Pravděpodobnost je…

Martina Litschmannová

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Čím se zabývá teorie pravděpodobnosti?

Teorie pravděpodobnosti

- je matematická disciplína popisující zákonitosti týkající se náhodných jevů, tj. jevů, které (přinejmenším z hlediska pozorovatele) mohou a nemusí nastat.

- hledá pravděpodobnosti určitých výsledků (náhodných jevů), známe-li základní soubor (populaci).

Základní pojmy

Pokus – děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně
za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Deterministické pokusy

Za určitých počátečních podmínek
se dostaví vždy stejný výsledek.

X

Náhodné pokusy

Pro určité počáteční podmínky
existuje množina možných výsledků,
přičemž jeden z nich nastane.

Základní pojmy

- **Náhodný pokus** – konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá

- **Náhodný jev** – tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o jehož pravdivosti můžeme po ukončení pokusu rozhodnout
  - obvykle značíme $A, B, X, Y, \ldots$

- **Elementární jev $\boldsymbol{\omega}$** – jednotlivý výsledek náhodného pokusu
  - nelze jej vyjádřit jako sjednocení dvou různých jevů

- **Základní prostor $\boldsymbol{\Omega}$** – množina všech elementárních jevů

Základní pojmy

- **Náhodný pokus** – konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá

hod kostkou
náhodný pokus

Základní pojmy

- **Náhodný pokus** – konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá

- **Náhodný jev** – tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o jehož pravdivosti můžeme po ukončení pokusu rozhodnout
  – obvykle značíme $A, B, X, Y, \ldots$

hod kostkou

náhodný pokus

jev A: padne dvojka

jev B: padne sudé číslo

jev C: padne číslo větší než 3

$\vdots$

náhodné jevy

Základní pojmy

- **Náhodný pokus** – konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá
- **Elementární jev ω** – jednotlivý výsledek náhodného pokusu
  – nelze jej vyjádřit jako sjednocení dvou různých jevů
- **Základní prostor Ω** – množina všech elementárních jevů

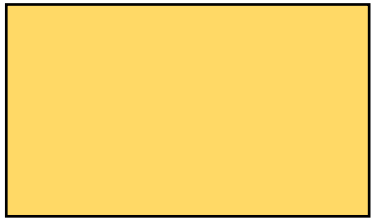
hod kostkou
náhodný pokus

základní prostor:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$,

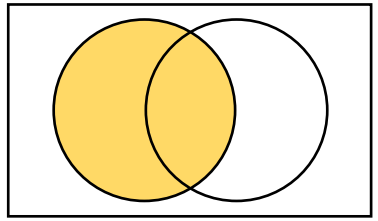
kde:
ω_1: Padne jednička.
ω_2: Padne dvojka.
$\vdots$
ω_6: Padne šestka.

elementární jevy

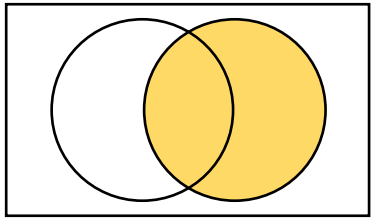
Vybrané vztahy mezi jevy



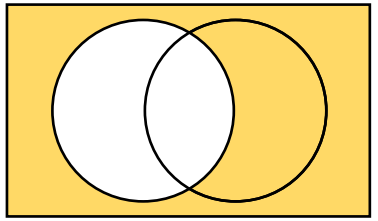
základní prostor Ω



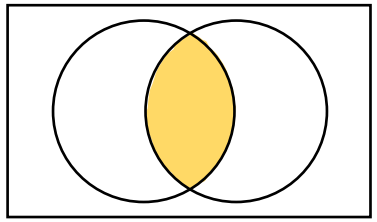
náhodný jev A



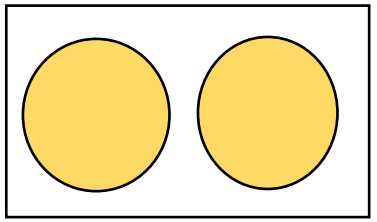
náhodný jev B



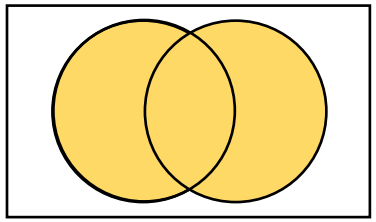
doplněk jevu A
$\bar{A}$



průnik jevů A a B
$A \cap B$



disjunktní jevy
(neslučitelné jevy)

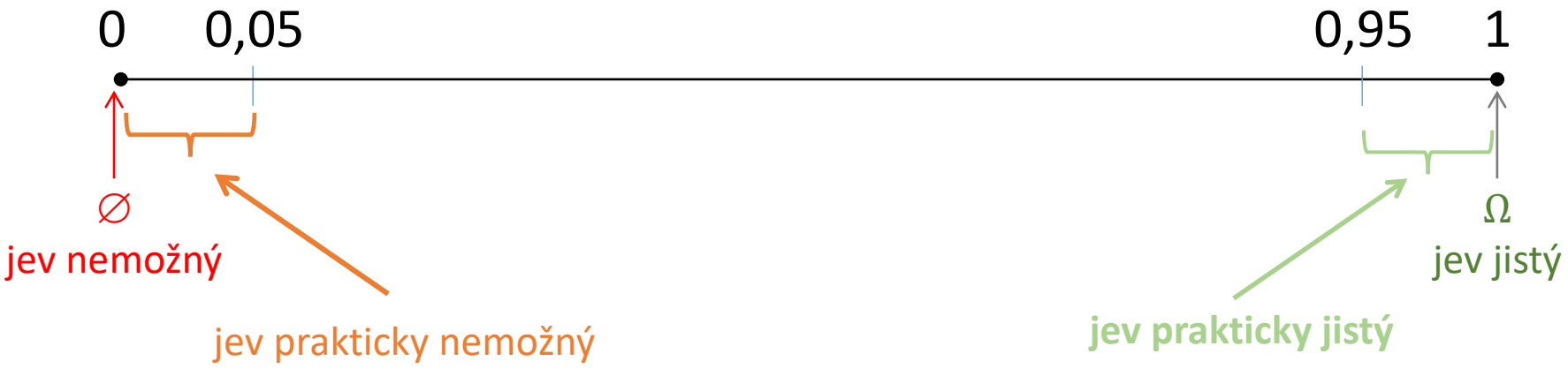


sjednocení jevů A a B
$A \cup B$

Co je to pravděpodobnost?

Číselné vyjádření šance,

že při náhodném pokusu daný jev nastane.



Jak pravděpodobnost definovat?

Počátky teorie pravděpodobnosti – 17. století

Jak rozdělit spravedlivě bank mezi hráče, byla-li série hazardních her ukončena předčasně?

Blaise Pascal (1623 – 1662)

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Počátky teorie pravděpodobnosti – 19. století

„Je pozoruhodné, že věda,
jenž se započala uvažováním
o hazardních hrách, by se měla stát
nejvýznamnějším objektem lidského vědění.”

Pierre Simon de Laplace, začátek 19. století

Klasická definice pravděpodobnosti – Pierre S. Laplace, 1812

- Založena na předpokladu, že náhodný pokus může mít n různých, avšak rovnocenných výsledků.

- Nechť Ω je množina $\boldsymbol{n}$ rovnocenných elementárních jevů.
  Pravděpodobnost jevu A, jenž je složen z $\boldsymbol{m}$ těchto elementárních jevů je:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Mějme „férovou“ hrací kostku. Jaká je pravděpodobnost, že padne „6“?

Označme: A … padne „6“, pak $P(A) = \frac{1}{6}$.

Statistická definice pravděpodobnosti – Richard von Mise, počátek 20. st.

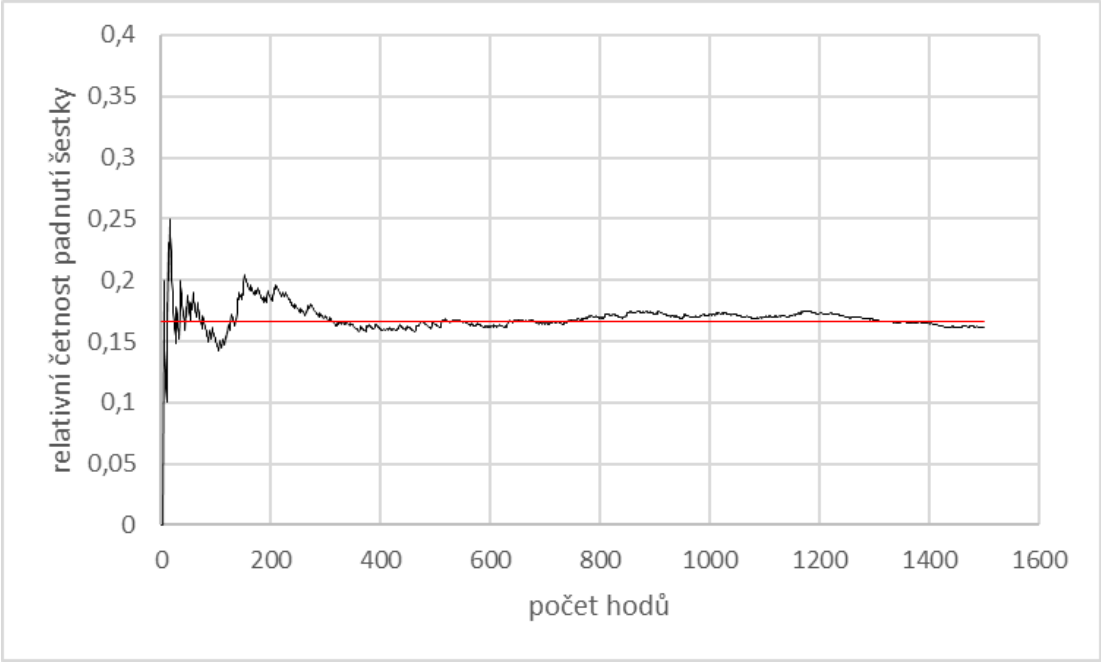
$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Počet realizací pokusu **příznivých** jevu A

Počet **všech** realizací pokusu

Jaká je pravděpodobnost padnutí „6“ na hrací kostce, nevíme-li, zda je tato kostka „férová“?

Statistická definice pravděpodobnosti – Richard von Mise, počátek 20. st.



Na testované kostce odhadujeme (po 1 500 hodech) pravděpodobnost padnutí šestky na 0,161.

Jaká je pravděpodobnost padnutí „6“ na hrací kostce, nevíme-li, zda je tato kostka „férová“?

Geometrická pravděpodobnost

Zobecnění klasické pravděpodobnosti pro případ,
kdy počet všech možných výsledků náhodného pokusu je nespočetný.

V rovině (případně na přímce nebo v prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další uzavřená oblast A. Pravděpodobnost jevu A, který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti A je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Jaká je pravděpodobnost, že meteorit dopadl na pevninu?

Geometrická pravděpodobnost

- celková rozloha Země: 510 066 000 km^2
- celková rozloha pevniny: 148 647 000 km^2

- A… meteorit dopadl na pevninu
- $P(A) = \frac{148\,647\,000}{510\,066\,000} \cong 0{,}291$

- Pravděpodobnost, že meteorit dopadl na pevninu je cca 29,1 %.

Jaká je pravděpodobnost, že meteorit dopadl na pevninu?

Kolmogorovův axiomatický systém – Alexandr N. Kolmogorov, 1933

- Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

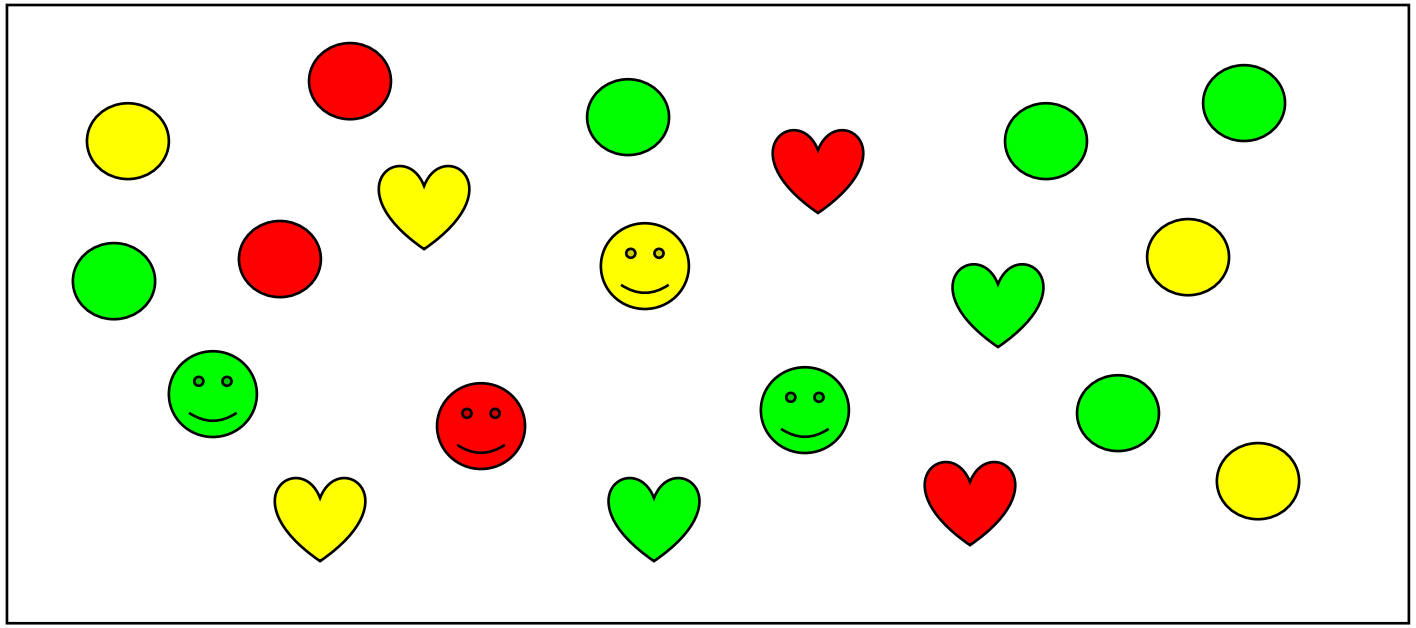
1. Každému jevu A je přiřazena nezáporná pravděpodobnost $P(A)$.
2. Pravděpodobnost jevu jistého je rovna 1.
3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna součtu jejich pravděpodobností. (A to pro každých spočetně mnoho jevů.)

Důsledek:

základní prostor: $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$

$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.

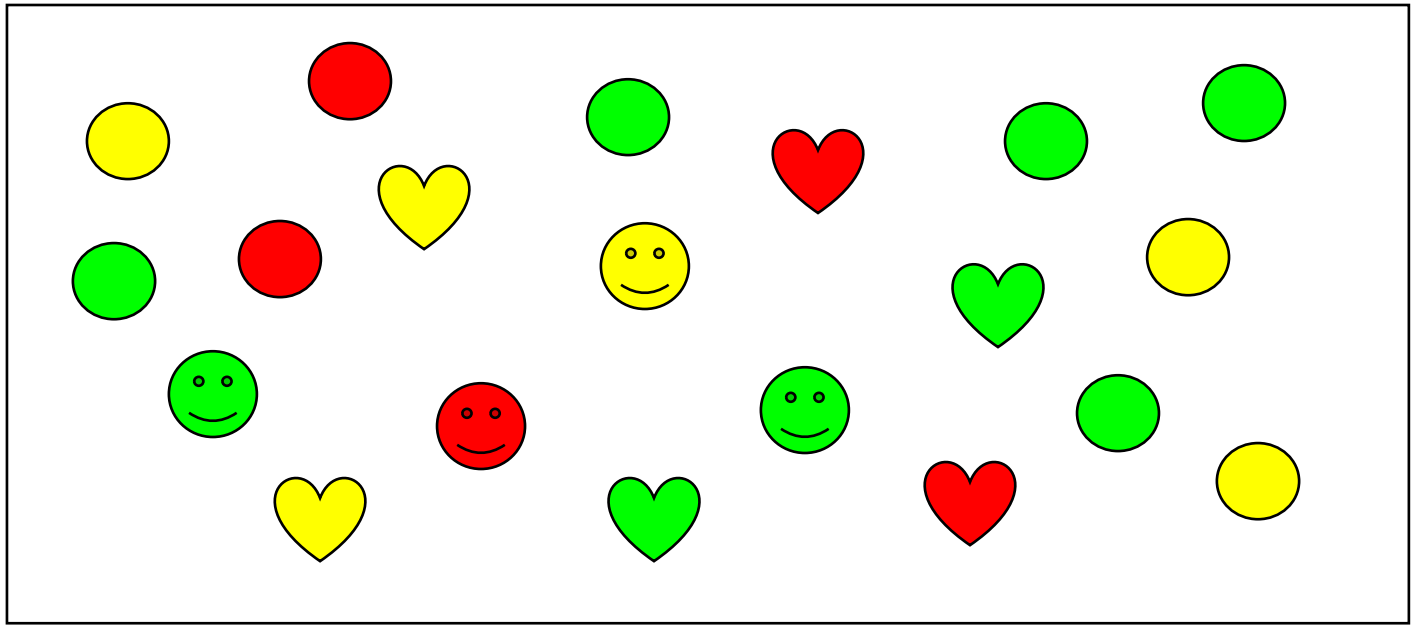


Označme:

C … náhodně vybraný útvar je červený

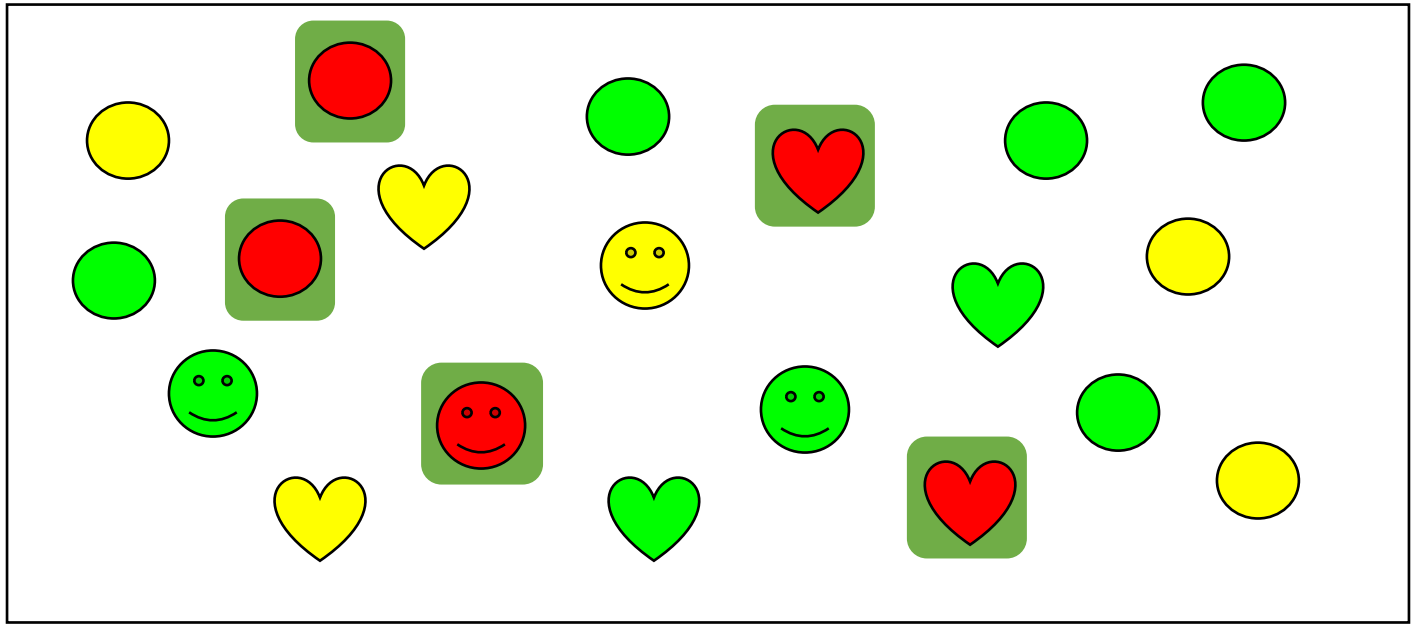
♥… náhodně vybraný útvar je srdíčko

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



a) Určete $P(C)$.

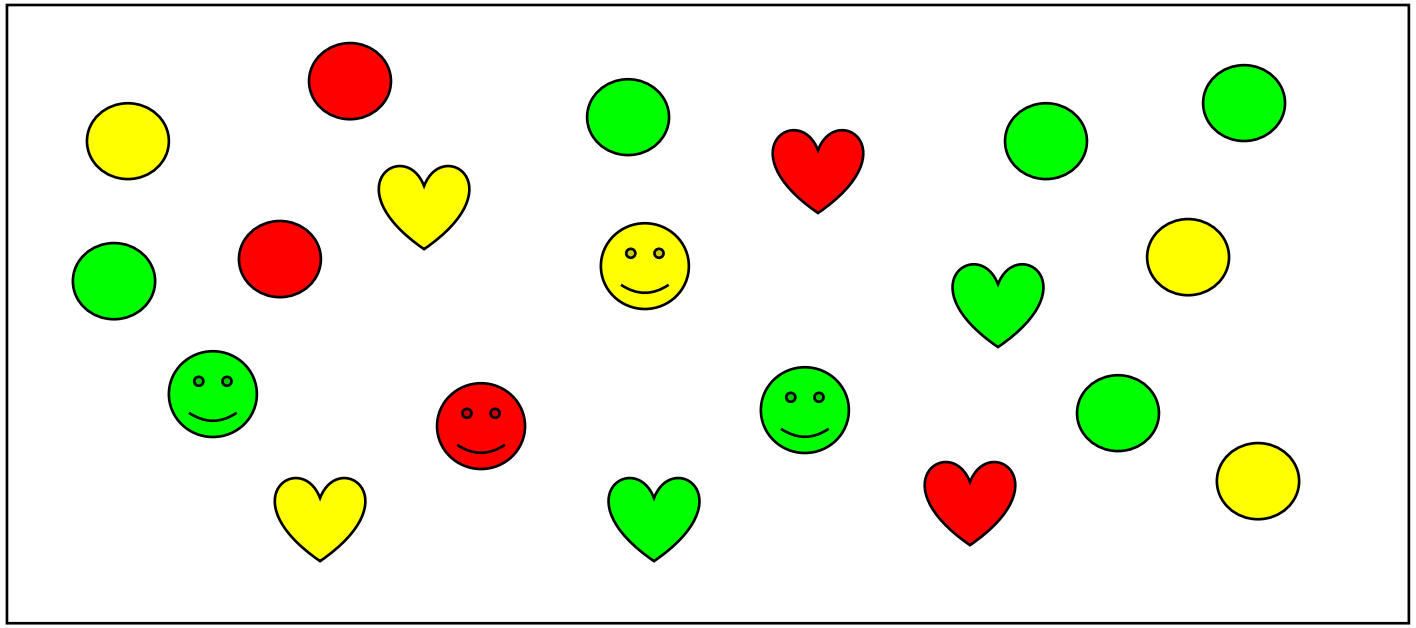
1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



a) Určete $P(C)$.

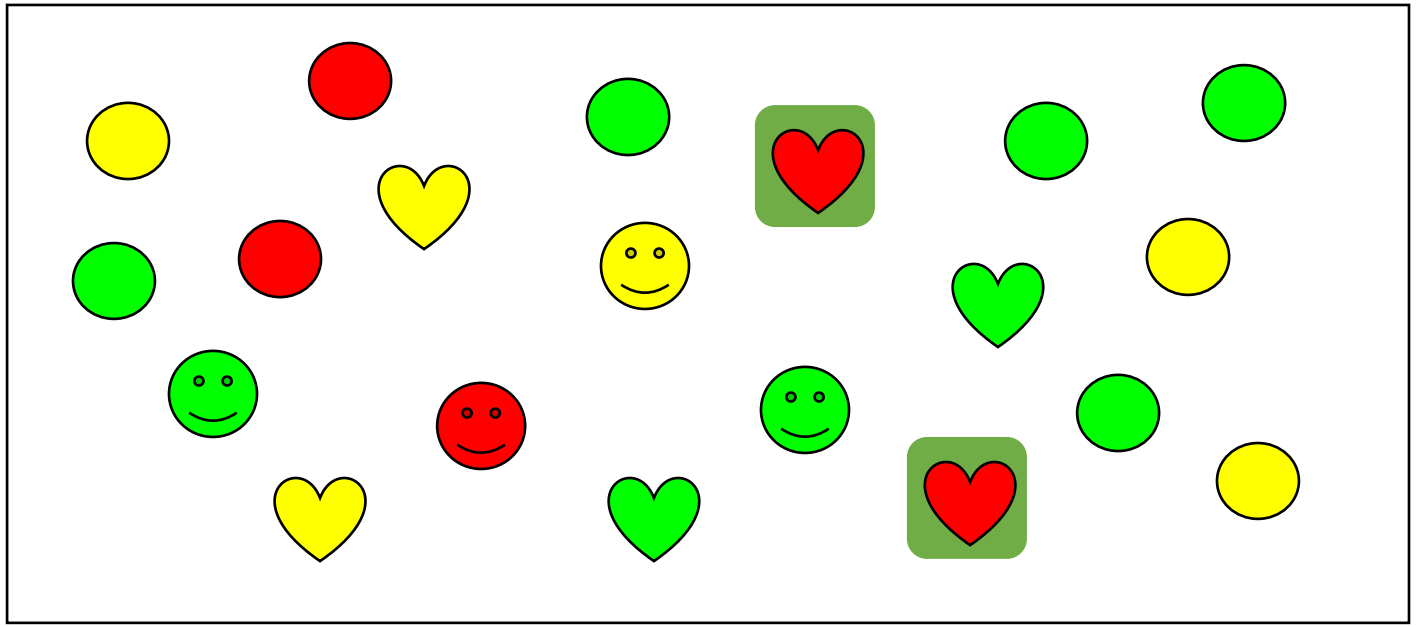
$$P(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



b) Určete $P(C \cap ❤)$.

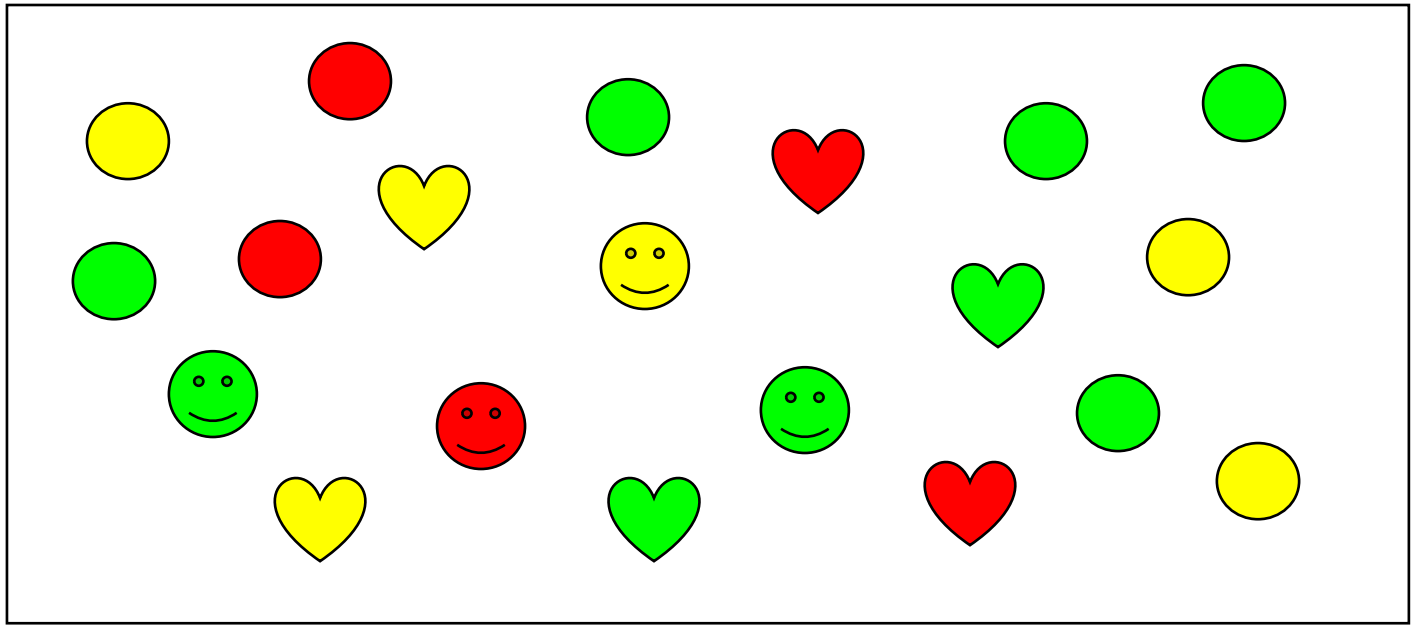
1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



b) Určete $P(C \cap ❤)$.

$$P(C \cap ❤) = \frac{2}{20} = 0{,}10$$

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



c) Určete $P(C|\heartsuit)$.

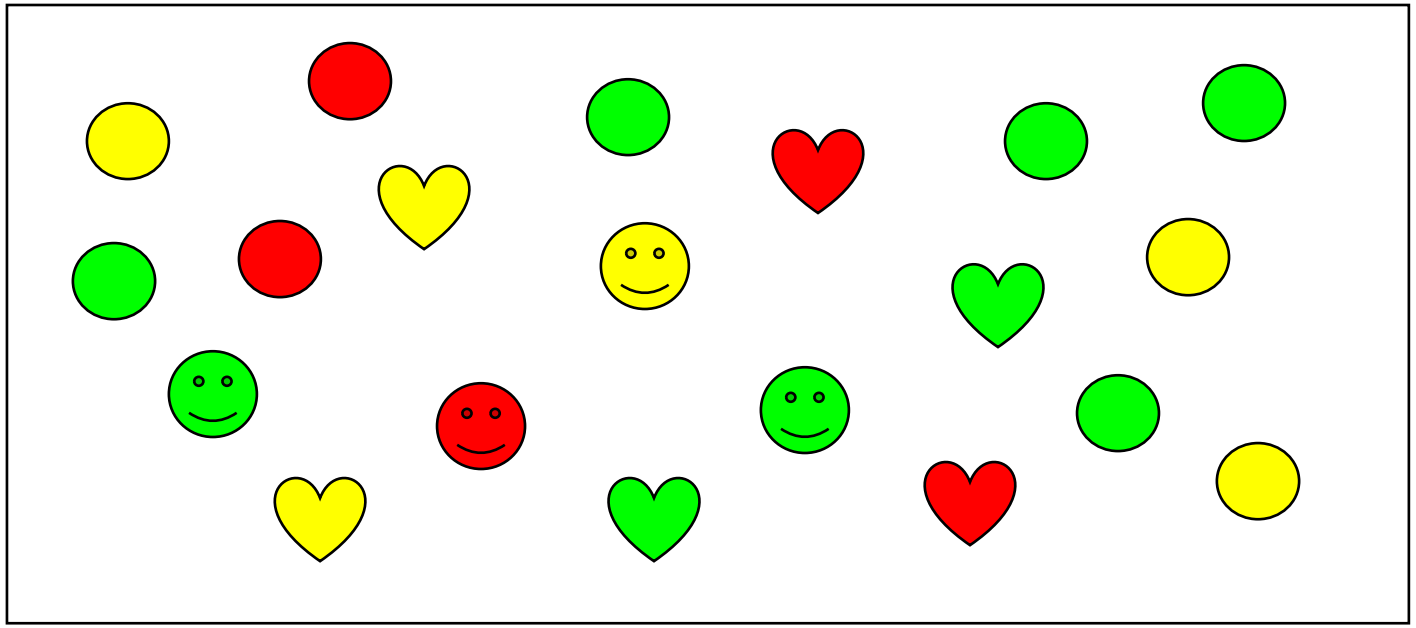
Podmíněná pravděpodobnost

tj. pravděpodobnost jevu, za předpokladu, že nastal určitý jiný jev.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

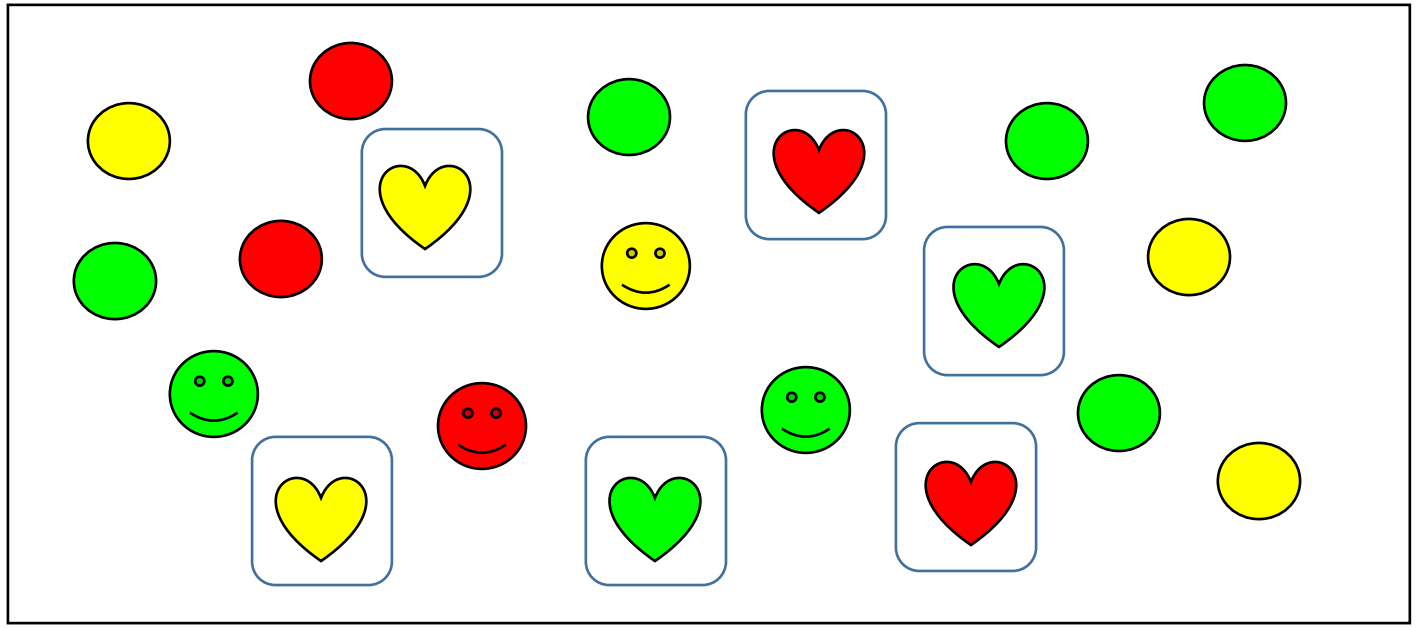
$P(A|B)$ čti „pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B“

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



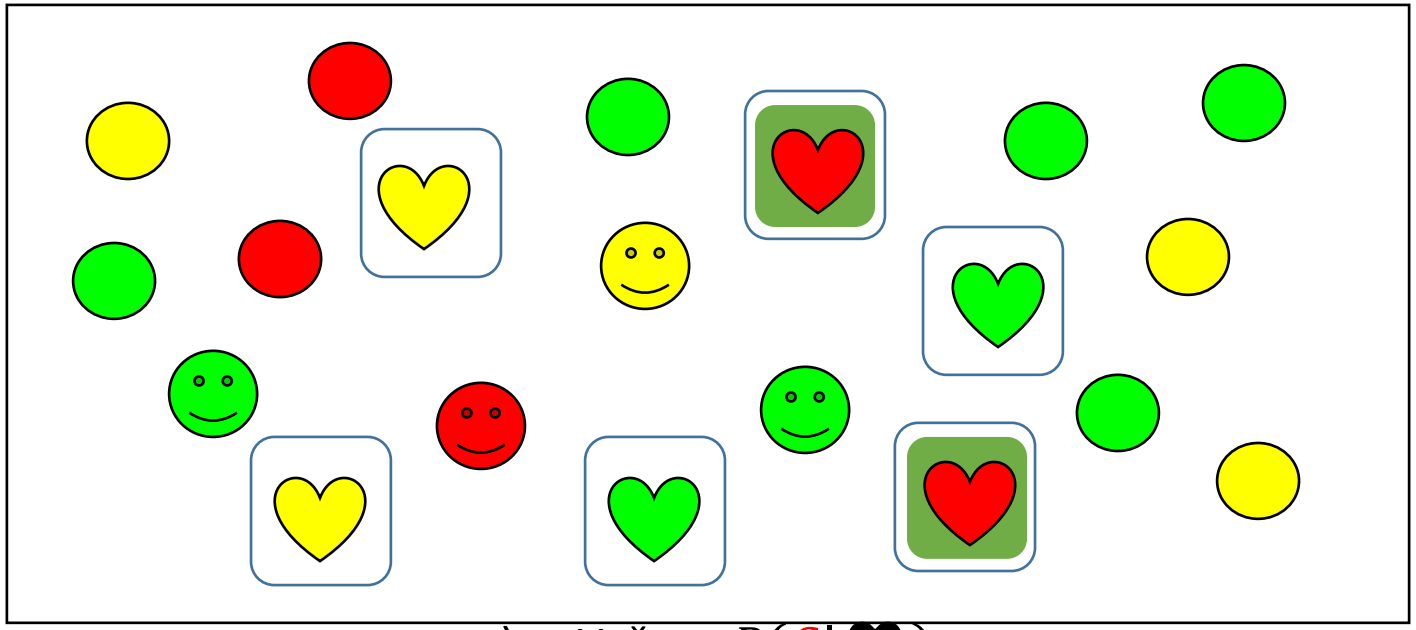
c) Určete $P(C|\heartsuit)$.

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



c) Určete $P(C|\heartsuit)$.

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



c) Určete $P(C|\heartsuit)$.

$$P(C|\heartsuit) = \frac{n_{C\cap\heartsuit}}{n_{\heartsuit}} = \frac{\frac{n_{C\cap\heartsuit}}{n}}{\frac{n_{\heartsuit}}{n}} = \frac{P(C\cap\heartsuit)}{P(\heartsuit)} = \mathbf{\frac{2}{6}}$$

Podmíněná pravděpodobnost

tj. pravděpodobnost jevu, za předpokladu, že nastal určitý jiný jev.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

$P(A|B)$ čti „pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B“

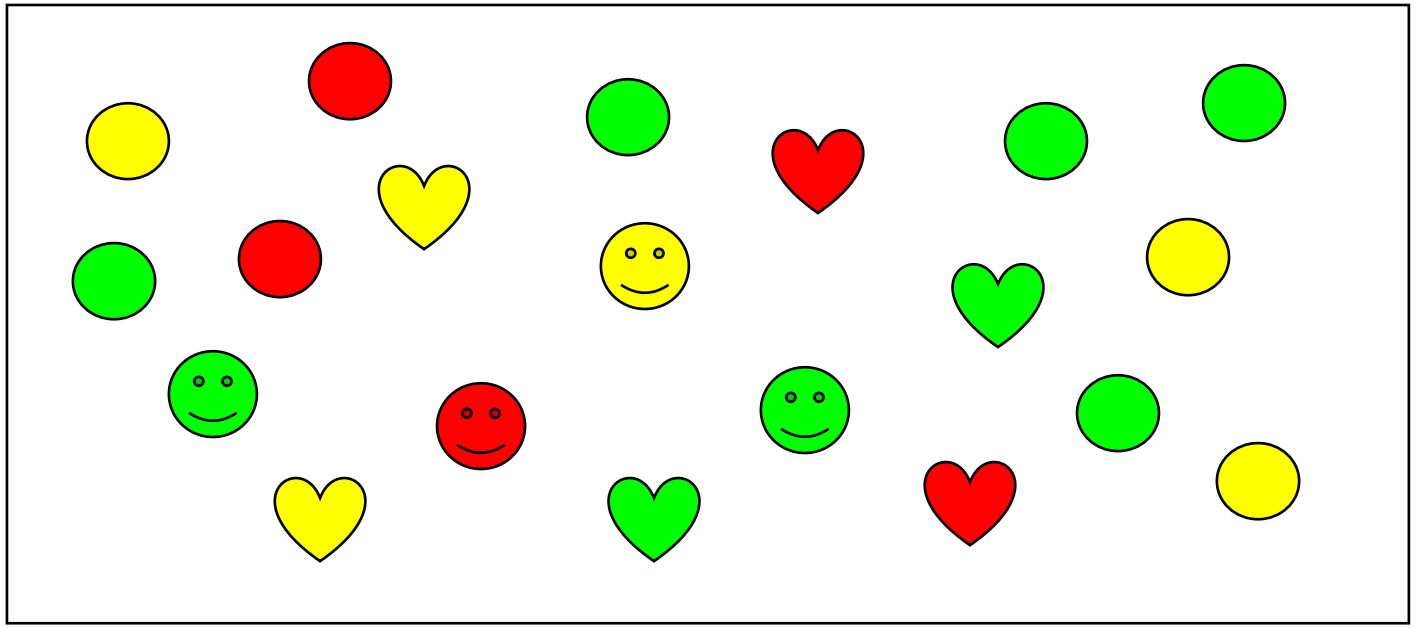
Jevy A a B jsou nezávislé,

jestliže pravděpodobnost jednoho jevu nezávisí na nastoupení jevu druhého, tedy:

$P(A) = P(A|B)$ a současně $P(B) = P(B|A)$.

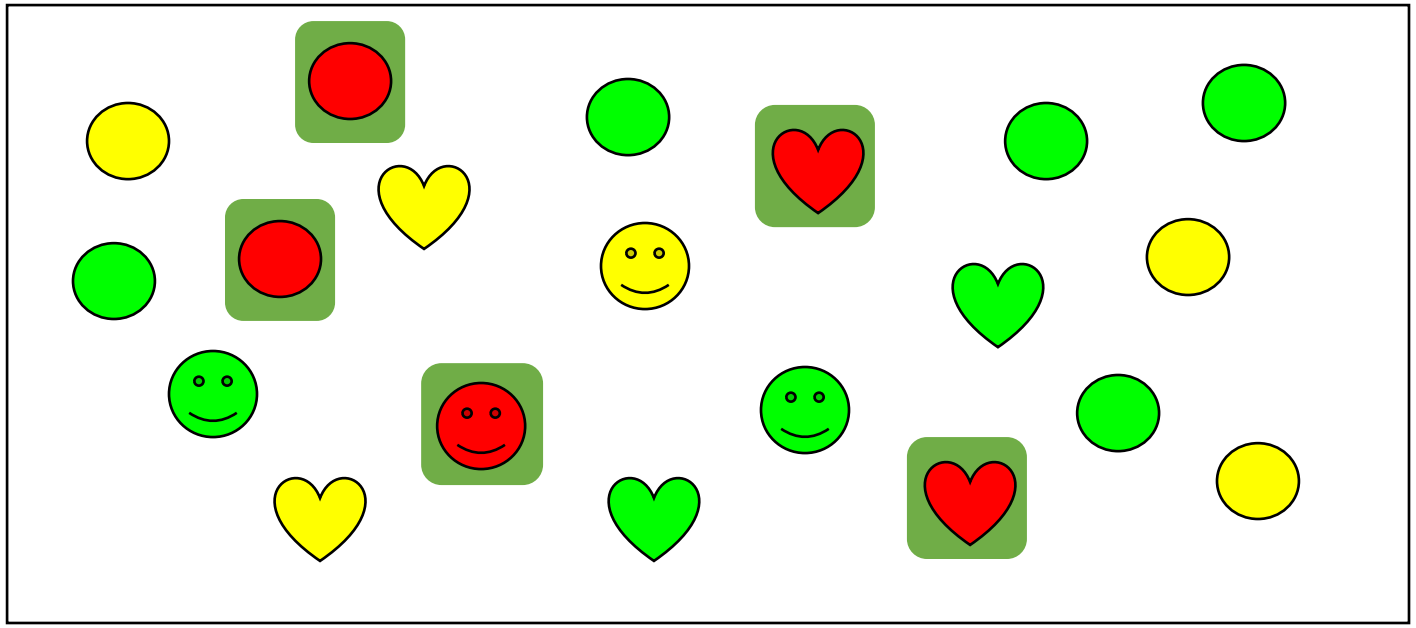
V opačném případě říkáme, že jevy A a B jsou závislé.

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



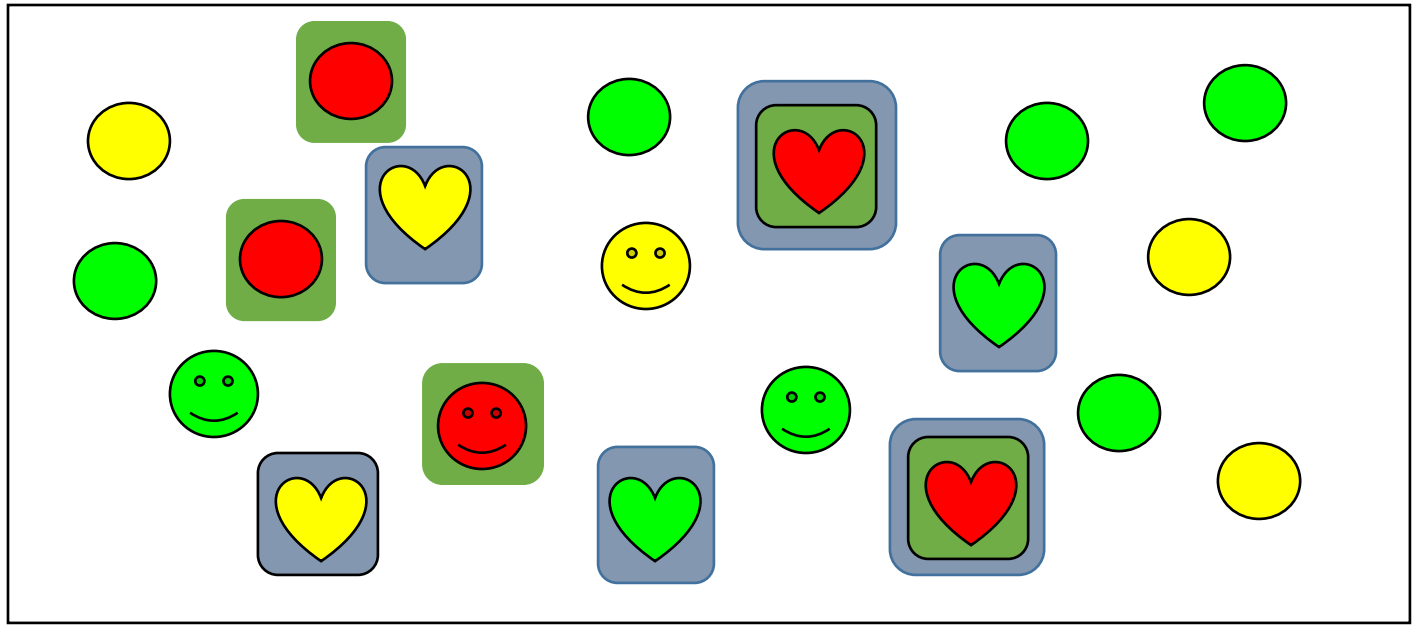
d) Určete $P(C \cup ❤)$.

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



d) Určete $P(C \cup ❤)$.

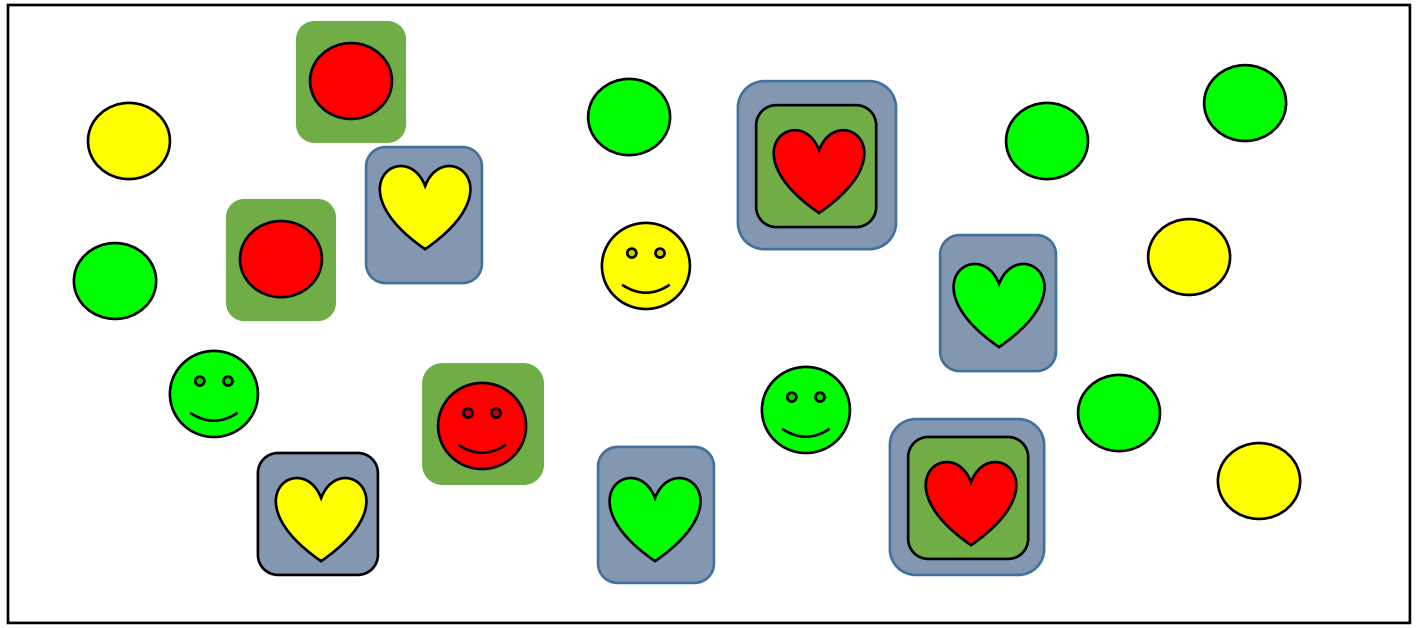
1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



d) Určete $P(C \cup ❤)$.

$$P(C \cup ❤) = \frac{5+6-2}{20} = \frac{9}{20}$$

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



d) Určete $P(C \cup ❤)$.

$$P(C \cup ❤) = \frac{n_C + n_{❤} - n_{C \cap ❤}}{n} = P(C) + P(❤) - P(C \cap ❤)$$

Vybrané vlastnosti pravděpodobnosti

Nechť množina Ω obsahuje n elementárních jevů, nechť P je pravděpodobnost na této množině, A a B jevy. Potom platí :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - A, B … **disjunktní jevy** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

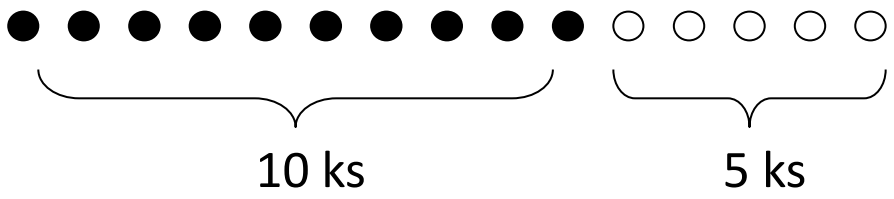
5. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - A, B … **nezávislé jevy** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Modelové úlohy aneb hrátky s kuličkami

2. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že

a) v prvním tahu vytáhneme bílou kuličku,

Jev	Definice jevu
B1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
B2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

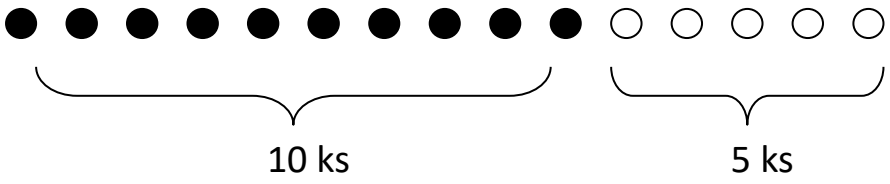


$$P(B_1) = \frac{5}{15} \cong 0{,}333$$

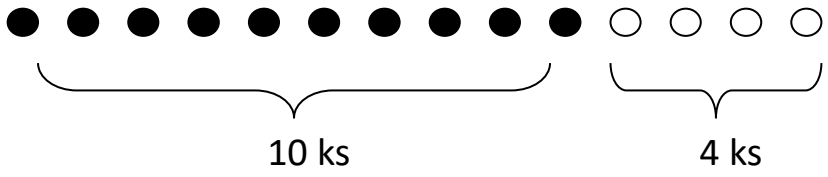
2. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že

b) vytáhli-li jsme v prvním tahu bílou kuličku, ve druhém tahu vytáhneme taky bílou kuličku,

1. tah



2. tah
(byla-li v 1. tahu vytažena bílá kulička)

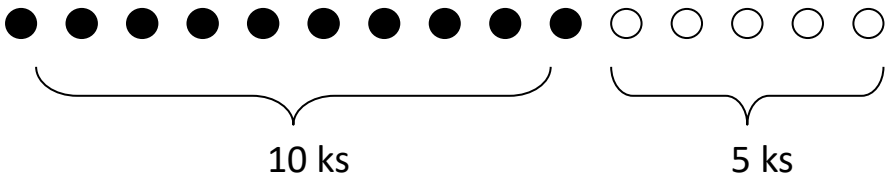


$$P(B_2|B_1) = \frac{4}{14} \cong 0,286$$

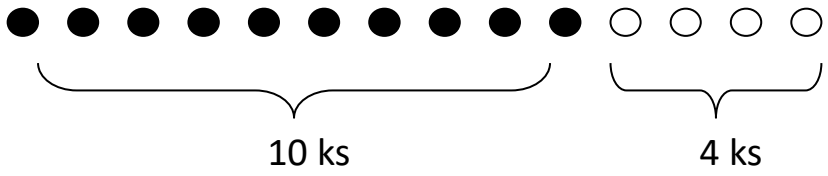
2. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že

c) ve dvou tazích vytáhneme 2 bílé kuličky,

1. tah



2. tah
(byla-li v 1. tahu vytažena bílá kulička)



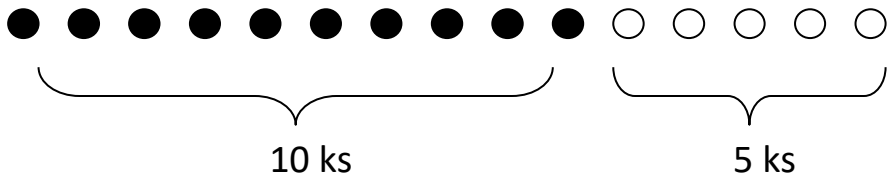
$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{15} = \frac{2}{21} \cong 0,095$$

2. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že

d) ve dvou tazích vytáhneme 1 bílou a 1 černou kuličku,

○● nebo ●○

1. tah



$$P\big((C_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap C_1)\big) = P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap B_2) =$$

$$= P(C_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2|C_1) \cdot P(C_1) =$$

$$= \frac{10}{14} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{14} \cdot \frac{10}{15} =$$

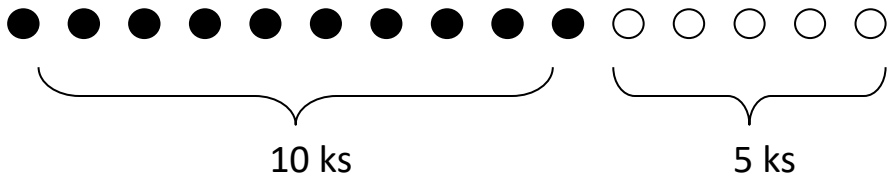
$$= \frac{10}{21} \cong 0,476$$

2. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že

e) ve druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

○○ nebo ●○

1. tah



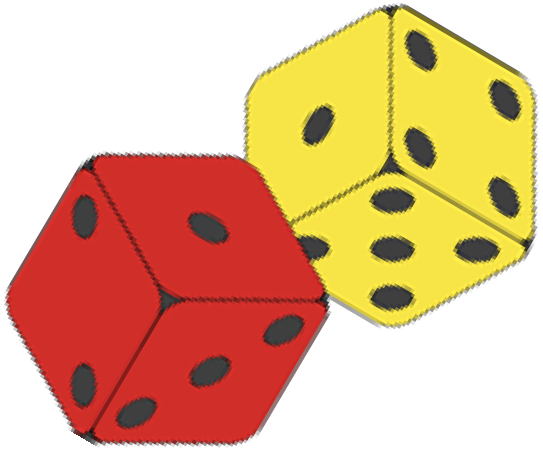
$$P\big((B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap C_1)\big) = P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2) =$$

$$= P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2|C_1) \cdot P(C_1) =$$

$$= \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{14} \cdot \frac{10}{15} =$$

$$= \frac{1}{3} \cong 0,333$$

Modelové úlohy aneb hrátky s kostkami



3. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. Kolik různých výsledků můžeme získat?

Pokud nebude uvedeno jinak, uvažujme pod pojmem „kostka“ férovou (homogenní) šestistěnnou kostku se stranami označenými 1 – 6.

3. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. Kolik různých výsledků můžeme získat?

Označme každý výsledek dvouprvkovou množinou $\{x, y\}$, kde x a y jsou pozorované výsledky. Kostky jsou nerozlišitelné, proto používáme množinový zápis výsledků – na pořadí nezáleží.

$\{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\},$

$\{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},$

$\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\},$

$\{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\},$

$\{5,5\}, \{5,6\},$

$\{6,6\}\}$

Je zřejmé, že **existuje 21 různých výsledků.**

K témuž závěru bychom došli určením počtu kombinací s opakováním 2. třídy ze 6 prvků.

4. Hodíme žlutou a červenou kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat?

Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$,
kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce:

$$\{[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],$$
$$[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],$$
$$[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],$$
$$[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],$$
$$[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],$$
$$[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}$$

Je zřejmé, že **existuje 36 různých výsledků.**

K témuž závěru bychom došli použitím
kombinatorického pravidla součinu nebo určením počtu variací s opakováním 2. třídy ze 6 prvků.

Všechny výsledky jsou rovnocenné, tj. každý má pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

3. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. Kolik různých výsledků můžeme získat?

Označme každý výsledek dvouprvkovou množinou $\{x, y\}$, kde x a y jsou pozorované výsledky. Kostky jsou nerozlišitelné, proto používáme množinový zápis výsledků – na pořadí nezáleží.

$\{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\},$

$\{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},$

$\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\},$

$\{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\},$

$\{5,5\}, \{5,6\},$

$\{6,6\}\}$

Je zřejmé, že **existuje 21 různých výsledků.**

K témuž závěru bychom došli určením
počtu kombinací s opakováním 2. třídy ze 6 prvků.

Výsledky **NEJSOU** rovnocenné!!!

5. Hodíme žlutou a červenou kostkou. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$,
kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],\\ &[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],\\ &[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],\\ &[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],\\ &[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],\\ &[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}\end{aligned}$$

$A = \{[1,2], [2,1]\}$

Všechny výsledky jsou rovnocenné, pravděpodobnost každého z elementárních jevů je proto $\frac{1}{36}$, tzn. že $\boldsymbol{P(A) = \frac{2}{36}}$.

5. Hodíme žlutou a červenou kostkou. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$,
kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce.

Jiný přístup:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],\\ &[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],\\ &[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],\\ &[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],\\ &[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],\\ &[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}\end{aligned}$$

Všechny výsledky jsou rovnocenné, proto můžeme použít klasickou definici pravděpodobnosti.

5. Hodíme žlutou a červenou kostkou. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$,
kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce.

Jiný přístup:

$$\Omega = \{[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],$$
$$[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],$$
$$[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],$$
$$[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],$$
$$[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],$$
$$[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}$$

A … na kostkách padne 1 a 2

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

5. Hodíme žlutou a červenou kostkou. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$,
kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce.

Jiný přístup:

$$\Omega = \{[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],$$
$$[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],$$
$$[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],$$
$$[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],$$
$$[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],$$
$$[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}$$

A … na kostkách padne 1 a 2

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \cong \mathbf{0,056}$$

6. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek dvouprvkovou množinou $\{x, y\}$, kde x a y jsou pozorované výsledky. Kostky jsou nerozlišitelné, proto používáme množinový zápis výsledků – na pořadí nezáleží.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\},\\ &\{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},\\ &\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\},\\ &\{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\},\\ &\{5,5\}, \{5,6\},\\ &\{6,6\}\}\end{aligned}$$

$$A = \{\{1,2\}\}$$

Výsledky **NEJSOU** rovnocenné, proto **NELZE** použít klasickou definici pravděpodobnosti!!!

6. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek dvouprvkovou množinou $\{x, y\}$, kde x a y jsou pozorované výsledky. Kostky jsou nerozlišitelné, proto používáme množinový zápis výsledků – na pořadí nezáleží.

$$\Omega = \{\overset{\omega_1}{\{1,1\}}, \overset{\omega_2}{\{1,2\}}, \overset{\omega_3}{\{1,3\}}, \overset{\dots}{\{1,4\}}, \{1,5\}, \{1,6\},$$

$$\omega_7\ \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},$$

$$\omega_{12}\ \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\},$$

$$\omega_{16}\ \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\},$$

$$\omega_{19}\ \{5,5\}, \{5,6\},$$

$$\omega_{21}\ \{6,6\}\}$$

$$A = \{\{1,2\}\}$$

Úvaha: P-st, že padnou dvě různá čísla je 2x větší než p-st, že padnou dvě stejná čísla.

6. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek dvouprvkovou množinou $\{x, y\}$, kde x a y jsou pozorované výsledky. Kostky jsou nerozlišitelné, proto používáme množinový zápis výsledků – na pořadí nezáleží.

$$\Omega = \{\overset{\omega_1}{\{1,1\}}, \overset{\omega_2}{\{1,2\}}, \overset{\omega_3}{\{1,3\}}, \overset{\dots}{\{1,4\}}, \{1,5\}, \{1,6\},$$

$$\omega_7\ \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},$$

$$\omega_{12}\ \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\},$$

$$\omega_{16}\ \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\},$$

$$\omega_{19}\ \{5,5\}, \{5,6\},$$

$$\omega_{21}\ \{6,6\}\}$$

$$A = \{\{1,2\}\}$$

Úvaha: $P(\omega_i) = \begin{cases} p, & i \in \{1,7,12,16,21\} \\ 2p, & i \in \{2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,15,17,18,20\} \end{cases}$

6. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Označme každý výsledek dvouprvkovou množinou $\{x, y\}$, kde x a y jsou pozorované výsledky. Kostky jsou nerozlišitelné, proto používáme množinový zápis výsledků – na pořadí nezáleží.

$$\Omega = \{\overset{\omega_1}{\{1,1\}}, \overset{\omega_2}{\{1,2\}}, \overset{\omega_3}{\{1,3\}}, \overset{\dots}{\{1,4\}}, \{1,5\}, \{1,6\},$$

$$\omega_7\ \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},$$

$$\omega_{12}\ \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\},$$

$$\omega_{16}\ \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\},$$

$$\omega_{19}\ \{5,5\}, \{5,6\},$$

$$\omega_{21}\ \{6,6\}\}$$

$$A = \{\{1,2\}\}$$

Úvaha: $\sum_{i=1}^{21} P(\omega_i) = 1 \Longrightarrow 6p + 15 \cdot 2p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{36} \Longrightarrow P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \cong \mathbf{0,056}$

6. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Jiný přístup:

- Bude řešení odlišné od řešení příkladu 4?
- Označme si kostky červenou a žlutou barvou.
- Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$, kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],\\ &[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],\\ &[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],\\ &[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],\\ &[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],\\ &[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}\end{aligned}$$

Všechny výsledky jsou rovnocenné, proto můžeme použít klasickou definici pravděpodobnosti.

6. Hodíme dvěma nerozlišitelnými kostkami. S jakou pravděpodobností padne 1 a 2?

Jiný přístup:

- Bude řešení odlišné od řešení příkladu 4?
- Označme si kostky červenou a žlutou barvou.
- Označme každý výsledek uspořádanou dvojicí $[x, y]$, kde x je výsledek na červené kostce a y je výsledek na žluté kostce.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6],\\ &[2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6],\\ &[3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6],\\ &[4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6],\\ &[5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6],\\ &[6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6]\}\end{aligned}$$

A … na kostkách padne 1 a 2 $\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \cong \mathbf{0,056}$

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $P(S6) = ?$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $P(S6) = ?$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $P(S6) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4
- $P(S6 \cap V4) = ?$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4
- $P(S6 \cap V4) = ?$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4
- $P(S6 \cap V4) = ?$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	**5**	6	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	**5**	**6**	**7**	8	**9**	**10**
5	6	7	8	**9**	10	11
6	7	8	9	**10**	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4
- $P(S6 \cap V4) = \frac{2}{36} = \mathbf{\frac{1}{18}}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	**5**	6	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	**5**	**6**	**7**	8	**9**	**10**
5	6	7	8	**9**	10	11
6	7	8	9	**10**	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

Jiný způsob řešení:

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4

- $P(S6 \cap V4) = ?$
- $S6, V4$ nejsou nezávislé jevy

$$P(S6 \cap V4) = P(S6|V4) \cdot P(V4)$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

Jiný způsob řešení:

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4

- $P(S6 \cap V4) = ?$
- $S6, V4$ nejsou nezávislé jevy

$$P(S6 \cap V4) = P(S6|V4) \cdot P(V4) =$$
$$= \quad ? \quad \cdot \quad \frac{10}{36}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	**5**	6	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	**5**	**6**	**7**	8	**9**	**10**
5	6	7	8	**9**	10	11
6	7	8	9	**10**	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

Jiný způsob řešení:

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4

- $P(S6 \cap V4) = ?$
- $S6, V4$ nejsou nezávislé jevy

$$P(S6 \cap V4) = P(S6|V4) \cdot P(V4) =$$
$$= \quad ? \quad \cdot \quad \frac{10}{36}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	**5**	6	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	**5**	**6**	**7**	8	**9**	**10**
5	6	7	8	**9**	10	11
6	7	8	9	**10**	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

Jiný způsob řešení:

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4

- $P(S6 \cap V4) = ?$
- $S6, V4$ nejsou nezávislé jevy

$$P(S6 \cap V4) = P(S6|V4) \cdot P(V4) =$$
$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{36} =$$
$$= \mathbf{\frac{1}{18}}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	**5**	6	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	**5**	**6**	**7**	8	**9**	**10**
5	6	7	8	**9**	10	11
6	7	8	9	**10**	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

Jiný způsob řešení (2):

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4

- $P(S6 \cap V4) = ?$
- $S6, V4$ nejsou nezávislé jevy

$$P(S6 \cap V4) = P(V4|S6) \cdot P(S6)$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?

Jiný způsob řešení (2):

- $S6$ … součet ok na dvou kostkách bude 6
- $V4$ … právě na jedné kostce padne 4

- $P(S6 \cap V4) = ?$
- $S6, V4$ nejsou nezávislé jevy

$$P(S6 \cap V4) = P(V4|S6) \cdot P(S6) =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{36} =$$
$$= \mathbf{\frac{1}{18}}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = ?$

	L_Z	$\overline{L_Z}$
L_C		
$\overline{L_C}$		

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = ?$$

	L_Z	$\overline{L_Z}$
L_C		
$\overline{L_C}$		

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = \mathbf{\frac{3}{4}}$ (klasická definice pravděpodobnosti)

	L_Z	$\overline{L_Z}$
L_C		
$\overline{L_C}$		

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = \mathbf{\frac{3}{4}}$ (klasická definice pravděpodobnosti)

$P(L_Z) = 0{,}5$

$P(\overline{L_Z}) = 0{,}5$

		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0{,}5$	L_C	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0{,}5$	$\overline{L_C}$	0,25	

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

Obecně:

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = P\big((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)\big) = ?$$

	L_Z	$\overline{L_Z}$
L_C		
$\overline{L_C}$		

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

Obecně:

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = P\big((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)\big) = ?$$

- $(L_C \cap \overline{L_Z})$,$(\overline{L_C} \cap L_Z)$, $(L_C \cap L_Z)$ … neslučitelné jevy, proto:

$$P\big((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)\big) = P(L_C \cap \overline{L_Z}) + P(\overline{L_C} \cap L_Z) + P(L_C \cap L_Z)$$

- L_C, L_Z … nezávislé jevy, proto:

$$P(L_C \cap \overline{L_Z}) = P(L_C) \cdot P(\overline{L_Z}),$$
$$P(\overline{L_C} \cap L_Z) = P(\overline{L_C}) \cdot P(L_Z),$$
$$P(L_C \cap L_Z) = P(L_C) \cdot P(L_Z).$$

$P(L_Z) = 0{,}5$

$P(\overline{L_Z}) = 0{,}5$

		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0{,}5$	L_C	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0{,}5$	$\overline{L_C}$	0,25	

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

Obecně:

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

$$P(A) = P(L_C \cup L_Z) = P\big((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)\big) = \mathbf{0,75}$$

- $(L_C \cap \overline{L_Z})$,$(\overline{L_C} \cap L_Z)$, $(L_C \cap L_Z)$ … neslučitelné jevy, proto:

$$P\big((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)\big) = P(L_C \cap \overline{L_Z}) + P(\overline{L_C} \cap L_Z) + P(L_C \cap L_Z)$$

- L_C, L_Z … nezávislé jevy, proto:

$$P(L_C \cap \overline{L_Z}) = P(L_C) \cdot P(\overline{L_Z}),$$
$$P(\overline{L_C} \cap L_Z) = P(\overline{L_C}) \cdot P(L_Z),$$
$$P(L_C \cap L_Z) = P(L_C) \cdot P(L_Z).$$

		$P(L_Z) = 0{,}5$	$P(\overline{L_Z}) = 0{,}5$
		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0{,}5$	L_C	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0{,}5$	$\overline{L_C}$	0,25	

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

Jednodušeji:

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

Napadá Vás ještě jiný způsob řešení?

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{L_C} \cap \overline{L_Z}) = ?$$

$P(L_Z) = 0{,}5$

$P(\overline{L_Z}) = 0{,}5$

		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0{,}5$	L_C	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0{,}5$	$\overline{L_C}$	0,25	

8. Hodíme dvěma kostkami.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

Jednodušeji:

- A … alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok
- L_C … na červené kostce padne lichý počet ok
- L_Z … na žluté kostce padne lichý počet ok

Napadá Vás ještě jiný způsob řešení?

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{L_C} \cap \overline{L_Z}) = \mathbf{0,75}$$

		$P(L_Z) = 0{,}5$	$P(\overline{L_Z}) = 0{,}5$
		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0{,}5$	L_C	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0{,}5$	$\overline{L_C}$	0,25	

9. Hodíme dvakrát hrací kostkou.

Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jednou na kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň jednou padne lichý počet ok
- $\bar{A}$ … ani jednou nepadne lichý počet ok
- L_1 … při 1. hodu padne lichý počet ok
- L_2 … při 2. hodu padne lichý počet ok

- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) = \mathbf{0,75}$

$P(L_1) = 0{,}5$

$P(\overline{L_1}) = 0{,}5$

		$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{\overline{L_1}}$
$P(L_2) = 0{,}5$	$\boldsymbol{L_2}$	0,25	0,25
$P(\overline{L_2}) = 0{,}5$	$\boldsymbol{\overline{L_2}}$	0,25	0,25

10. Hodíme dvakrát hrací kostkou, která je „cinknutá“ – pravděpodobnost, že na ní padne sudé číslo je 0,6. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jednou na kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň jednou padne lichý počet ok
- $\bar{A}$ … ani jednou nepadne lichý počet ok
- L_1 … při 1. hodu padne lichý počet ok
- L_2 … při 2. hodu padne lichý počet ok

- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) = ?$

$P(L_1) = 0{,}4$

$P(\overline{L_1}) = 0{,}6$

		$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{\overline{L_1}}$
$P(L_2) = 0{,}4$	$\boldsymbol{L_2}$		
$P(\overline{L_2}) = 0{,}6$	$\boldsymbol{\overline{L_2}}$		

10. Hodíme dvakrát hrací kostkou, která je „cinknutá“ – pravděpodobnost, že na ní padne sudé číslo je 0,6. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jednou na kostce padne lichý počet ok?

- A … alespoň jednou padne lichý počet ok
- $\bar{A}$ … ani jednou nepadne lichý počet ok
- L_1 … při 1. hodu padne lichý počet ok
- L_2 … při 2. hodu padne lichý počet ok

- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) = \mathbf{0,64}$

$P(L_1) = 0{,}4$

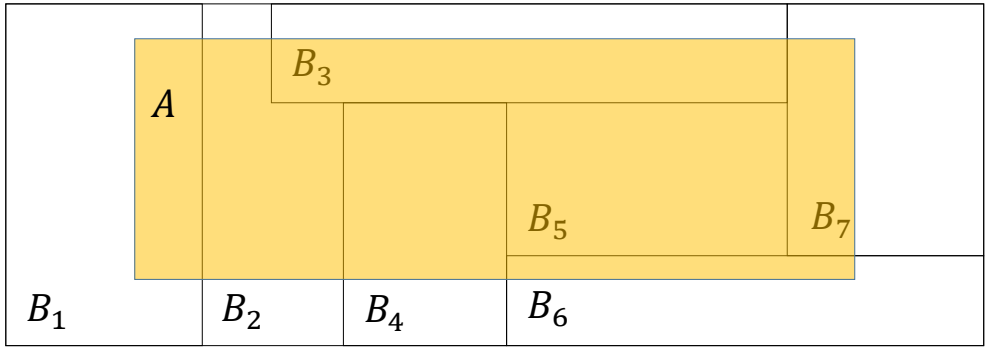
$P(\overline{L_1}) = 0{,}6$

		$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{\overline{L_1}}$
$P(L_2) = 0{,}4$	$\boldsymbol{L_2}$	0,16	0,24
$P(\overline{L_2}) = 0{,}6$	$\boldsymbol{\overline{L_2}}$	0,24	0,36

Variace na dané téma

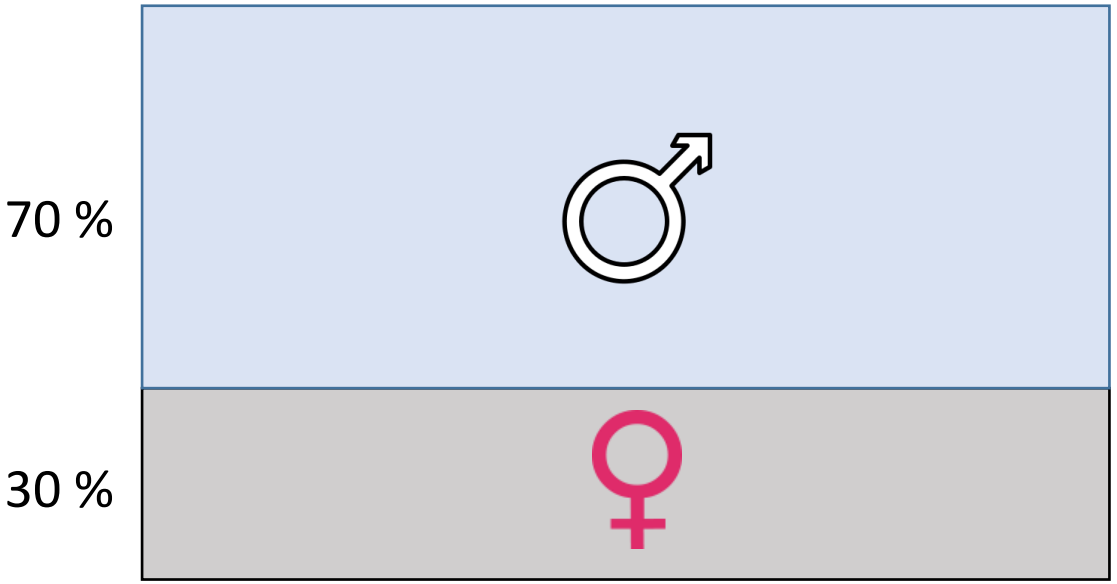
Jdeme do finále…

Věta o úplné pravděpodobnosti

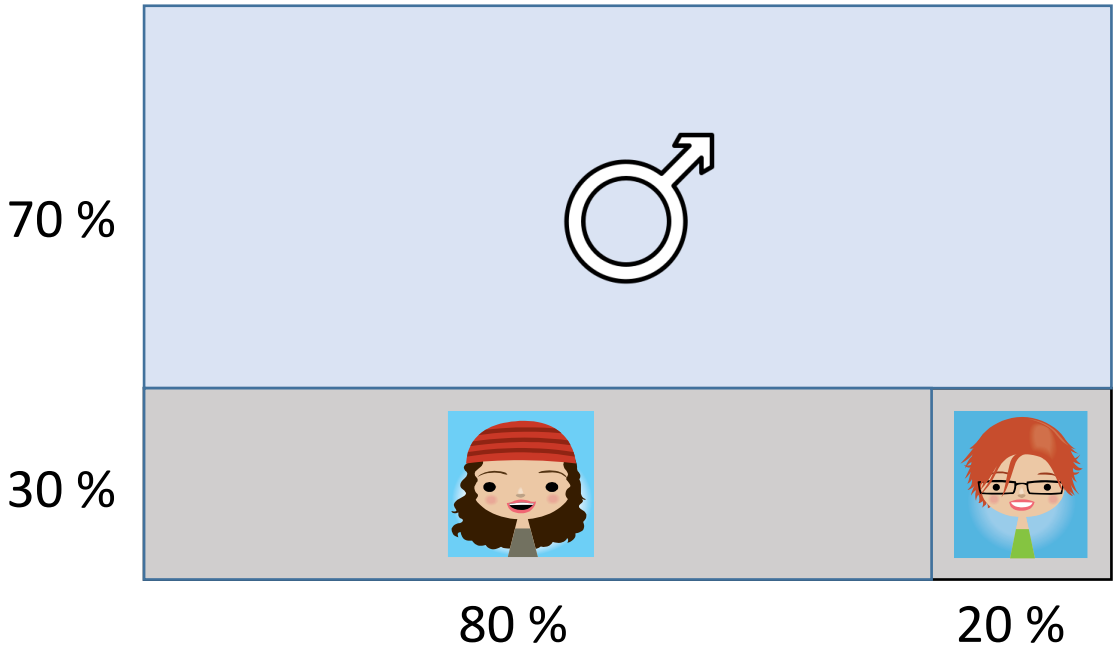


$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

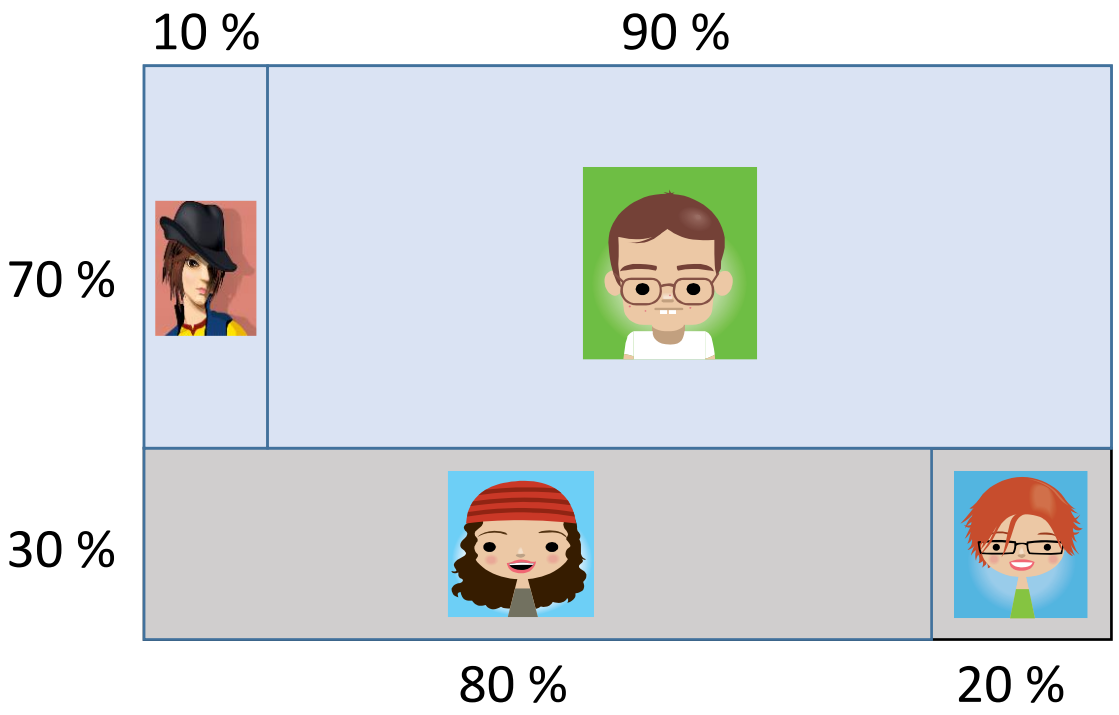
3. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?



3. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?



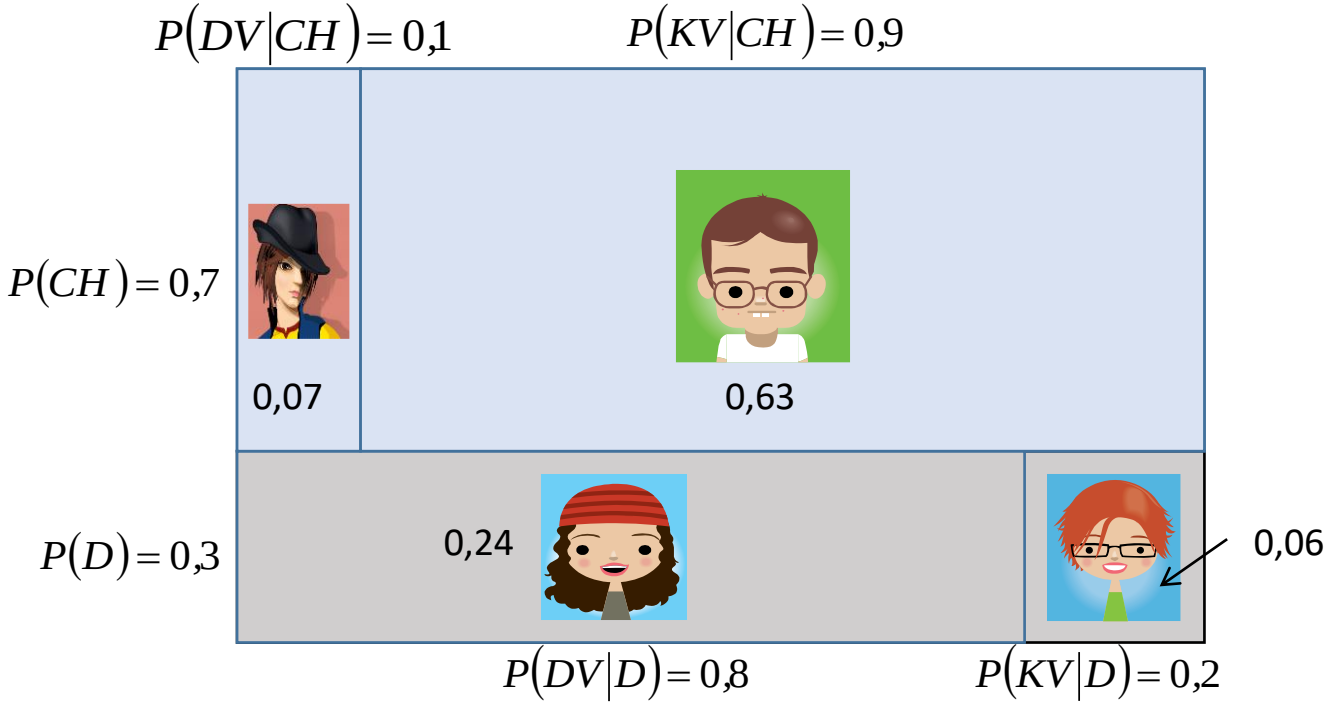
3. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?



3. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

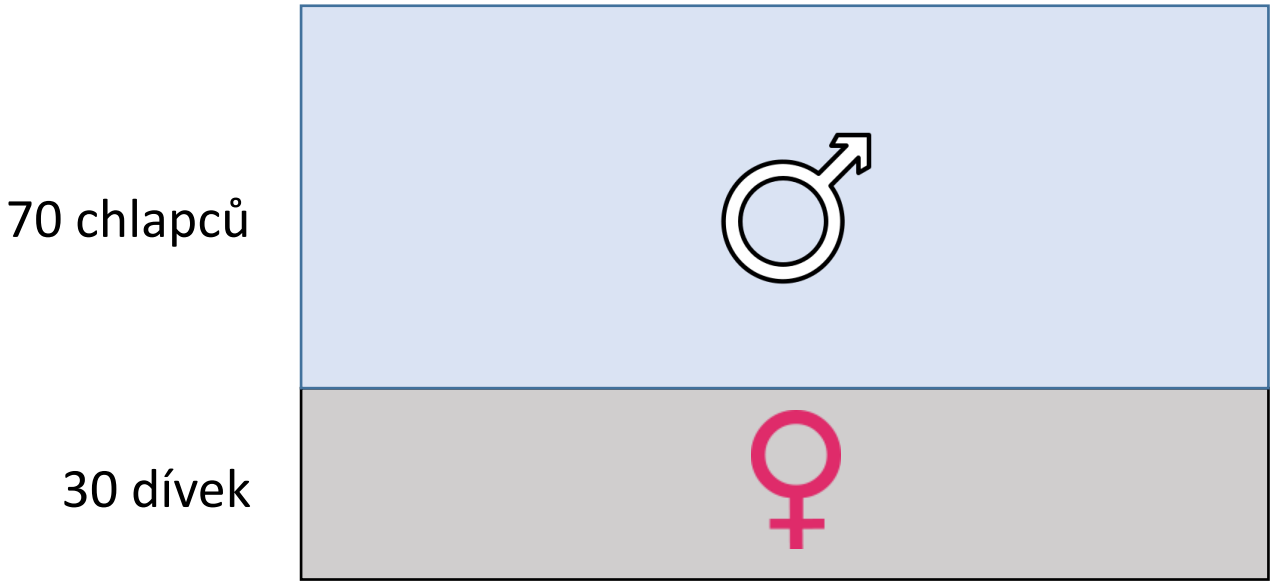
$$P(DV) = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$

$$\boldsymbol{P(DV)} = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}31}$$



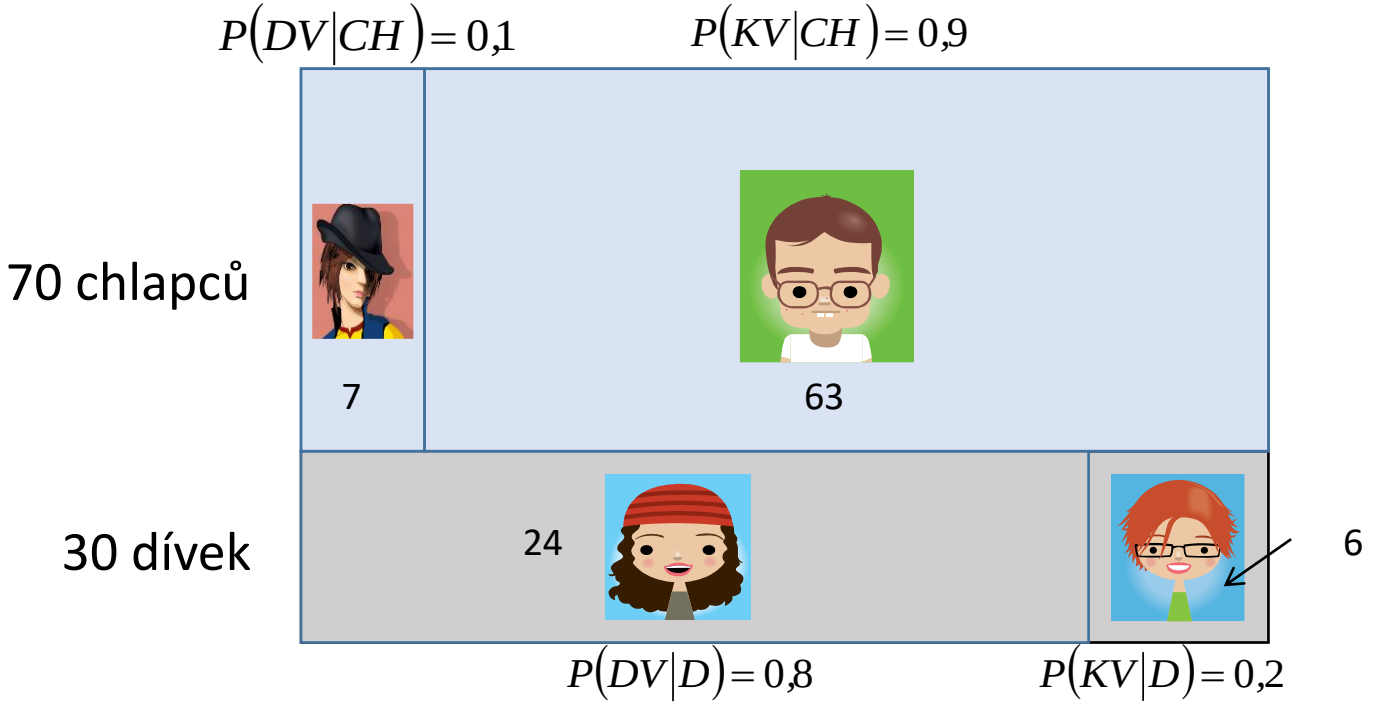
3. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

Představme si reálnou třídu (100 studentů), která splňuje dané podmínky…



3. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

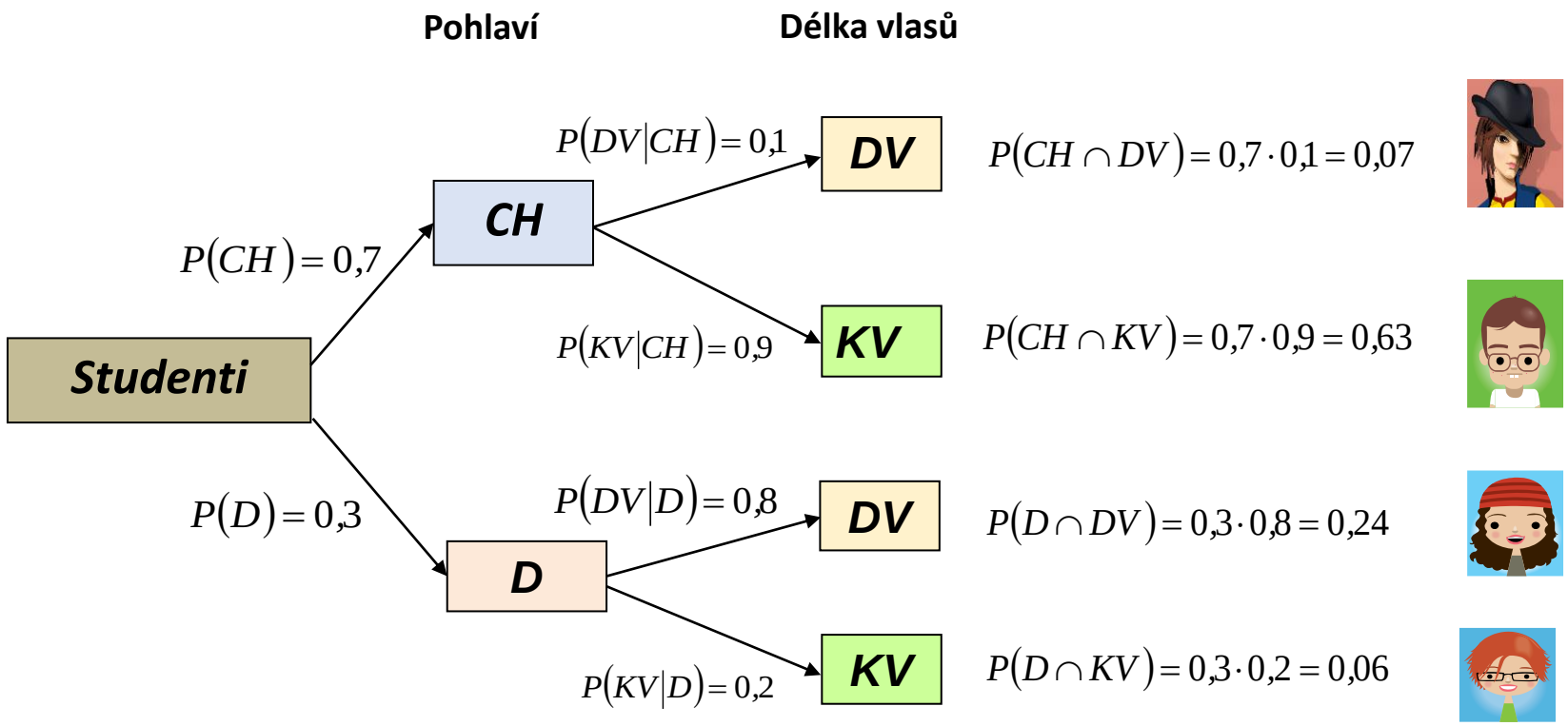
$$P(DV) = \frac{24+7}{100} = \mathbf{0,31} = \frac{24}{100} + \frac{7}{100} = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$



Rozhodovací strom

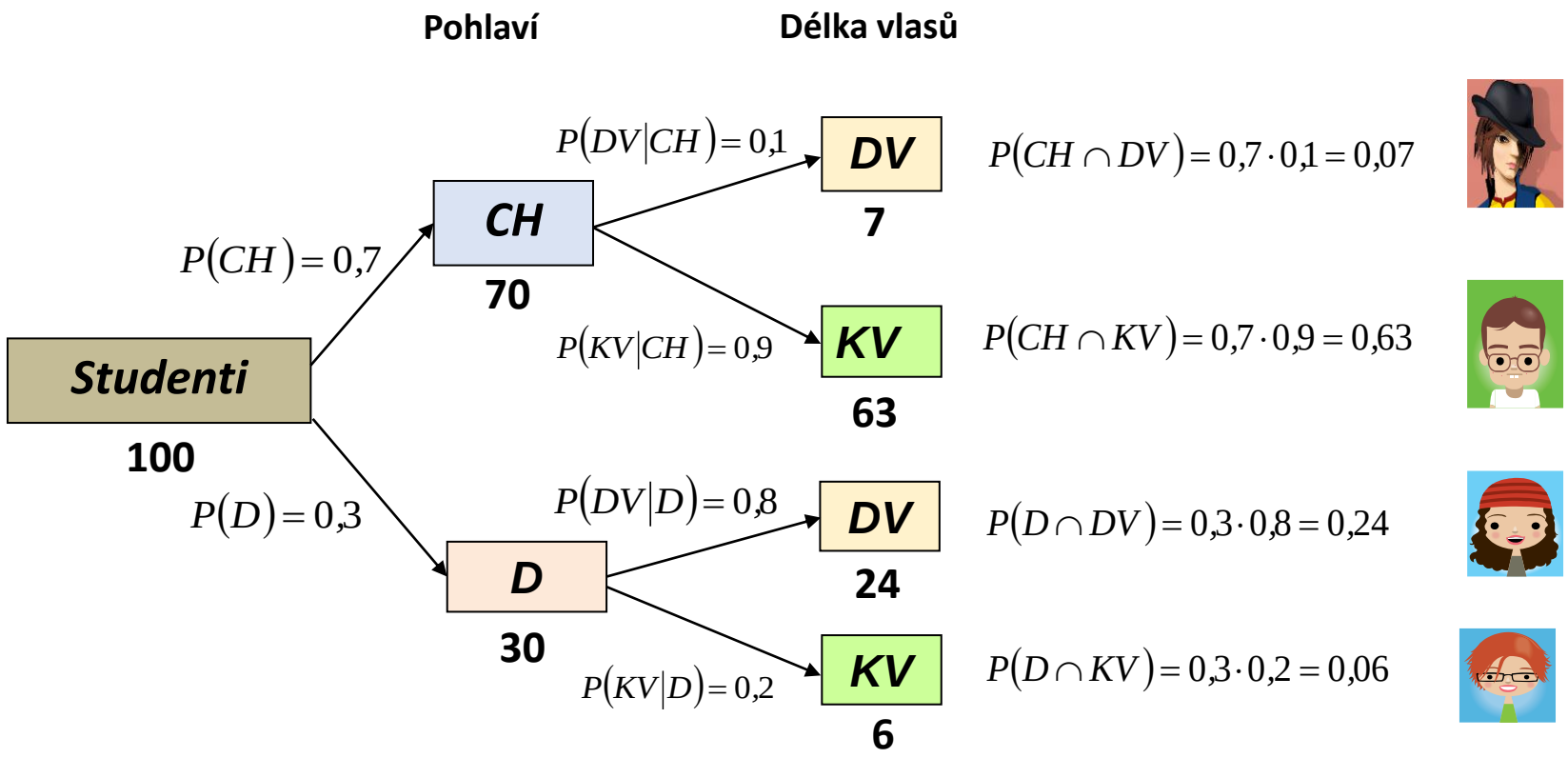
$$P(DV) = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$

$$\boldsymbol{P(DV)} = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}31}$$



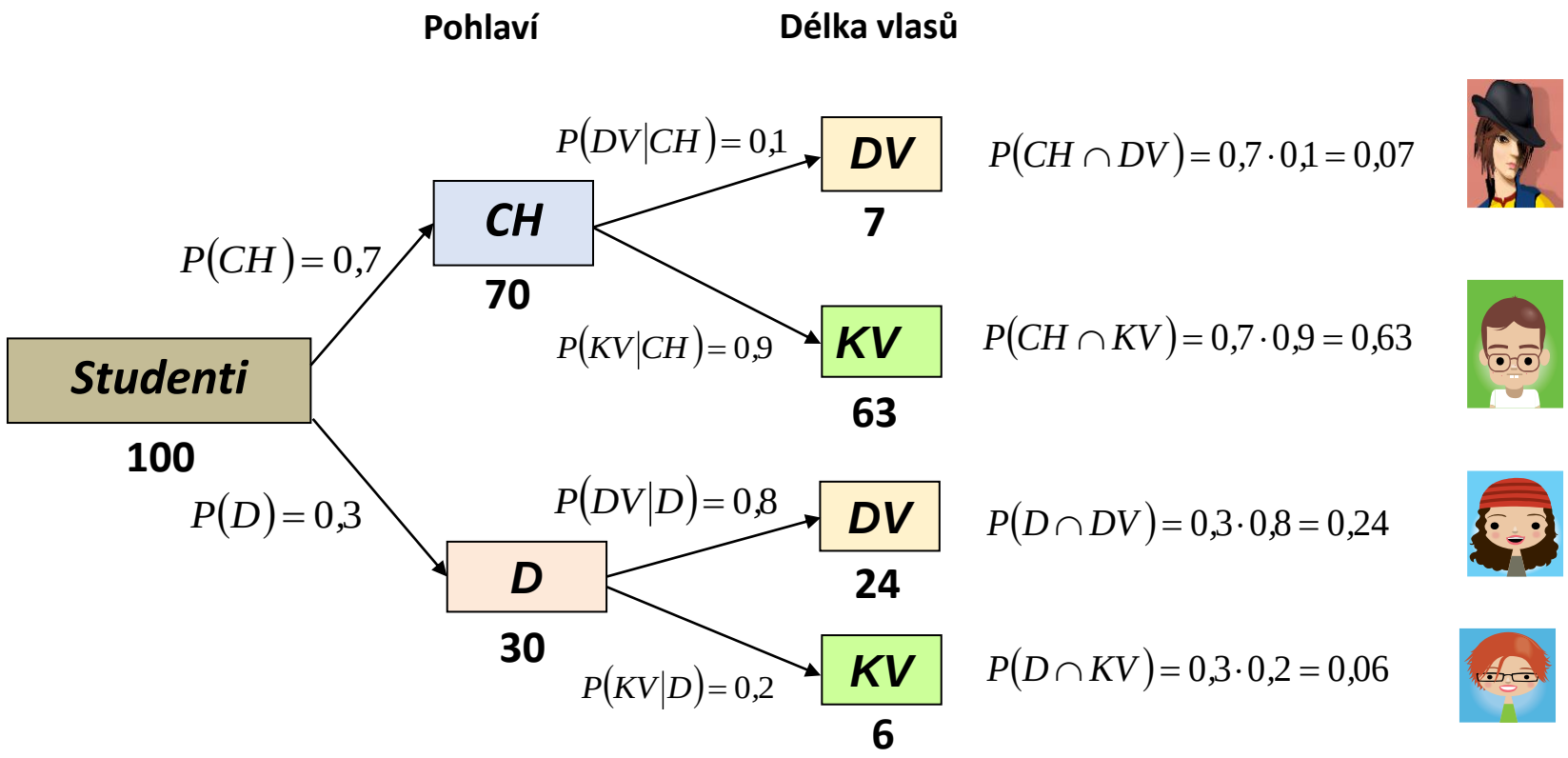
Rozhodovací strom

Představme si reálnou třídu (100 studentů), která splňuje dané podmínky…



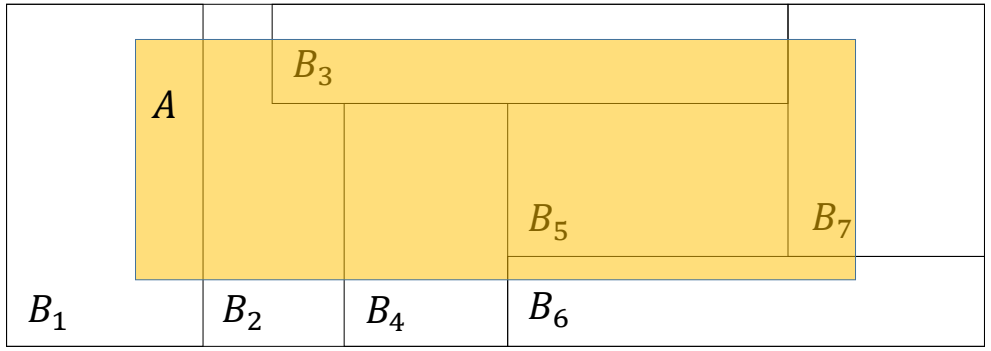
Rozhodovací strom

$$P(DV) = \frac{24+7}{100} = \mathbf{0,31} = \frac{24}{100} + \frac{7}{100} = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$



Bayesův teorém

Thomas Bayes
(1702 – 1761)



$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)\right)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

4. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

a)

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

70 %

Apriorní pravděpodobnost

4. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

b)

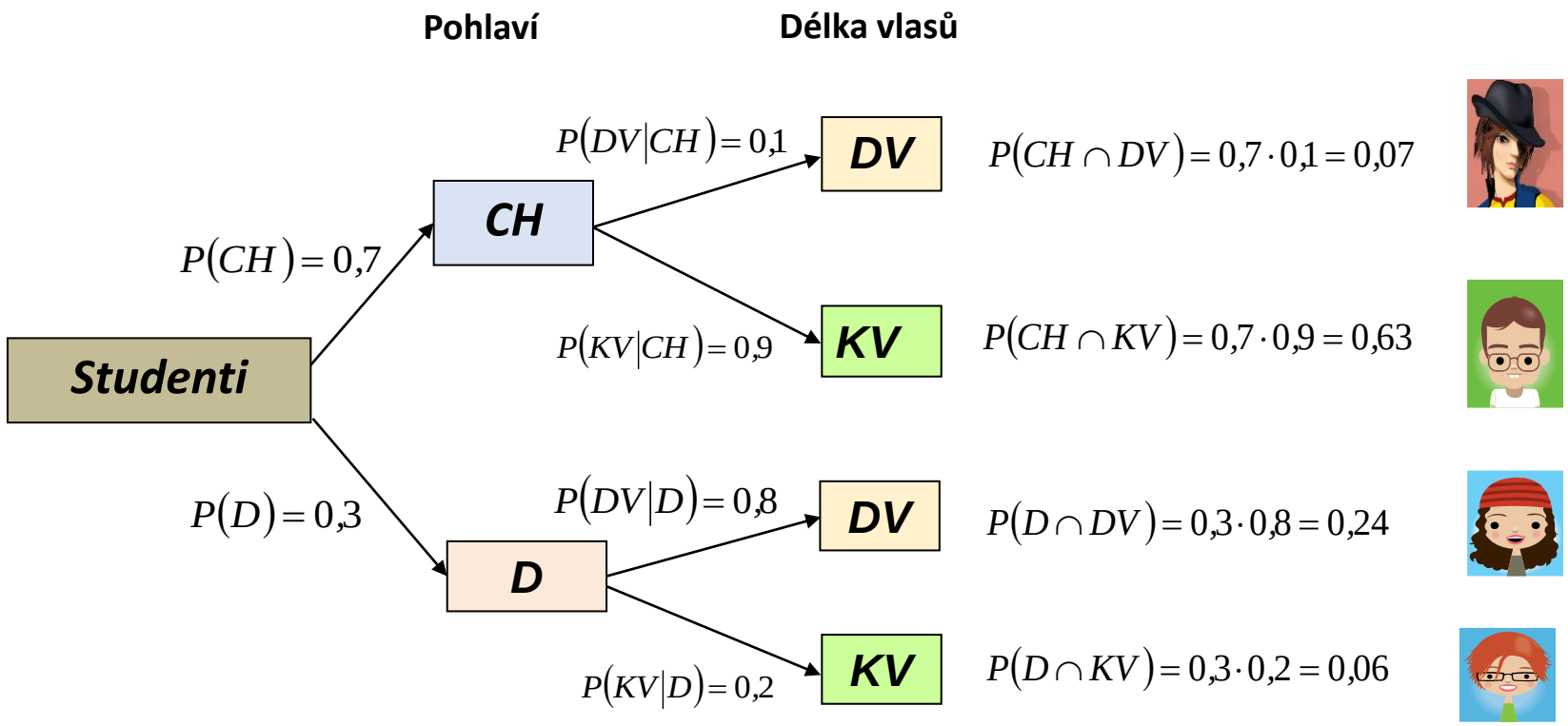
Náhodně vybraný student má dlouhé vlasy.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

$$P(CH|DV) = ?$$

Aposteriorní pravděpodobnost

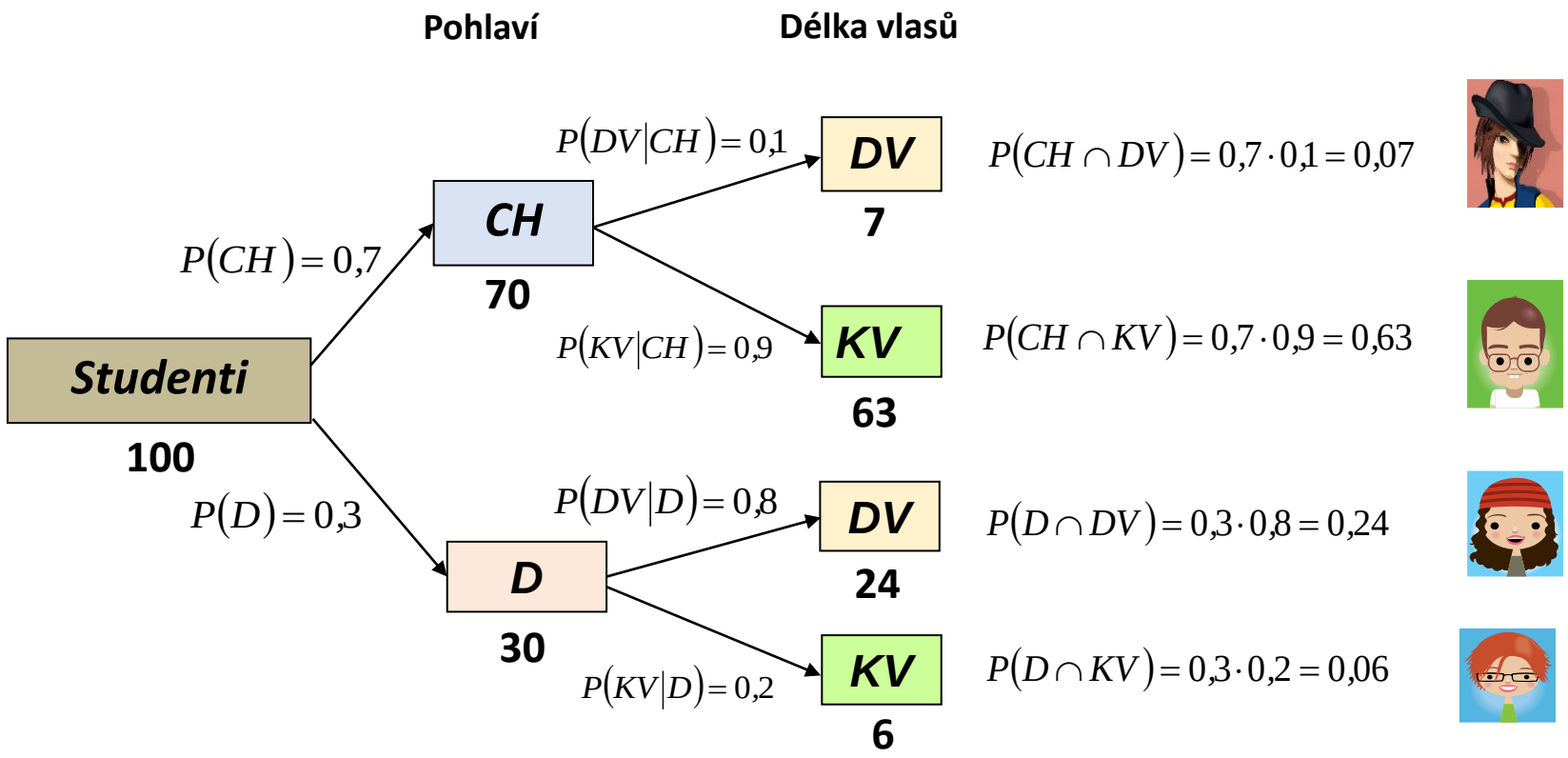
Bayesova věta

$$P(CH|DV) = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV)} = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV \cap D) + P(DV \cap CH)} = \frac{P(DV|CH) \cdot P(CH)}{P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)} = \frac{0{,}07}{0{,}24 + 0{,}07} = \mathbf{0{,}226}$$



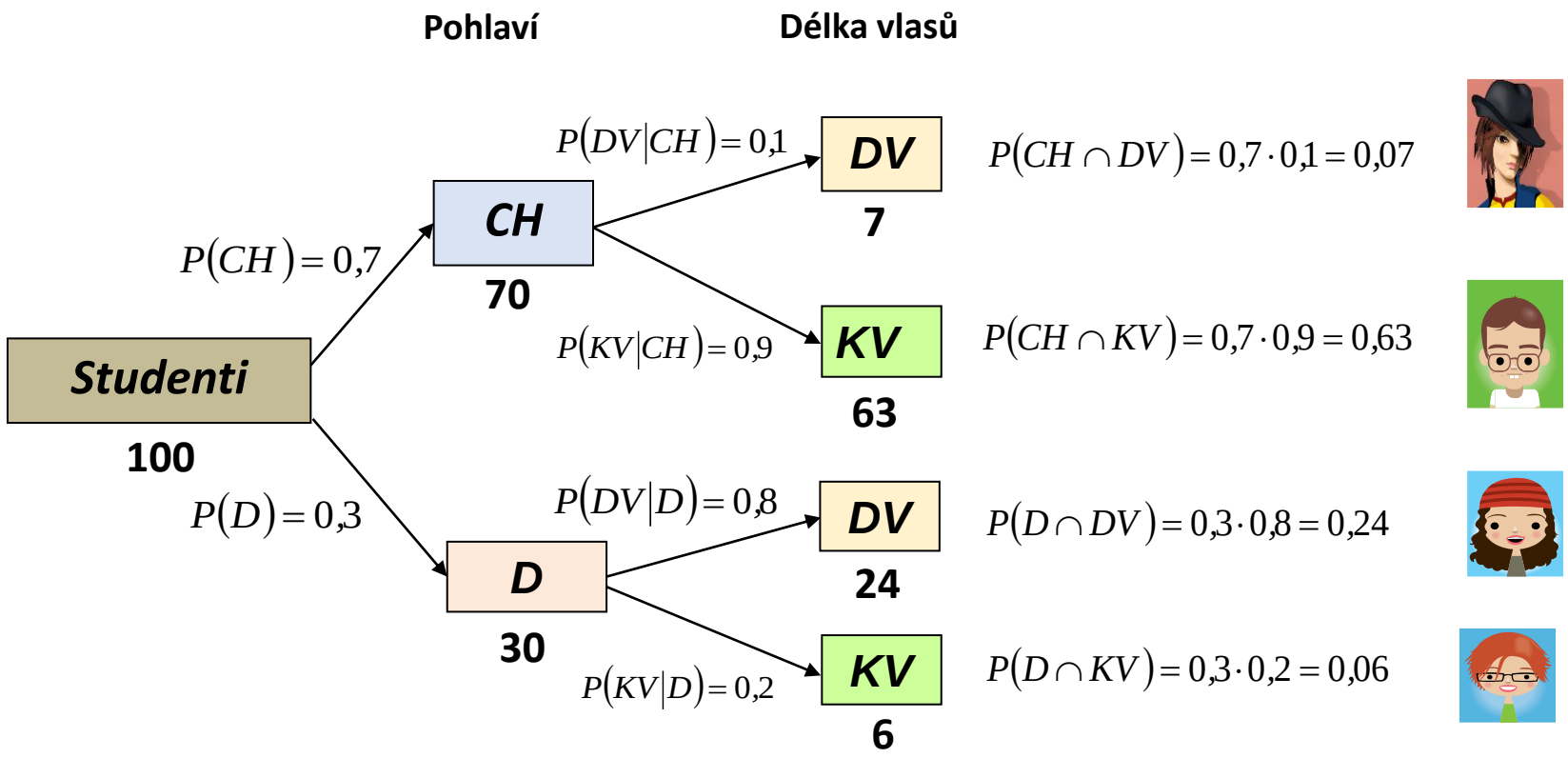
Rozhodovací strom

Představme si reálnou třídu (100 studentů), která splňuje dané podmínky…



Rozhodovací strom

$$P(CH|DV) = \frac{7}{24+7} = \mathbf{0,226} = \frac{0{,}07}{0{,}24+0{,}07} = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV \cap D)+P(DV \cap CH)} = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV)}$$



4. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

a) Jaká je p-st, že náhodně vybraný student je chlapec?

70 % apriorní pravděpodobnost

b) Náhodně vybraný student má dlouhé vlasy.
Jaká je p-st, že náhodně vybraný student je chlapec?

22,6 % aposteriorní pravděpodobnost

změna vnímání reality
ve světle nových informací

Senzitivita, specificita, prevalence…

Screeningové testování

aneb vyšetřování předem definované skupiny lidí **za účelem vyhledávání chorob v jejich časných stádiích**, kdy pacient ještě nemá potíže a příznaky nebo jsou tyto příznaky spolehlivě identifikovatelné jen časově nebo finančně nákladným procesem

- Vyšetření určité části populace na určité látky nebo symptomy
- Předběžné vyšetření za účelem indikace pro plnohodnotnou diagnostiku

Příklady screeningových testů

- Trisomy test (neinvazivní test detekující např. Downův syndrom; 1. trimestr těhotenství),
- Test pro záchyt PAS (dotazníkové šetření detekující podezření na poruchu autistického spektra, předškolní věk)
- Mamografický screening (ženy nad 40 let),
- TOKS (test okultního krvácení do stolice, jedinci nad 50 let),
- Antigenní testy na protilátky proti SARS-CoV-2, …

Jak to všechno funguje

Označme:

N^+	nemoc se u pacienta vyskytuje
N^-	nemoc se u pacienta nevyskytuje
T^+	test vyšel pozitivní
T^-	test vyšel negativní

Předpokládejme, že známe:

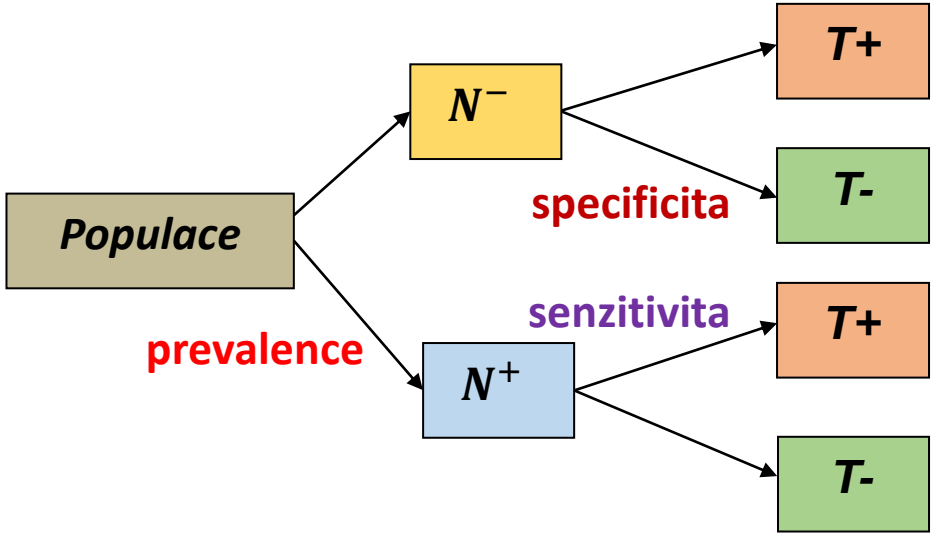
$P(N^+)$	p-st výskytu nemoci ve sledované populaci (**prevalence** – apriorní p-st)
$P(T^+\|N^+)$	p-st, že test je pozitivní u nemocné osoby (**senzitivita testu nebo citlivost testu**)
$P(T^-\|N^-)$	p-st, že test je negativní u osoby, která nemoc nemá (**specificita testu**)

- Senzitivita a specificita jsou parametry testu, vypovídají o jeho kvalitě.
- Senzitivita a specificita testu se určují na základě pilotního projektu (udává je výrobce), ale je velmi vhodné je ověřovat i v reálných podmínkách používání testu.

Jak to všechno funguje

Předpokládejme, že známe:

$P(N^+)$	p-st výskytu nemoci ve sledované populaci (**prevalence** – apriorní p-st)
$P(T^+\|N^+)$	p-st, že test je pozitivní u nemocné osoby (**senzitivita testu nebo citlivost testu**)
$P(T^-\|N^-)$	p-st, že test je negativní u osoby, která nemoc nemá (**specificita testu**)



Zdraví pacienti, u nichž test detekoval protilátky ~ FALSE POSITIVE

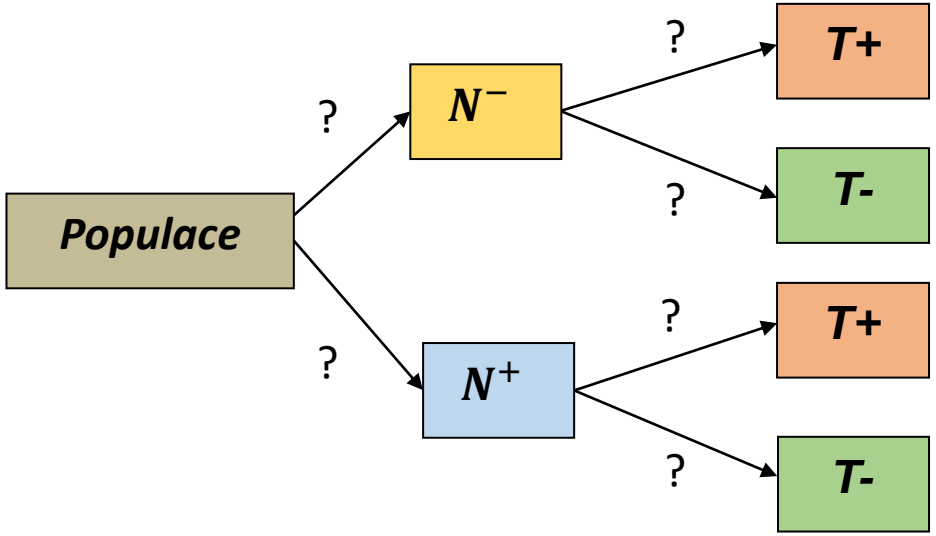
Zdraví pacienti, u nichž test protilátky nedetekoval ~ TRUE NEGATIVE

Nemocní pacienti, u nichž test detekoval protilátky ~ TRUE POSITIVE

Nemocní pacienti, u nichž test nedetekoval protilátky ~ FALSE NEGATIVE

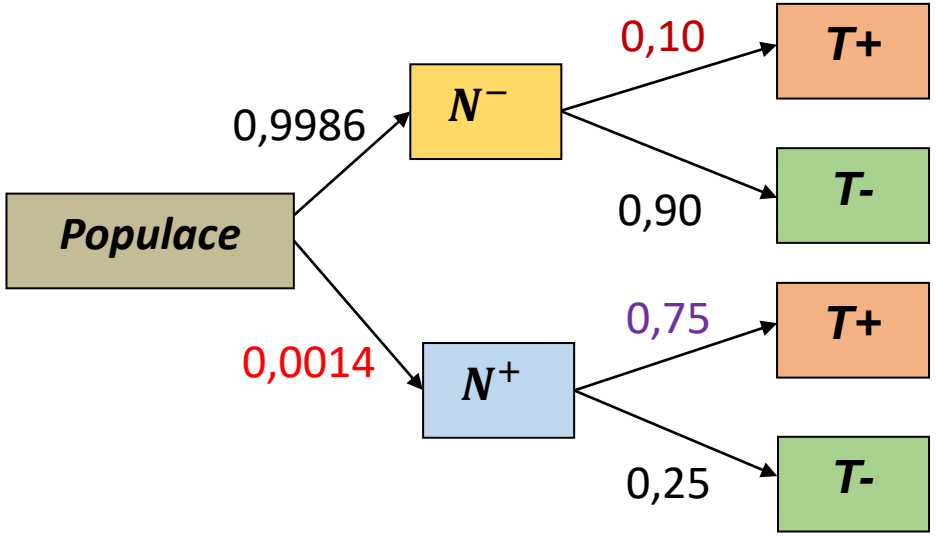
Kdy přistoupit k screeningovým testům?

5. Pravděpodobnost výskytu rakoviny prsu je u žen ve věku 40-50 let cca 0,14 %. Podle studií naznačí mamograf u žen, které rakovinu nemají, nesprávně přítomnost nemoci pouze asi v 10 % případů. Pokud naopak rakovinu mají, odhalí ji asi v 75 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že 40 letá (bezsymptomatická) žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího screeningového mamografického vyšetření pozitivní? (dle SILVER, Nate. *Signál a šum: mnoho předpovědí selže, některé ne*. Praha: Paseka, 2014. ISBN 978-80-7432-440-6.)



Kdy přistoupit k screeningovým testům?

5. Pravděpodobnost výskytu rakoviny prsu je u žen ve věku 40-50 let cca 0,14 %. Podle studií naznačí mamograf u žen, které rakovinu nemají, nesprávně přítomnost nemoci pouze asi v 10 % případů. Pokud naopak rakovinu mají, odhalí ji asi v 75 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že 40 letá (bezsymptomatická) žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího screeningového mamografického vyšetření pozitivní? (dle SILVER, Nate. *Signál a šum: mnoho předpovědí selže, některé ne*. Praha: Paseka, 2014. ISBN 978-80-7432-440-6.)



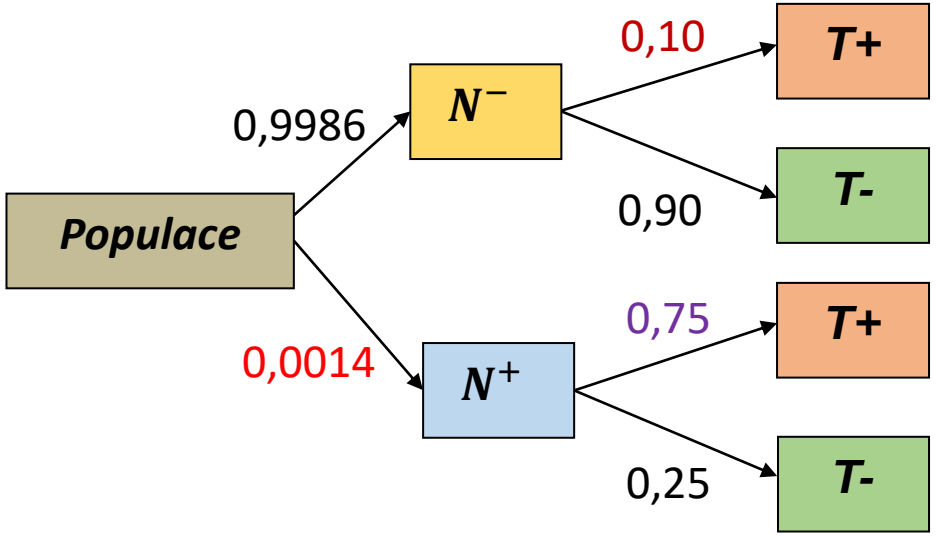
prevalence: 0,0014

specificita testu: 0,90

senzitivita testu: 0,75

Kdy přistoupit k screeningovým testům?

5. Pravděpodobnost výskytu rakoviny prsu je u žen ve věku 40-50 let cca 0,14 %. Podle studií naznačí mamograf u žen, které rakovinu nemají, nesprávně přítomnost nemoci pouze asi v 10 % případů. Pokud naopak rakovinu mají, odhalí ji asi v 75 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že 40 letá (bezsymptomatická) žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího screeningového mamografického vyšetření pozitivní? (dle SILVER, Nate. *Signál a šum: mnoho předpovědí selže, některé ne*. Praha: Paseka, 2014. ISBN 978-80-7432-440-6.)



FALSE POSITIVE, $0{,}9986 \cdot 0{,}1$

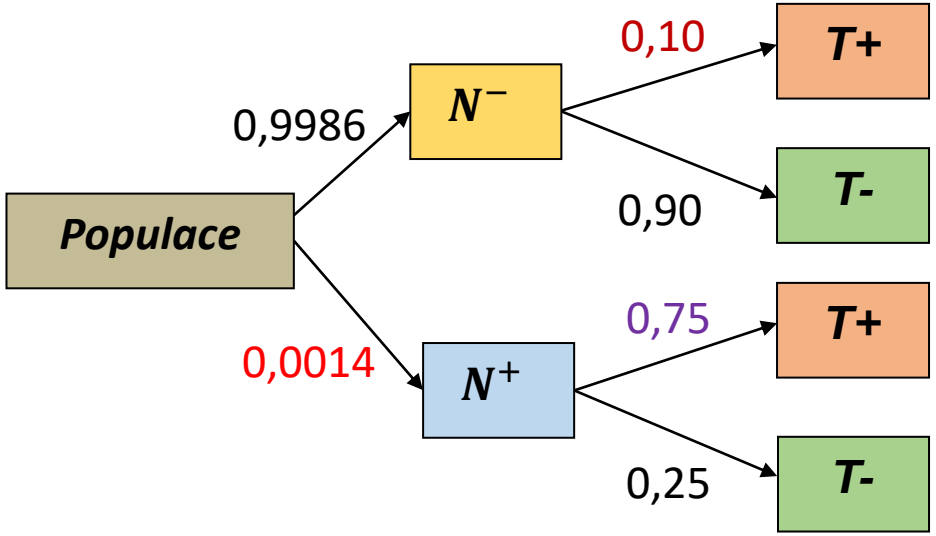
TRUE NEGATIVE, $0{,}9986 \cdot 0{,}9$

TRUE POSITIVE, $0{,}0014 \cdot 0{,}75$

FALSE NEGATIVE, $0{,}0014 \cdot 0{,}25$

Kdy přistoupit k screeningovým testům?

5. Pravděpodobnost výskytu rakoviny prsu je u žen ve věku 40-50 let cca 0,14 %. Podle studií naznačí mamograf u žen, které rakovinu nemají, nesprávně přítomnost nemoci pouze asi v 10 % případů. Pokud naopak rakovinu mají, odhalí ji asi v 75 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že 40 letá (bezsymptomatická) žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího screeningového mamografického vyšetření pozitivní? (dle SILVER, Nate. *Signál a šum: mnoho předpovědí selže, některé ne*. Praha: Paseka, 2014. ISBN 978-80-7432-440-6.)



FALSE POSITIVE, $\cong 0{,}0999$

TRUE NEGATIVE, $\cong 0{,}8987$

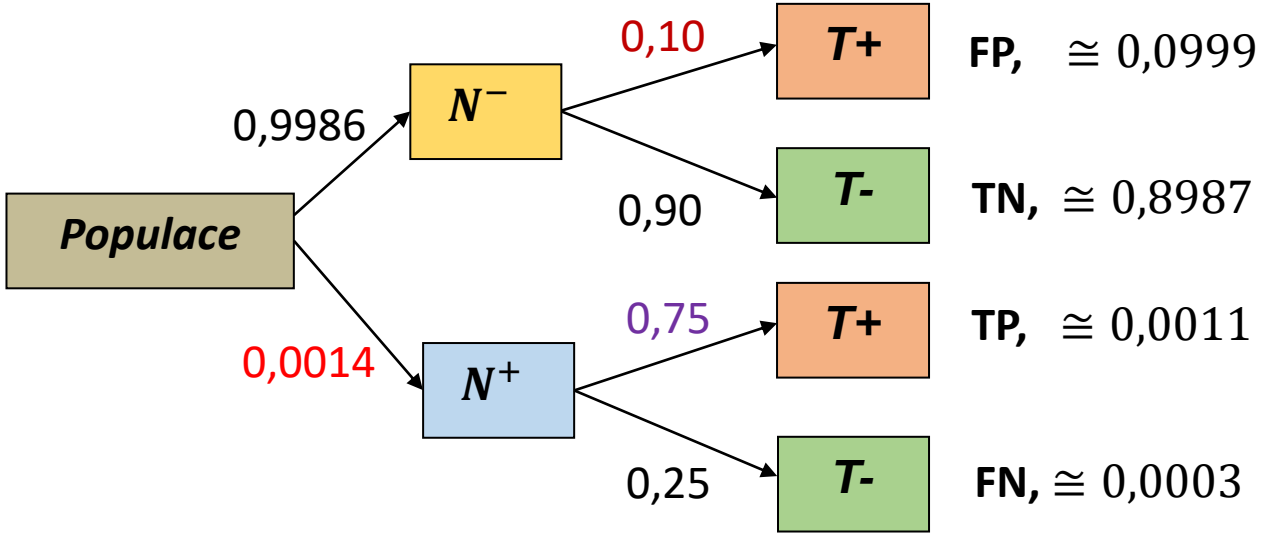
TRUE POSITIVE, $\cong 0{,}0011$

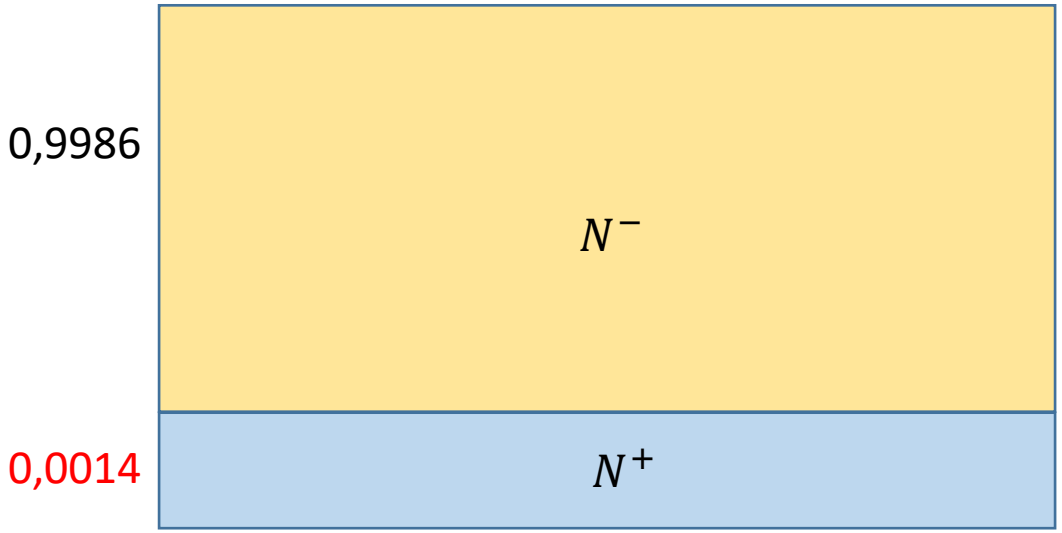
FALSE NEGATIVE, $\cong 0{,}0003$

CELKEM: $1{,}0000$

Kdy přistoupit k screeningovým testům?

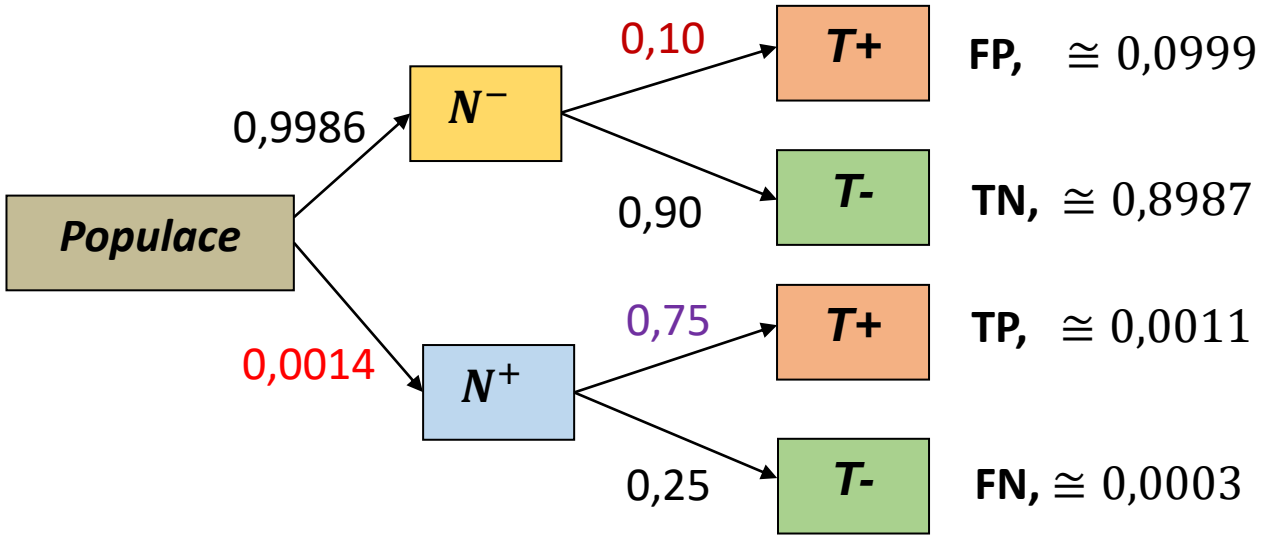
5. Pravděpodobnost výskytu rakoviny prsu je u žen ve věku 40-50 let cca 0,14 %. Podle studií naznačí mamograf u žen, které rakovinu nemají, nesprávně přítomnost nemoci pouze asi v 10 % případů. Pokud naopak rakovinu mají, odhalí ji asi v 75 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že 40 letá (bezsymptomatická) žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího screeningového mamografického vyšetření pozitivní? (dle SILVER, Nate. *Signál a šum: mnoho předpovědí selže, některé ne*. Praha: Paseka, 2014. ISBN 978-80-7432-440-6.)

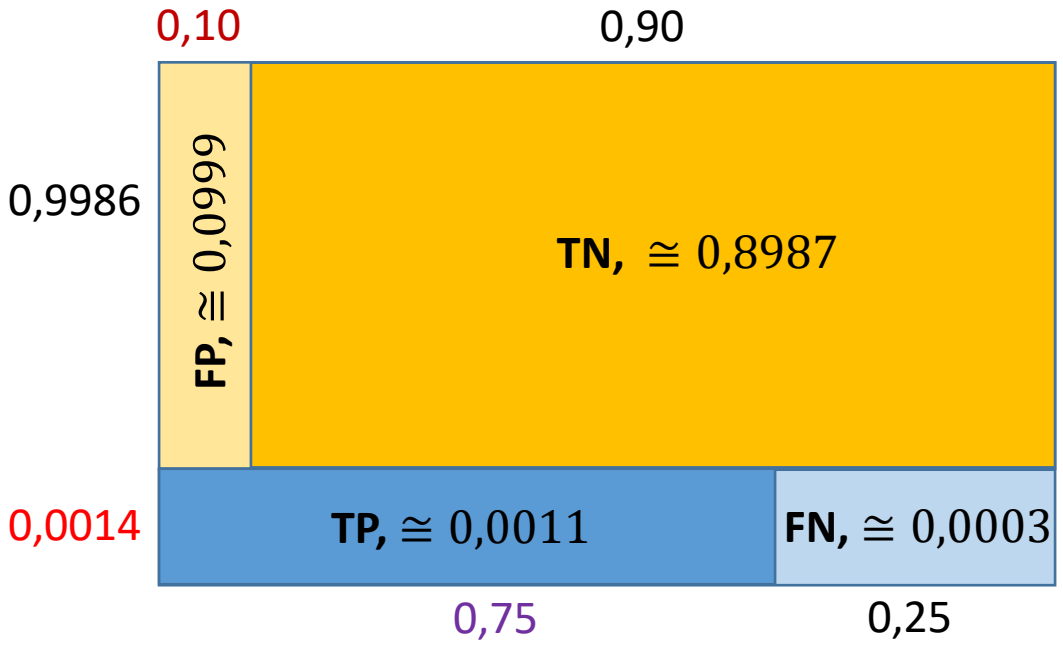




Kdy přistoupit k screeningovým testům?

5. Pravděpodobnost výskytu rakoviny prsu je u žen ve věku 40-50 let cca 0,14 %. Podle studií naznačí mamograf u žen, které rakovinu nemají, nesprávně přítomnost nemoci pouze asi v 10 % případů. Pokud naopak rakovinu mají, odhalí ji asi v 75 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že 40 letá (bezsymptomatická) žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího screeningového mamografického vyšetření pozitivní? (dle SILVER, Nate. *Signál a šum: mnoho předpovědí selže, některé ne*. Praha: Paseka, 2014. ISBN 978-80-7432-440-6.)

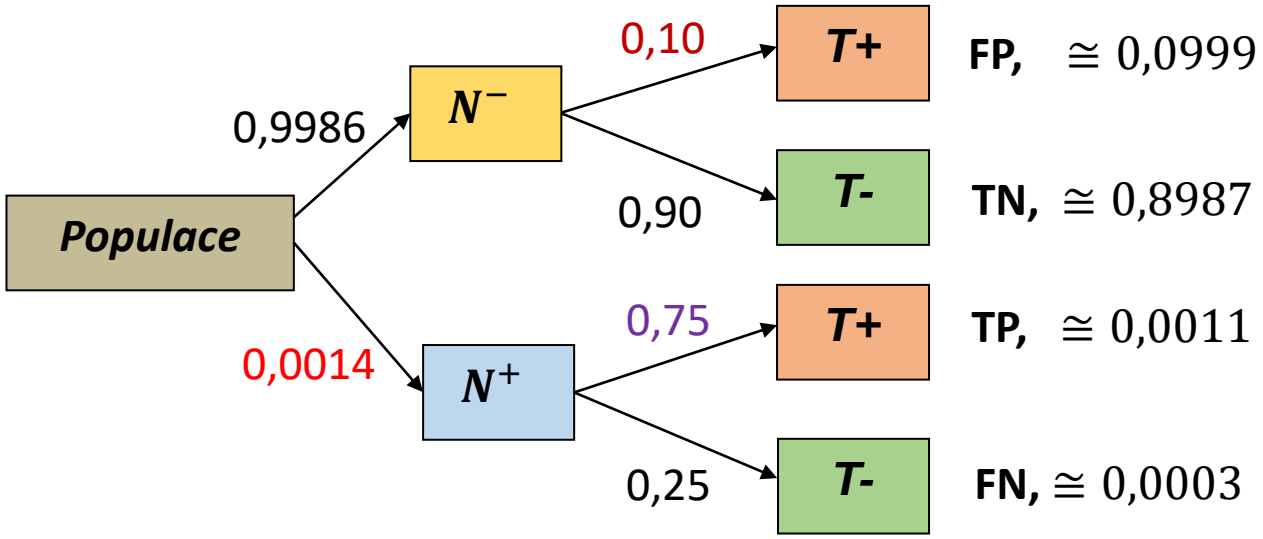


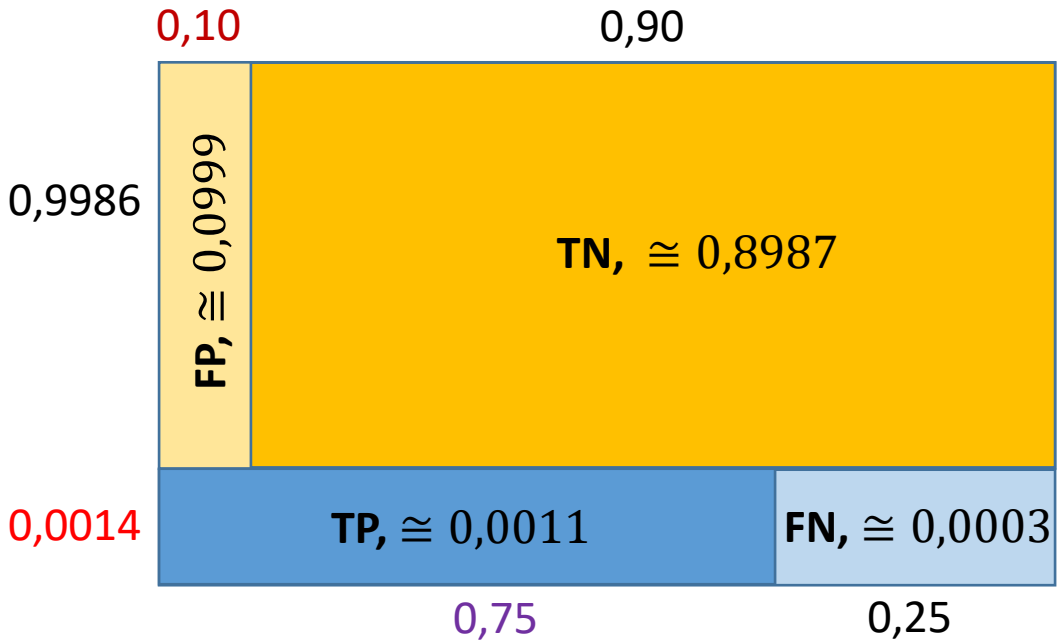


Kdy přistoupit k screeningovým testům?

Jaká část z provedených mamografických vyšetření vyjde „pozitivní“?

$$P(T+) = P(TP) + P(FP) = 0{,}0011 + 0{,}0999 = 0{,}1010, \text{ tj. } \textbf{cca 10 \%}$$



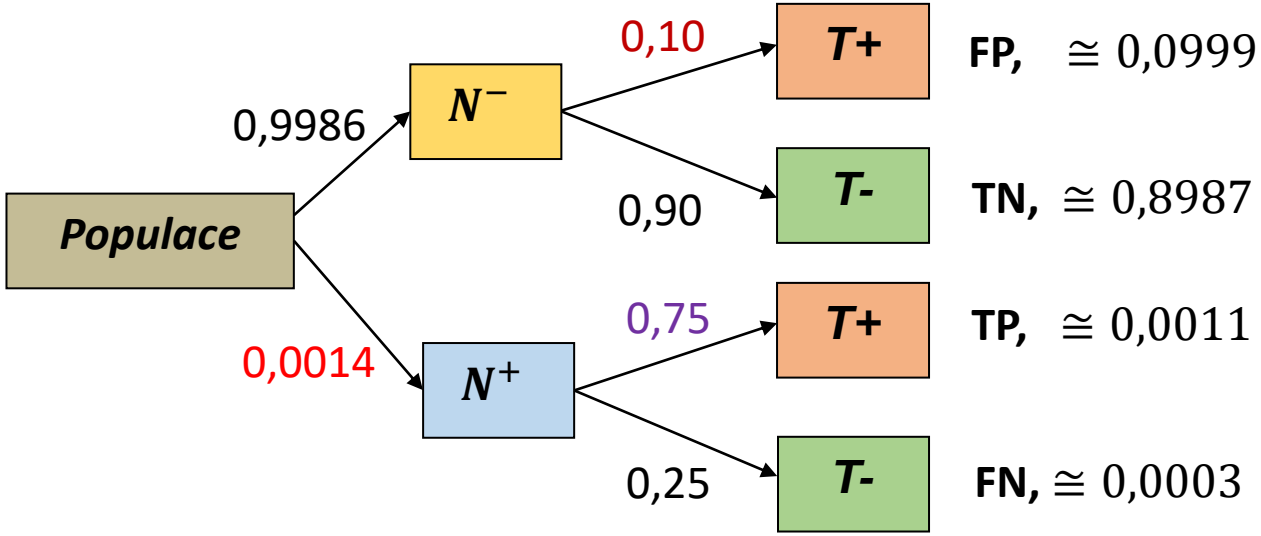


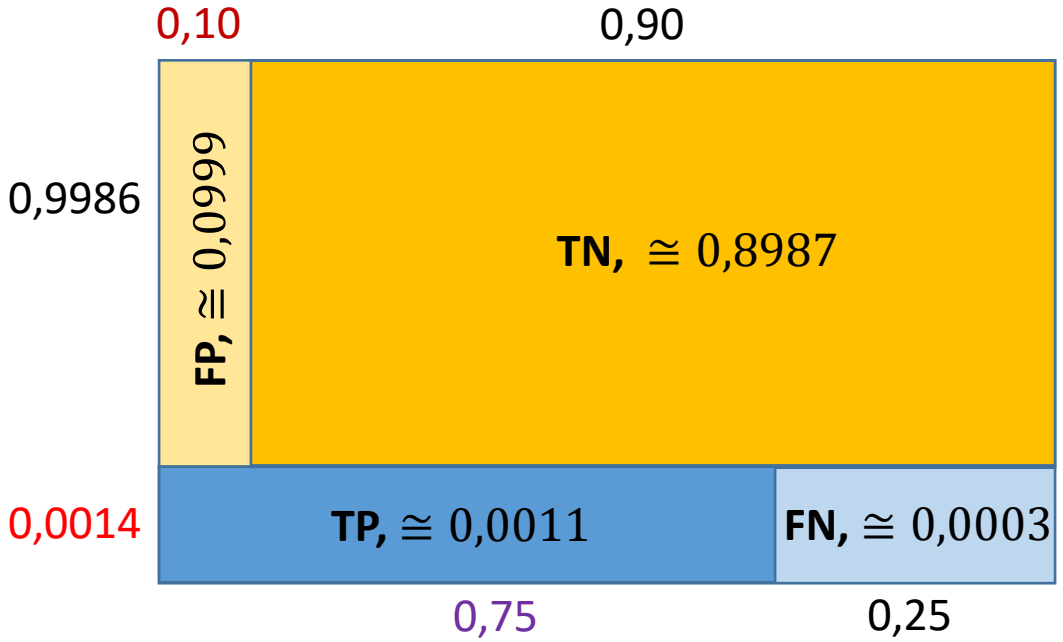
Kdy přistoupit k screeningovým testům?

Jaká je pravděpodobnost, že žena má rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího vyšetření pozitivní?

$$P(N+|T+) = ?$$

$$P(N+|T+) = \frac{P(N+ \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(TP)}{P(TP)+P(FP)} = \frac{0{,}0011}{0{,}0011+0{,}0999} \cong 0{,}0104, \text{ tj. } \textbf{cca } \textbf{1{,}0 \%}$$





Screeningové mamografické vyšetření žen ve věku 40-50 let

a) Jaká je p-st, že žena ve věku 40-50 let má rakovinu prsu?

0,14 % apriorní pravděpodobnost (prevalence)

a) Jaká je p-st, že žena ve věku 40-50 let má rakovinu prsu, víte-li, že měla pozitivní výsledek mamografického vyšetření?

1,0 % aposteriorní pravděpodobnost

změna vnímání reality
ve světle nových informací

POZOR!

Je-li naše apriorní přesvědčení silné, dokáže být překvapivě odolné i ve světle nových důkazů.

Screeningové mamografické vyšetření žen ve věku 40-50 let

a) Jaká je p-st, že žena ve věku 40-50 let má rakovinu prsu?

0,14 % apriorní pravděpodobnost (prevalence)

a) Jaká je p-st, že žena ve věku 40-50 let má rakovinu prsu, víte-li, že měla pozitivní výsledek mamografického vyšetření?

1,0 % aposteriorní pravděpodobnost

změna vnímání reality
ve světle nových informací

POZOR!

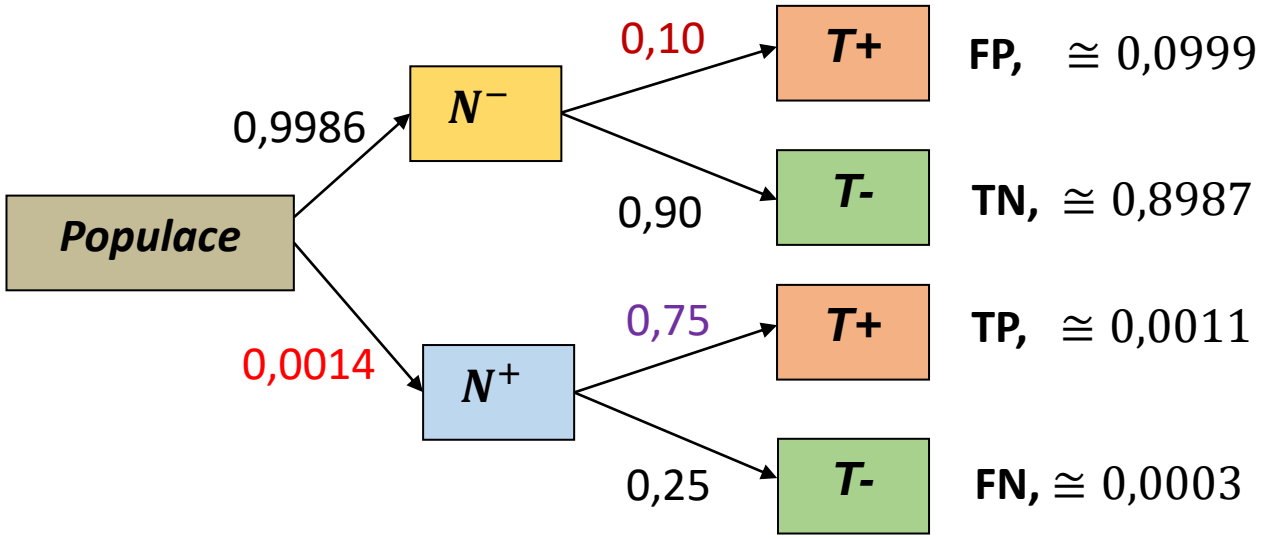
Výsledky platí pouze pro ženy v dané věkové kategorii,
které vyšetření podstoupily pouze v rámci screeningu, tj. bez jakýchkoliv symptomů onemocnění!!!

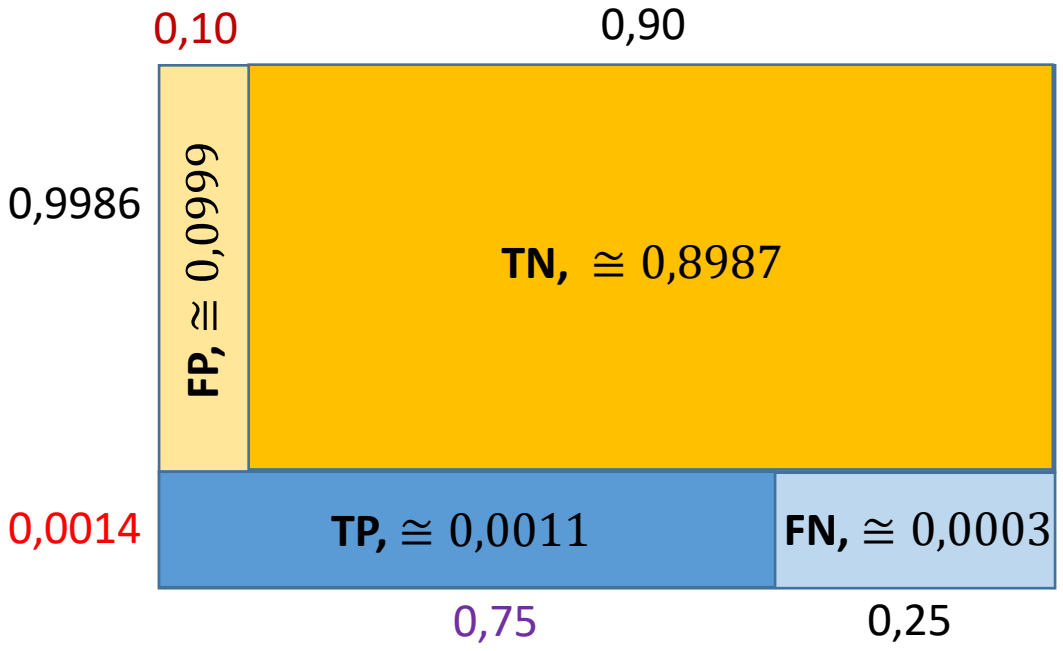
Kdy přistoupit k screeningovým testům?

Jaká je pravděpodobnost, že žena nemá rakovinu prsu, byl-li výsledek jejího vyšetření negativní?

$$P(N-|T-) = ?$$

$$P(N-|T-) = \frac{P(N- \cap T-)}{P(T-)} = \frac{P(TN)}{P(TN)+P(FN)} = \frac{0{,}8987}{0{,}8987+0{,}0003} \cong 0{,}9996, \text{ tj. } \textbf{prakticky jistě}$$





Screeningové mamografické vyšetření žen ve věku 40-50 let

a) Jaká je p-st, že žena ve věku 40-50 let nemá rakovinu prsu?

99,86 % apriorní pravděpodobnost (prevalence)

a) Jaká je p-st, že žena ve věku 40-50 let nemá rakovinu prsu, víte-li, že měla negativní výsledek mamografického vyšetření?

99,96 % aposteriorní pravděpodobnost

Screeningové testy

pozitivně testovaný $\neq$ nemocný / nakažený

- Při malé prevalenci onemocnění je obvykle mezi pozitivně testovanými vysoký podíl falešně pozitivních.
- Neznáme-li senzitivitu a specificitu testu, nelze vyvářet smysluplné závěry o výsledcích screeningu.
- Senzitivitu a specificitu testu udávanou výrobcem je nutno verifikovat za provozních podmínek testování!

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY