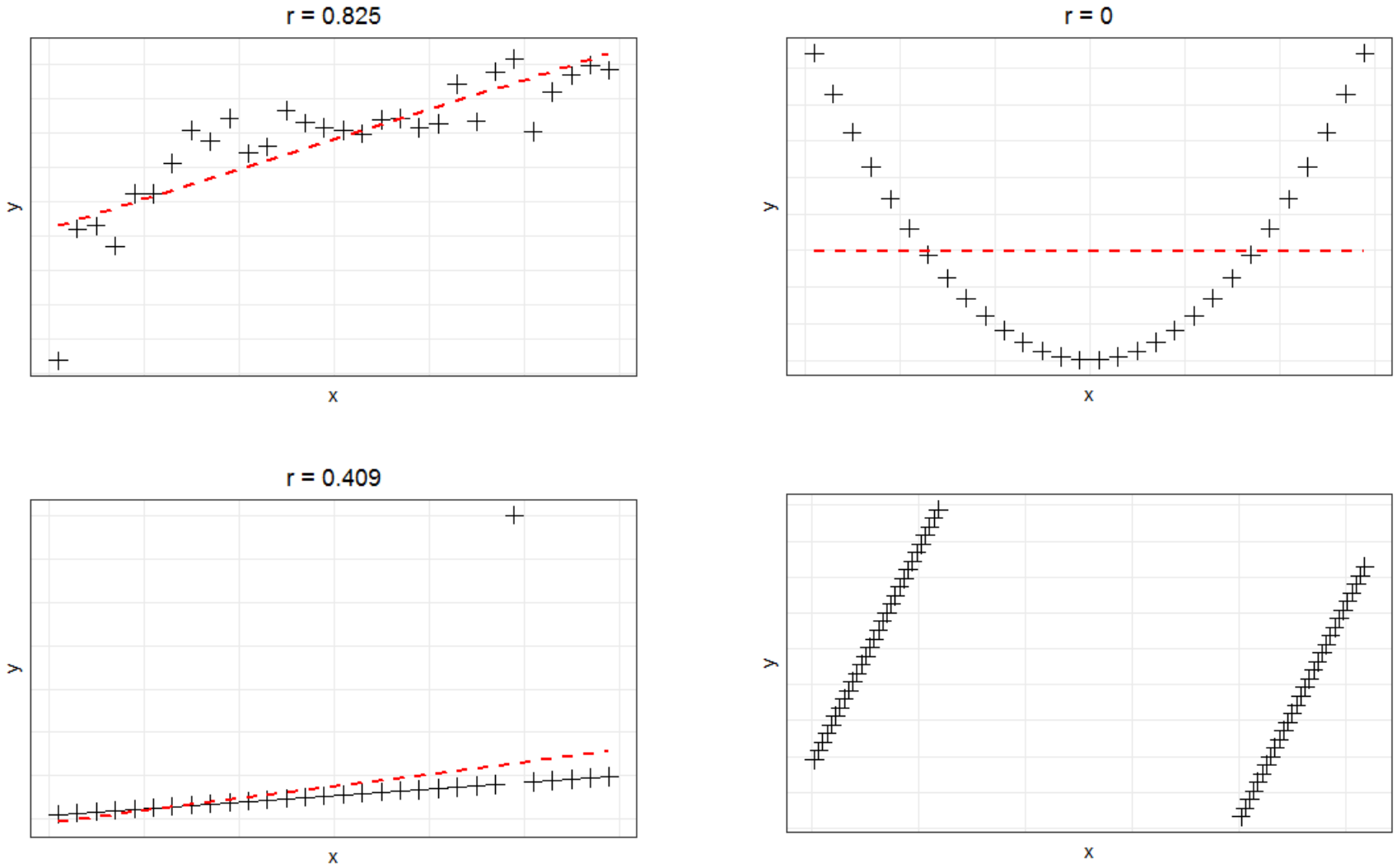
Pearsonův korelační koeficient



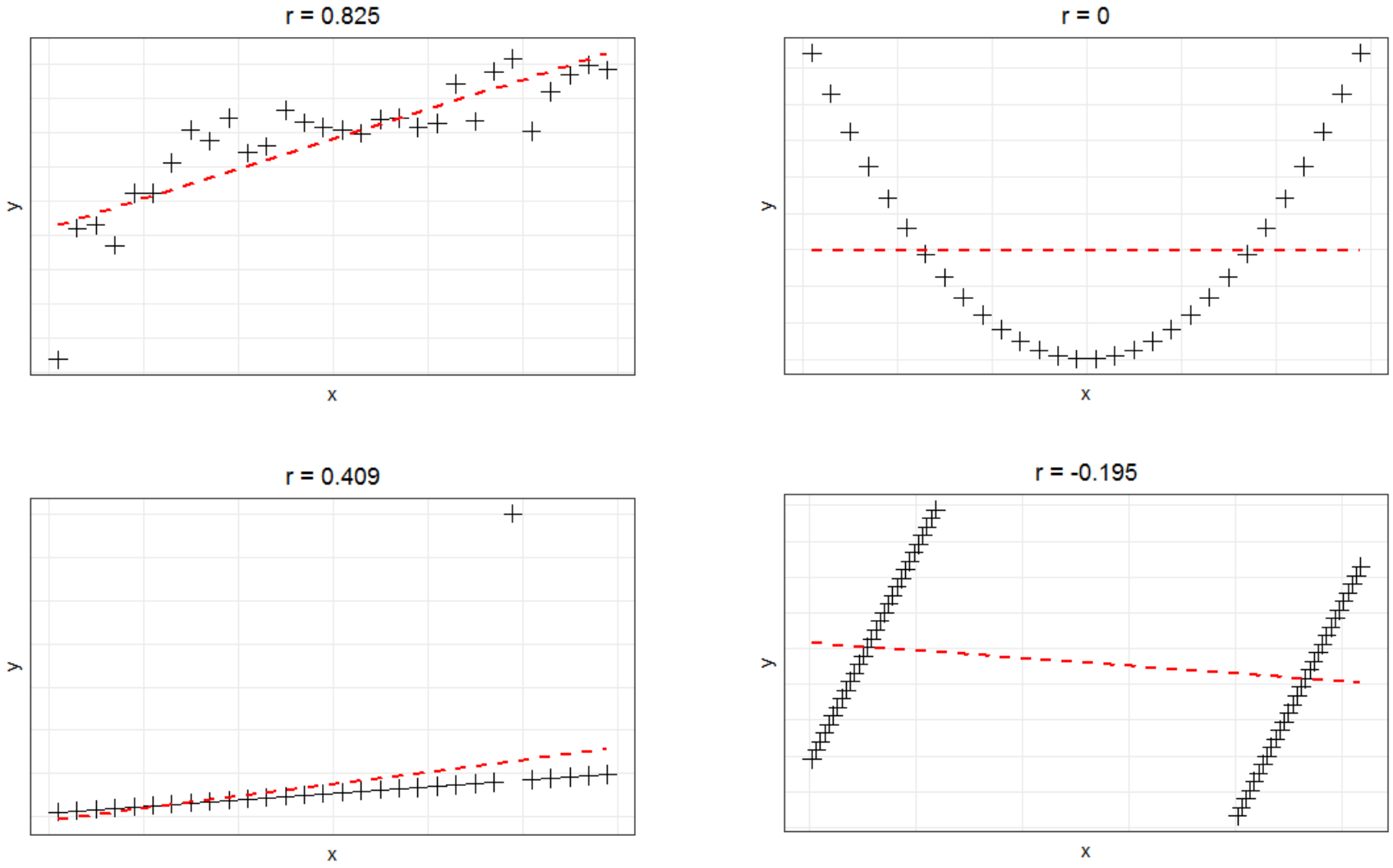




Pearsonův korelační koeficient

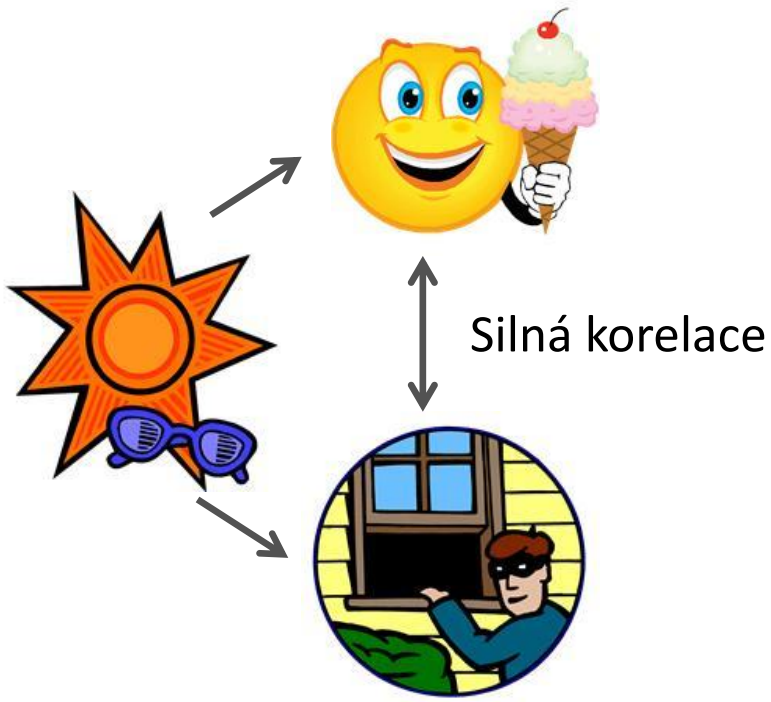


Pearsonův korelační koeficient



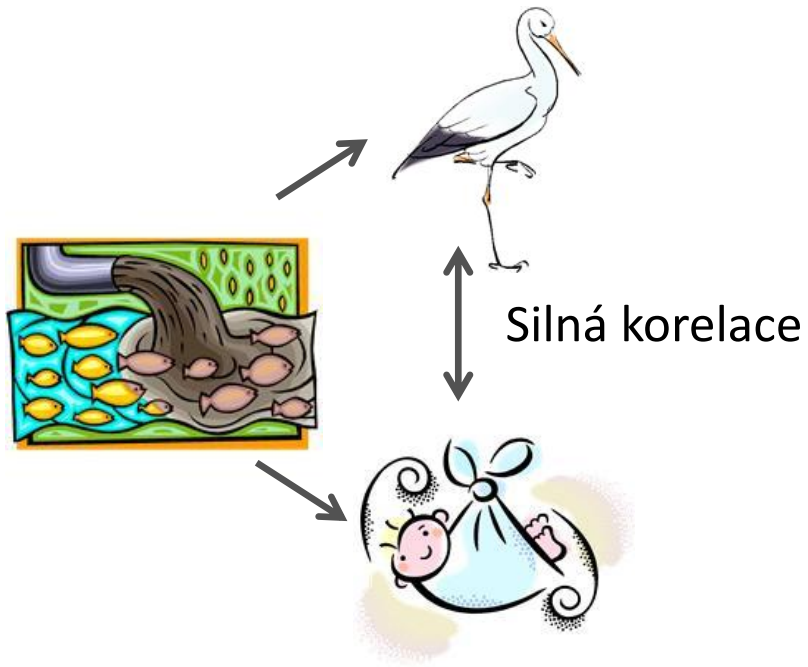
Korelační koeficient

- Pokud jsou dvě náhodné veličiny korelované, znamená to pouze to, že jsou lineárně závislé.
- Nelze z toho však ještě usoudit, že by jedna z nich musela být příčinou a druhá následkem. To samotná korelovanost nedovoluje rozhodnout.



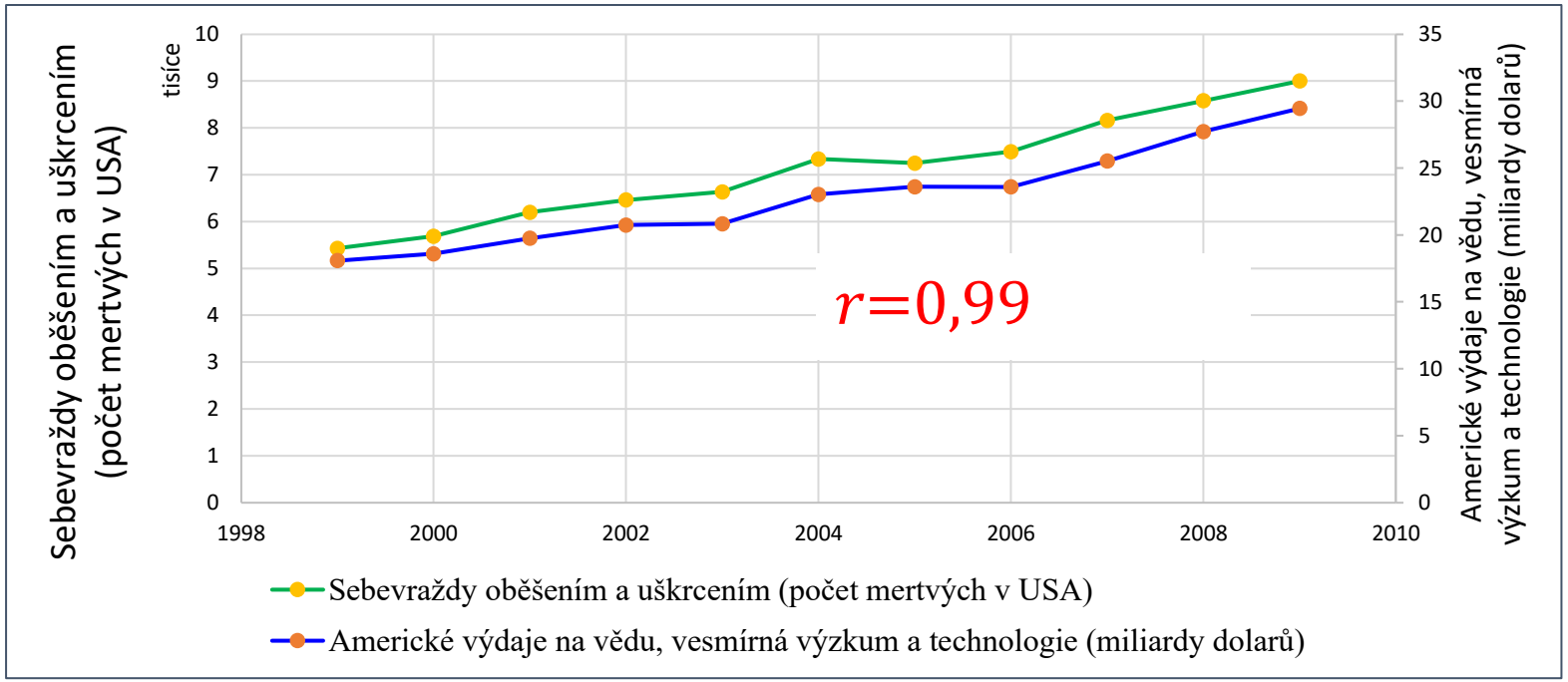
Korelační koeficient

- Pokud jsou dvě náhodné veličiny korelované, znamená to pouze to, že jsou lineárně závislé.
- Nelze z toho však ještě usoudit, že by jedna z nich musela být příčinou a druhá následkem. To samotná korelovanost nedovoluje rozhodnout.



Korelační koeficient

- Pokud jsou dvě náhodné veličiny korelované, znamená to pouze to, že jsou lineárně závislé.
- Nelze z toho však ještě usoudit, že by jedna z nich musela být příčinou a druhá následkem. To samotná korelovanost nedovoluje rozhodnout.



Korelační koeficient

Aktuálně.cz

ZPRÁVY Domácí Zahraničí

ZPRÁVY / ZAHRANIČÍ

K Nobelově ceně dopomáhá čokoláda, naznačuje studie

12. 10. 2012 10:36 AKTUALIZOVÁNO

Mezi počtem nobelistů v přepočtu na obyvatele a konzumaci čokolády je souvislost

New York - Počet nositelů Nobelovy ceny v přepočtu na jednoho obyvatele se v jednotlivých zemích odvíjí od spotřeby čokolády.

To není úryvek z reklamy na sladkosti, ale závěr studie publikované v jednom z nejprestižnějších světových lékařských časopisů New England Journal of Medicine.

Nejvíce laureátů Nobelovy ceny mají Švýcaři, kteří jsou zároveň největšími jedlíky oblíbené sladké pochutiny.

Zdroj: http://zpravy.aktualne.cz/zahranici/k-nobelove-cene-dopomaha-cokolada-naznacuje-studie/r~i:article:760147/

Odhad korelačního koeficientu

V praxi se zpravidla hodnota korelačního koeficientu interpretuje takto:

Korelační koeficient	**Typ lineární závislosti**
$\lvert r\rvert = 0{,}0$	neexistující
$\lvert r\rvert \in (0{,}0; 0{,}3\rangle$	velmi slabá
$\lvert r\rvert \in (0{,}3; 0{,}7\rangle$	středně silná
$\lvert r\rvert \in (0{,}7; 1{,}0)$	těsná
$\lvert r\rvert = 1{,}0$	funkční

- Mezi proudem a napětím na odporu byl zjištěn korelační koeficient 0,6.
- Mezi školním prospěchem a pocitem deprese u dětí byl zjištěn korelační koeficient 0,6.

Výsledky interpretujte!

Korelační matice

Korelační matice

$$cor(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \rho(X,X) & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & \rho(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(X,Y) & 1 \end{pmatrix}$$

Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Při popisu náhodného vektoru rozlišujeme následující typy číselných charakteristik:

- sdružené,
- marginální,
- podmíněné.

Marginální číselné charakteristiky

- Shrnují informaci o jednotlivých složkách náhodného vektoru $(X, Y)^T$, tj. o náhodných veličinách X a Y.

- Popisují polohu (střední hodnota), variabilitu (rozptyl, směrodatná odchylka), šikmost (šikmost) a špičatost (špičatost) rozdělení.

(viz Přednáška 2: Jak modeloat výsledky náhodných pokusů?)

Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Číselné charakteristiky náhodného vektoru jsou vektory, jejichž složky tvoří příslušné číselné charakteristiky jednotlivých náhodných veličin.

Je-li $\boldsymbol{X} = (X, Y)^T$ náhodný vektor, pak

- střední hodnota náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ je dána jako $E\boldsymbol{X} = (EX, EY)^T$,
- rozptyl náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ je dán jako $D\boldsymbol{X} = (DX, DY)^T$.

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

h) Určete korelační koeficient $\rho(X_{Si}; X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$$\rho(X_{Si}; X_{St}) = \frac{cov(X_{Si}; X_{St})}{\sigma_{X_{Si}} \cdot \sigma_{X_{St}}} = \frac{E(X_{Si} \cdot X_{St}) - E(X_{Si}) \cdot E(X_{St})}{\sigma_{X_{Si}} \cdot \sigma_{X_{St}}}$$

$$E(X_{Si} \cdot X_{St}) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}06 = 0{,}06$$

$$E(X_{Si}) = 1 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}20$$
$$E(X_{St}) = 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}60$$

$$E(X_{Si}^2) = 1^2 \cdot 0{,}18 + 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}22$$
$$E(X_{St}^2) = 1^2 \cdot 0{,}42 + 2^2 \cdot 0{,}09 = 0,78$$

$$D(X_{Si}) = 0{,}22 - 0{,}20^2 = 0{,}18$$
$$D(X_{Si}) = 0{,}78 - 0{,}60^2 = 0{,}42$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

h) Určete korelační koeficient $\rho(X_{Si}; X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$$E(X_{Si} \cdot X_{St}) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}06 = 0{,}06$$

$$E(X_{Si}) = 1 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}20$$
$$E(X_{St}) = 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}60$$

$$E(X_{Si}^2) = 1^2 \cdot 0{,}18 + 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}22$$
$$E(X_{St}^2) = 1^2 \cdot 0{,}42 + 2^2 \cdot 0{,}09 = 0,78$$

$$D(X_{Si}) = 0{,}22 - 0{,}20^2 = 0{,}18$$
$$D(X_{Si}) = 0{,}78 - 0{,}60^2 = 0{,}42$$

$$\rho(X_{Si}; X_{St}) = \frac{cov(X_{Si}; X_{St})}{\sigma_{X_{Si}} \cdot \sigma_{X_{St}}} = \frac{E(X_{Si} \cdot X_{St}) - E(X_{Si}) \cdot E(X_{St})}{\sigma_{X_{Si}} \cdot \sigma_{X_{St}}} = \frac{0{,}06 - 0{,}20 \cdot 0{,}60}{\sqrt{0{,}18 \cdot 0{,}42}}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

h) Určete korelační koeficient $\rho(X_{Si}; X_{St})$.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$$E(X_{Si} \cdot X_{St}) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}06 = 0{,}06$$

$$E(X_{Si}) = 1 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}20$$
$$E(X_{St}) = 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}60$$

$$E\left(X_{Si}^2\right) = 1^2 \cdot 0{,}18 + 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}22$$
$$E\left(X_{St}^2\right) = 1^2 \cdot 0{,}42 + 2^2 \cdot 0{,}09 = 0,78$$

$$D(X_{Si}) = 0{,}22 - 0{,}20^2 = 0{,}18$$
$$D(X_{Si}) = 0{,}78 - 0{,}60^2 = 0{,}42$$

$$\rho(X_{Si}; X_{St}) \cong \mathbf{-0,218}$$

Mezi počtem silně a středně deformovaných bitů mezi dvěma bity je středně silná negativní korelace.

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

i) Určete střední hodnotu náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$E(\boldsymbol{X}) = \left(E(X_{Si}); E(X_{St})\right)^T$$

$$E(X_{Si}) = 0{,}20$$

$$E(X_{St}) = 0{,}60$$

Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Při popisu náhodného vektoru rozlišujeme následující typy číselných charakteristik:

- sdružené,
- marginální,
- podmíněné.

Podmíněné číselné charakteristiky náhodného vektoru

Charakteristiky náhodné veličiny X za podmínky, že náhodná veličina Y nabyla určité hodnoty:

Podmíněná střední hodnota $E(X|Y=y) = E(X|y)$

Diskrétní náhodný vektor: $E(X|y) = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i|y),\ i \geq 1\,.$

Spojitý náhodný vektor: $E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)dx.$

Podmíněný rozptyl $D(X|Y=y) = D(X|y)$

Diskrétní náhodný vektor: $D(X|y) = \sum_{(i)} \left(x_i - E(X|y)\right)^2 \cdot P(x_i|y),\ i \geq 1$

Spojitý náhodný vektor: $D(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X|y)\right)^2 \cdot f(x|y)dx$

Podmíněné číselné charakteristiky náhodného vektoru

Charakteristiky náhodné veličiny Y za podmínky, že náhodná veličina X nabyla určité hodnoty:

Podmíněná střední hodnota $E(Y|X = x) = E(Y|x)$

Diskrétní náhodný vektor: $E(Y|x) = \sum_{(i)} y_i \cdot P(y_i|x),\ i \geq 1\,.$

Spojitý náhodný vektor: $E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)dx.$

Podmíněný rozptyl $D(Y|X = x) = D(Y|x)$

Diskrétní náhodný vektor: $D(Y|x) = \sum_{(i)} \left(y_i - E(Y|x)\right)^2 \cdot P(y_i|x),\ i \geq 1$

Spojitý náhodný vektor: $D(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - E(Y|x)\right)^2 \cdot f(y|x)dx$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

j) Určete podmíněnou střední hodnotu $E(X_{Si}|X_{St} = 1)$, tj. střední hodnotu počtu bitů se silnou deformaci víte-li, že 1 bit měl deformaci střední.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$$E(X_{Si}|X_{St} = 1) = \sum_{x_{Si}=0}^{2} x_{Si} \cdot P(X_{Si} = x_{Si}|X_{St} = 1) = 0 \cdot \frac{36}{42} + 1 \cdot \frac{6}{42} + 2 \cdot 0 = \frac{6}{42} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

Víme-li, že 1 bit měl střední deformaci, pak lze očekávat průměrně $\mathbf{\frac{1}{7}}$ bitu se silnou deformací.

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

k) Určete podmíněný rozptyl $D(X_{Si}|X_{St} = 1)$, tj. rozptyl počtu bitů se silnou deformaci víte-li, že 1 bit měl deformaci střední.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

$$E(X_{Si}|X_{St} = 1) = \sum_{x_{Si}=0}^{2} x_{Si} \cdot P(X_{Si} = x_{Si}|X_{St} = 1) = 0 \cdot \frac{36}{42} + 1 \cdot \frac{6}{42} + 2 \cdot 0 = \frac{6}{42} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

$$E\left(X_{Si}^2|X_{St} = 1\right) = \sum_{x_{Si}=0}^{2} x_{Si}^2 \cdot P(X_{Si} = x_{Si}|X_{St} = 1) = 0^2 \cdot \frac{36}{42} + 1^2 \cdot \frac{6}{42} + 2^2 \cdot 0 = \frac{6}{42} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

$$D(X_{Si}|X_{St} = 1) = E\left(X_{Si}^2|X_{St} = 1\right) - \left(E(X_{Si}|X_{St} = 1)\right)^2 = \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \mathbf{\frac{6}{49}}$$

Příklad 1

Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_{Si}, X_{St})^T$ udává počet bitů se silnou (X_{Si}) a střední deformací (X_{St}).

k) Určete podmíněný rozptyl $D(X_{Si}|X_{St} = 1)$, tj. rozptyl počtu bitů se silnou deformaci víte-li, že 1 bit měl deformaci střední.

$X_{Si} \setminus X_{St}$	0	1	2	$\boldsymbol{P(x_{Si})}$
0	0,36	0,36	0,09	**0,81**
1	0,12	0,06	0,00	**0,18**
2	0,01	0,00	0,00	**0,01**
$\boldsymbol{P(x_{St})}$	$\mathbf{0,49}$	$\mathbf{0,42}$	$\mathbf{0,09}$	**1,00**

Víme-li, že 1 bit měl střední deformaci, pak lze očekávat průměrně $\frac{1}{7}$ bitu se silnou deformací,

rozptyl počtů bitů se střední deformací je $\frac{6}{49}$ bitů^2.

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

h) Určete korelační koeficient $\rho(D; H)$.

i) Určete střední hodnotu náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

j) Určete podmíněnou střední hodnotu $E(D|H = 0{,}25)$, tj. střední hodnotu chyby měření délky, víte-li, že chyba měření hmotnosti byla 0,25g.

k) Určete podmíněný rozptyl $D(D|H = 0{,}25)$, tj. rozptyl chyby měření délky, víte-li, že chyba měření hmotnosti byla 0,25g.

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

h) Určete korelační koeficient $\rho(D; H)$.

D, H jsou nezávislé náhodné veličiny $\Rightarrow$ D, H jsou lin. nezávislé náhodné veličiny $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\rho(D; H) = 0}$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

i) Určete střední hodnotu náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(D), E(H))^T$$

$$E(D) = \int_{-\infty}^{\infty} d \cdot f_D(d) dd = \int_{-0,2}^{0,2} d \cdot 2{,}5 \, dd = 0$$

$$E(H) = \int_{-\infty}^{\infty} h \cdot f_H(h) dh = \int_{-0,5}^{0,5} h \cdot 1 \, dh = 0$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

i) Určete střední hodnotu náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = (E(D); E(H))^T = (\mathbf{0}; \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$$

$$E(D) = \int_{-\infty}^{\infty} d \cdot f_D(d) dd = \int_{-0,2}^{0,2} d \cdot 2{,}5 \, dd = 0$$

$$E(H) = \int_{-\infty}^{\infty} h \cdot f_H(h) dh = \int_{-0,5}^{0,5} h \cdot 1 \, dh = 0$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

j) Určete podmíněnou střední hodnotu $E(D|H = 0{,}25)$, tj. střední hodnotu chyby měření délky, víte-li, že chyba měření hmotnosti byla 0,25g.

D, H jsou nezávislé náhodné veličiny $\Rightarrow \boldsymbol{E(D|H = 0{,}25)} = E(D) = \boldsymbol{0}$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

k) Určete podmíněný rozptyl $D(D|H = 0{,}25)$, tj. rozptyl chyby měření délky, víte-li, že chyba měření hmotnosti byla 0,25g.

D, H jsou nezávislé náhodné veličiny $\Rightarrow \boldsymbol{D(D|H = 0{,}25)} = D(D) = E\left(D^2\right) - \left(E(D)\right)^2$

$$E(D) = 0$$

$$E\left(D^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \cdot f_D(d)dd = \int_{-0{,}2}^{0{,}2} d^2 \cdot 2{,}5\, dd = \frac{1}{75}$$

Příklad 2

Měříme délku a hmotnost vysoustružené součástky. Délku měříme s přesností 0,2 mm a hmotnost s přesností 0,5 g. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (D, H)^T$ udává chybu měření délky (D) v milimetrech a chybu měření hmotnosti (H) v gramech. Náhodný vektor má rovnoměrné sdružené rozdělení (tj. konstantní hustotu na celém definičním oboru).

k) Určete podmíněný rozptyl $D(D|H = 0{,}25)$, tj. rozptyl chyby měření délky, víte-li, že chyba měření hmotnosti byla 0,25g.

D, H jsou nezávislé náhodné veličiny $\Rightarrow \boldsymbol{D(D|H = 0{,}25)} = D(D) = E\left(D^2\right) - \left(E(D)\right)^2 = \frac{1}{75} - 0^2 = \frac{1}{75}$

$E(D) = 0$

$E\left(D^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \cdot f_D(d) dd = \int_{-0{,}2}^{0{,}2} d^2 \cdot 2{,}5\, dd = \frac{1}{75}$

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY