VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Matematická analýza 1

Cvičení – pracovní listy

Poslední aktualizace: 20. 12. 2020

Martina Litschmannová, Petra Vondráková

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Definice, věty i mnohé příklady jsou převzaty z:

[1] BOUCHALA, Jiří. Matematická´ analýza 1. Ostrava: VŠB-TU, 1998. Skriptum.

[2] KUBEN, Jaromír a Petra Šarmanová. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1192-8. Dostupné také z: http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm (multimediální výukové CD)

[3] PLCH, Roman - ŠARMANOVÁ, Petra - SOJKA, Petr. *Integrální počet funkcí více proměnných* [online]. 2 vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2012 [cit. 2016-09-15]. Elportál. Dostupné z: http://is.muni.cz/elportal/?id=987409 . ISSN 1802-128X.

Obsah

1. cvičení – Množiny a výroky (opakování ze SŠ) 1

1.1 Množiny 1

1.2 Výroková logika 3

1.3 logické výstavbě matematiky 7

2. cvičení – Matematická indukce; Supremum, Infimum; Kvadratické rovnice a nerovnice, Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou 10

2.1 Důkaz matematickou indukcí 10

2.2 Supremum a infimum množiny 13

2.3 Rovnice a nerovnice - základní pojmy 14

2.4 Kvadratické rovnice a nerovnice 15

2.5 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou 17

3. cvičení - Reálné funkce jedné reálné proměnné – vybrané vlastnosti a grafy funkcí, Funkce inverzní, Funkce mocninné a $\boldsymbol{n}$-tá odmocnina, Funkce exponenciální a logaritmické 21

3.1 Funkce - Základní pojmy 21

3.2 Vybrané vlastnosti funkcí 21

3.3 Operace s funkcemi 23

3.4 Transformace grafu funkce 25

3.5 Inverzní funkce 27

3.6 Základní elementární funkce 29

3.7 Mocninné funkce a funkce $\boldsymbol{n}$-tá odmocnina 30

3.8 Exponenciální a logaritmické funkce 33

4. cvičení – Goniometrické a cyklometrické funkce. Základní goniometrické rovnice a nerovnice.. 39

4.1 Goniometrické funkce 39

4.2 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku 40

4.3 Cyklometrické funkce 43

4.4 Goniometrické rovnice 46

4.5 Goniometrické nerovnice 49

4.6 Slovní úlohy vedoucí na gon. rovnice 51

4.7 Definiční obory - opakování 52

5. cvičení – Posloupnosti a limita posloupnosti (opakování ze SŠ) 53

5.1 Základní pojmy 53

5.2 Aritmetická posloupnost 54

5.3 Geometrická posloupnost 54

5.4 Limita posloupnosti 54

5.5 Výpočet limit 57
6. cvičení – Limita a spojitost funkce 64
6.1 Limita funkce 64
6.2 Jednostranné limity 64
6.3 Vlastnosti limit 65
6.4 Spojitost 65
6.5 Výpočet limit 66
7. cvičení Využití limit – Derivace 74
7.1 Definice derivace 74
7.2 Pravidla pro počítání s derivacemi 75
7.3 Derivace vyšších řádů 79
7.4 Fyzikální význam derivace 82
8. cvičení – L'Hospitalovo pravidlo 83
8.1 L'Hospitalovo pravidlo (LP) 83
8.2 Limity typu $\mathbf{0} \cdot \pm\infty$ 85
8.3 Limity typu $\infty - \infty$ 86
8.4 Limity typu $f(x)^{g(x)}$ 87
8.5 Spojitost funkce 88
8.6 Další příklady na LP 89
9. cvičení – Průběh funkce 91
9.1 Monotonie 91
9.2 Lokální extrémy 92
9.3 Konvexnost, konkávnost 94
9.4 Asymptoty grafu funkce 96
9.5 Průběh funkce 99
10. cvičení – Globální extrémy, Aproximace funkce polynomem 103
10.1 Globální extrémy 103
10.2 Aproximace funkce polynomem 106
10.3 Taylorův polynom 108
10.4 Taylorův vzorec 109
11. cvičení - Úvod do integrálního počtu 112
11.1 Několik poznámek na úvod 112
11.2 Základní integrační metody 115
Metoda Per Partes 115

První substituční metoda 118
12. cvičení - Úlohy týkající se rozkladu rac. lomené funkce na parciální zlomky 121
12.1 Polynomy 121
12.2 Rozklad polynomu na součin 122
12.3 Rozklad na parciální zlomky 123
12.4 Integrace racionální lomenné funkce 127
13. cvičení - Další typy integrálů 132
13.1 Integrály typu $\int R(e^x)dx$, $\int R(ln\ x)\ dx$ 132
13.2 Integrály obsahující odmocniny 133
13.3 Integrály obsahující goniometrické funkce 135
14. cvičení - Výpočet určitého integrálu (+ aplikace) 138
14.1 Metoda per partes pro určitý integrál 142
14.2 Substituční metoda pro určitý integrál 143
14.3 Geometrické aplikace určitého integrálu 145

1. cvičení – Množiny a výroky (opakování ze SŠ)

1.1 Množiny

Definice 1.1
Množinou rozumějme soubor (souhrn) navzájem různých (rozlišitelných) matematických či jiných objektů. Jednotlivé objekty, které patří do dané množiny, se nazývají **prvky** množiny.

Zápis $a \in A$ znamená, že a je prvkem množiny A.
Zápis $a \notin A$ znamená, že a není prvkem množiny A.

Množiny zadáváme

- **výčtem prvků** (tj. do složených závorek; obsahuje-li množina A prvky a, b, c, píšeme $A = \{a, b, c\}$),
- **pomocí charakteristické vlastnosti** – zápis $B = \{x \in E: V(x)\}$ znamená, že množina B je tvořena prvky z množiny E a to pouze těmi, které mají vlastnost $V(x)$.

Množina, která neobsahuje žádný prvek se nazývá **prázdná množina** a označuje se $\emptyset$ nebo $\{\ \}$.

Definice 1.2
Nechť A, B jsou množiny. Říkáme, že množiny A, B **jsou si rovny** a píšeme $A = B$, jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B a každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A.

Příklad 1.1
Rozhodněte, zda $A = B$.

a) Nechť $A = \{2,4,5\}$, $B = \{5,4,2\}$.

b) Nechť $A = \{2,2\}$, $B = \{2\}$.

Definice 1.3
Nechť A, B jsou množiny. Říkáme, že množina A **je podmnožinou** množiny B a píšeme $A \subset B$, jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.

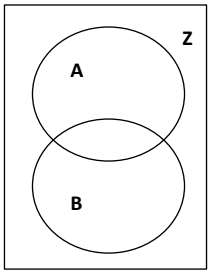
Příklad 1.2
Najděte všechny podmnožiny množiny $A = \{1,2,3\}$.

Základní množinové operace

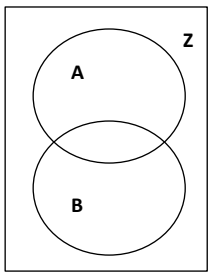
název operace	**označení**
sjednocení	$A \cup B$
průnik	$A \cap B$
rozdíl	$A \backslash B$
doplněk	A'

Příklad 1.3

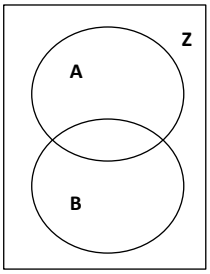
Vyšrafujte dané množiny ve Vennových diagramech.



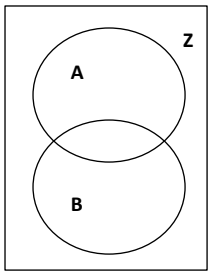
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \backslash B$



A'

Příklad 1.4

Nechť $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5\}$. *Určete* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

Početní pravidla pro operace s množinami

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ komutativní zákony
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ asociativní zákon
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ asociativní zákon
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ distributivní zákon
5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ distributivní zákon
6. $(A \cap B)' = A' \cup B', (A \cup B)' = A' \cap B'$ de Morganovy zákony
7. $(A')' = A$
8. $A \backslash B = A \cap B'$

Číselné množiny

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$	přirozená čísla
$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0 - 1; 2; \dots\}$	celá čísla
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}\right\}$	racionální čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla
$\mathbb{R}^-$	záporná reálná čísla
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina reál. čísel, tj. $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	iracionální čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla

Příklad 1.5
Nechť $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \mathbb{N}$. Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

1.2 Výroková logika

Definice 1.4
Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé.

Mějme výrok A. Je-li A pravdivý, zapisujeme tuto skutečnost $p(A) = 1$, je-li A nepravdivý, píšeme $p(A) = 0$. Symboly $0, 1$ se nazývají **pravdivostní hodnoty**.

Definice 1.5
Negací výroku budeme rozumět takový výrok, který popírá pravdivost výroku původního. Negaci výroku A budeme značit $\neg \boldsymbol{A}$.

Definice 1.6
Obměna výroku $\boldsymbol{A}$ je výrok, který říká totéž co výrok A, ale jinými slovy.

říklad 1.6

Určete, zda lze dané věty považovat za výrok. V případě, že jde o výrok, určete jeho pravdivostní hodnotu a výrok negujte.

a) $V1$: Hradcem Králové protéká řeka Labe.

b) $V2$: V kolik hodin odjíždí rychlík Pendolino z Prahy?

c) $V3$: Rychlík Pendolino odjíždí z Prahy v 16:15h.

d) $V4$: Kočka je bílá.

e) $V5$: Tato sklenice je plná.

f) $V6$: Ve vesmíru existuje planeta „obydlena“ živými organismy.

g) $V7: x < 5$

h) $V8: 4 < 5$

i) $V9: 4 + 5 = 10$

Jednotlivé výroky lze spojovat pomocí logických spojek:

název spojky	**označení**	**slovní vyjádření**
konjunkce	$A \wedge B$	A a zároveň B
disjunkce	$A \vee B$	A nebo B
implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A pak B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy, když B

Výrok obsahující logické spojky nazýváme **výrokem složeným**. Neobsahuje-li výrok logické spojky, nazývá se **výrok elementární**.

Definice 1.7
Mějme výroky A, B. Logické spojky, které spojují dva výroky, definujeme tabulkou pravdivostních hodnot vypsáním všech existujících kombinací.

Příklad 1.7

Doplňte následující tabulku pravdivostních hodnot.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Příklady na implikaci:

Když budou padat trakaře, zrušíme výuku.
Když nebudete dávat pozor, budu naštvaná.

Příklad 1.8

Doplněním tabulky pravdivostních hodnot dokažte, že platí

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B).$$

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg A \vee B)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Příklad 1.9

Doplněním tabulky pravdivostních hodnot dokažte, že platí následující vztahy pro negace.

1. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
2. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
3. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg(A \wedge B))$	$p(\neg A \vee \neg B)$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg(A \vee B))$	$p(\neg A \wedge \neg B)$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(A \wedge \neg B)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Definice 1.8
Výroková forma je tvrzení obsahující proměnné, z něhož se stane výrok po dosazení konstant za proměnné.

Z výrokové formy lze vytvořit výrok také tak, že všechny proměnné ve formě vážeme nějakou omezující podmínku, jednoznačně specifikující jejich hodnoty. Tato podmínka se nazývá kvantifikátor. V matematice se nejčastěji používají dva kvantifikátory:

- **obecný kvantifikátor**, který se označuje ∀ a čte se „pro každé,
- **existenční kvantifikátor**, který se označuje ∃ a čte se „existuje alespoň jeden“,
- **kvantifikátor jednoznačné existence**, který se označuje ∃! A čte se „existuje právě jeden“.

Jak negovat výroky s kvantifikátory?

Řekněme, že obecný a existenční kvantifikátor jsou navzájem opačné kvantifikátory.

Pokud je před výrokovým vzorcem více kvantifikátorů, změníme při negování všechny tyto kvantifikátory na opačné a potom provedeme negaci výrokového vzorce.

Například: $\neg(\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: V(x)) = \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: \neg V(x)$.

Příklad 1.10

Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků a určete jejich negace. (nepoužívejte „není pravda, že…“) Předpokládejte, že „velmi chytrý“ = má IQ vyšší než 140 bodů.

a) V1: Všichni studenti jsou velmi chytří.

b) V2: Existuje alespoň jeden člověk, který je velmi chytrý.

Příklad 1.11

Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků a určete jejich negace.

V	$p(V)$	$\neg V$
$\exists x \in \mathbb{R}: (x \geq 0) \vee (x^2 \geq 0)$		
$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: x \geq y$		
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: x \geq y$		
$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: x \geq y$		
$\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: x \geq y$		
$\forall x \in \mathbb{R}: (x > 0) \Rightarrow (x^3 \geq 0)$		
$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: (x \geq y) \Rightarrow (x^3 \geq y^3)$		

Výroková forma, která při dosazení libovolné kombinace pravdivostních hodnot nabývá pravdivostní hodnoty 1 se nazývá **tautologie**.

Příklad 1.12

Pomocí tabulky pravdivostních hodnot dokažte, že se jedná o tautologii:

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (vztah pro nepřímý důkaz)

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (vztah pro důkaz sporem)

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(\neg(A \wedge \neg B))$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

$p(A)$	$p(B)$	$p((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A))$	$p((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B))$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

1.3 logické výstavbě matematiky

Jednotlivé části této kapitoly jsou převzaty z [2].

Jak budovat vědeckou teorii?

1. Na počátku uvedeme **axiomy**, tj. výroky, jejichž pravdivost se předpokládá. V axiomech se vyskytují tzv. primitivní pojmy, které nedefinujeme. Axiomy vypovídají o primitivních pojmech vše, co je možné říci.
2. Pak následují **věty**, tj. pravdivé výroky, které lze odvodit pomocí pravidel logiky z axiomů nebo z vět předcházejících. Nedílnou součástí vět je jejich **důkaz**.
3. Další pojmy zavádíme pomocí definic, přičemž **definice** je vymezením obsahu a rozsahu nového pojmu.

Matematické důkazy

Věty mají tvar implikace $(\alpha \Rightarrow \beta)$ nebo ekvivalence $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$. Protože však lze každou ekvivalenci převést na implikaci, stačí se v důkazech soustředit na věty ve tvaru implikace.

Mějme větu $\alpha \Rightarrow \beta$, pak α jsou **předpoklady věty** a β jsou **tvrzení věty**. Slovně lze takovou větu vyjádříme některým z následujících způsobů:

- Nechť platí α. Potom platí β.
- Jestliže platí α, potom platí β.
- Když platí α, pak platí β.

Nedílnou součástí věty je její důkaz. **Důkazem** rozumíme logické deduktivní odvození výroku z jiných pravdivých výroků. Používáme následující typy důkazů: přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí.

Princip matematických důkazů:

- **Přímý důkaz** vychází z pravdivosti předpokladů α a má tvar řetězce na sebe navazujících implikací, tj.

$$\alpha \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \ldots \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow \beta.$$

- **Nepřímý důkaz** využívá vztahu

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha).$$

(viz příklad 1.11)

Vyjdeme z $\neg\beta$ a přímým důkazem dokážeme $\neg\alpha$.

$$\neg\beta \Rightarrow \delta_1 \Rightarrow \delta_2 \ldots \Rightarrow \delta_n \Rightarrow \neg\alpha.$$

- **Důkaz sporem** využívá vztahu

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta).$$

(viz příklad 1.11)

Chceme ukázat, že není pravda, že platí α a zároveň neplatí β. Předpokládáme tedy současnou platnost α a $\neg\beta$ a postupně dojdeme k tzv. sporu. Spor je stav, kdy pro nějakou formuli γ ukážeme, že současně platí γ a $\neg\gamma$.

Příklad 1.13

Dokažte přímo, nepřímo i sporem, že $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2 \Rightarrow 6n + 3 > 13.$

2. cvičení – Matematická indukce; Supremum, Infimum; Kvadratické rovnice a nerovnice, Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

2.1 Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí je často používaná metoda dokazování v matematice, nejčastěji pokud pracujeme s přirozenými čísly nebo s nějakou jinou posloupností. Základním principem je, že dané tvrzení dokážeme pro nějaký první prvek, v přirozených číslech to nejčastěji je $n = 1$. To dokážeme prostým dosazením. V dalším, indukčním, kroku dokážeme implikaci „pokud tvrzení platí pro $n = a$, pak platí i pro $n = a + 1$“. Z těchto dvou kroků můžeme odvodit, že daný výraz platí pro všechna n (z nějaké množiny, se kterou zrovna pracujeme).

Věta 2.1: Princip matematické indukce
Nechť je dána množina $M \subset \mathbb{N}$ taková, že platí:
a) $1 \in M$,
b) $\forall n \in M: n + 1 \in M$.
Pak $M = \mathbb{N}$.

Příklad 2.1
Pomocí matematické indukce dokažte, že:
a) $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: n^2 \geq 2n + 1,$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : 2^n \geq n^2$,

e) Pro libovolné přirozené číslo n *je číslo* $n^3 + 2n$ *dělitelné třemi.*

2.2 Supremum a infimum množiny

Definice 2.1
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Každé číslo $k \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall x \in M: x \leq k,$$

nazýváme **horním odhadem** množiny M.

Existuje-li horní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **maximem** množiny M a značíme $\max M$.

Definice 2.2
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Existuje-li horní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **maximem** množiny M a značíme $\max M$.

Definice 2.3
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Nejmenší horní odhad množiny M nazýváme **supremem** množiny M a značíme $\sup M$.

Definice 2.4
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Každé číslo $l \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall x \in M: x \geq l,$$

nazýváme **dolním odhadem** množiny M.

Existuje-li dolní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **minimem** množiny M a značíme $\min M$.

Definice 2.5
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Existuje-li dolní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **minimem** množiny M a značíme $\min M$.

Definice 2.6
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Největší dolní odhad množiny M nazýváme **infimem** množiny M a značíme $\inf M$.

Příklad 2.2
Určete $\inf M$, $\sup M$ a v případě existence i $\min M$ a $\max M$:
a) $M = (-5; 7\rangle$,

b) $M = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + x - 1 > 0\}$.

2.3 Rovnice a nerovnice - základní pojmy

Rovnice (nerovnice) je zápisem rovnosti (nerovnosti) hodnot dvou výrazů.

Hodnoty neznámých, po jejichž dosazení do rovnice (nerovnice) získáme pravdivý výrok, nazveme **kořeny** dané rovnice (nerovnice).

Množinu, ve které hledáme všechny kořeny rovnice, označíme O a nazveme ji **oborem řešení rovnice**. Množinu, která vznikne jako průnik množiny O a množin, ve kterých jsou definovány výrazy *na levé i pravé straně rovnice*, označíme D a nazveme ji **definiční obor rovnice**. **Množinu všech kořenů dané rovnice** označíme písmenem K. Obdobnou terminologii pak používáme i u nerovnic.

Ekvivalentní rovnice (nerovnice)
Dvě rovnice (nerovnice) nazveme ekvivalentní, právě když mají stejnou množinu kořenů.

Ekvivalentní úprava
Úpravu rovnice nazveme ekvivalentní úpravou, právě když tato úprava převede rovnici na rovnici jinou, s ní ekvivalentní. Obdobně definujeme ekvivalentní úpravy nerovnic.

Neekvivalentní (důsledková) úprava
Úpravu rovnice nazveme důsledkovou úpravou, právě když tato úprava převede rovnici na rovnici jinou, pro niž platí, že množina kořenu původní rovnice je podmnožinou množiny kořenů nové rovnice. (Při použití důsledkových úprav je nutné dělat zkoušku.)

Ekvivalentní úpravy rovnic jsou:

- přičtení téhož čísla, nebo výrazu obsahující neznámou, který je definovaný v celém O, k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definovaný a nenulový v celém O,
- umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné (nebo naopak záporné) v celém O.

Ekvivalentní úpravy nerovnic jsou:

- přičtení téhož čísla, nebo výrazu obsahující neznámou, který je definován na celém O, k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran nerovnice číslem, nebo výrazem s neznámou, který je definovaný a kladný, pro všechny hodnoty neznámé z O,
- vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem, nebo výrazem s neznámou, který je záporný a definovaný v celém O, přitom znak nerovnosti se mění v obrácený,
- umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nezáporné v celém oboru řešení nerovnice O,
- umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nekladné v celém O a současným otočením znaménka nerovnosti.

2.4 Kvadratické rovnice a nerovnice

Příklad 2.2

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 1 = 0$

c) $2x^2 + x = 0$

d) $9t^2 + 12t + 4 = 0$

e) $a^2 + a + 1 = 0$

Příklad 2.3

Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $a^2 + a + 1 = 0$.

Příklad 2.4

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{5}{x-2} - \frac{7}{x-1} = \frac{3}{3-x}$.

Příklad 2.5

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $2x^2 + x - 1 > 0$

b) $9t^2 + 12t + 4 \leq 0$

c) $9t^2 + 12t + 4 > 0$

d) $9t^2 + 12t + 4 < 0$

e) $a^2 + a + 1 > 0$

2.5 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Zápis $|a - b|$ můžeme interpretovat jako vzdálenost obrazu čísla a od obrazu čísla b.

Příklad 2.6

Řešte v $\mathbb{R}$ dané rovnice a nerovnice.

a) $|x| = 3$

b) $|x| < 3$

c) $|x - 2| > 3$

d) $|x+2|=3$

e) $|2x+2|=4$

f) $|2-x|\geq 3$

g) $|2-3x|\geq 3$

Příklad 2.7

Řešte v $\mathbb{R}$ dané rovnice a nerovnice.

a) $2x + |x| = 1 + |1 - x|$

b) $|x^2 - 2x| < x$

3. cvičení
Reálné funkce jedné reálné proměnné – vybrané vlastnosti a grafy funkcí, Funkce inverzní, Funkce mocninné a n-tá odmocnina, Funkce exponenciální a logaritmické

3.1 Funkce - Základní pojmy

Definice 3.1
Nechť $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$ ($f: A \to \mathbb{R}$) nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné (dále jen **funkcí**). Množina A se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se $D(f)$

Ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in \mathbb{R}$ takový, že $y = f(x)$. Množinu všech takových $y \in \mathbb{R}$, k nimž existuje $x \in D(f)$, pak nazýváme **obor hodnot** funkce f a označujeme $H(f)$.

Zadání funkce

K zadání funkce f je nutné uvést jednak definiční obor $D(f)$ a jednak pravidlo (předpis), pomocí něhož je každému $x \in D(f)$ přiřazen právě jeden prvek $y \in H(f)$. Je-li funkce zadána pouze předpisem a definiční obor není výslovně uveden, pak za definiční obor pokládáme množinu takových $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis „smysl“.

Graf funkce

Definice 3.2
Grafem funkce $f: D(f) \to \mathbb{R}$ rozumíme množinu bodů

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f) \wedge y = f(x)\},$$

kde (x, y) značí bod roviny o souřadnicích x a y.

3.2 Vybrané vlastnosti funkcí

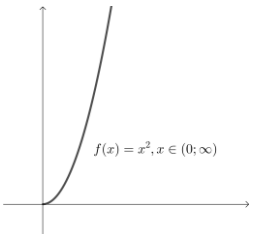
Monotónní funkce

Definice 3.3
Řekneme, že funkce je

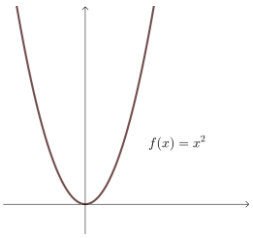
a) **rostoucí (resp. klesající) na množině $M \subset D(f)$**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$),
b) **nerostoucí (resp. neklesající) na množině $M \subset D(f)$**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$),
c) **rostoucí (resp. klesající, nerostoucí, neklesající)**, je-li rostoucí resp. klesající, nerostoucí, neklesající) na celém svém definičním oboru.

Příklad 3.1

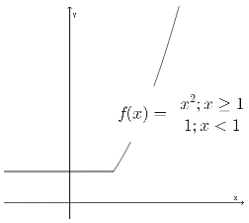
Vyšetřete monotónii následujících funkcí.



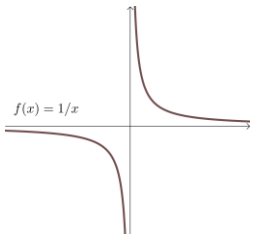
a)



b)



c)



d)

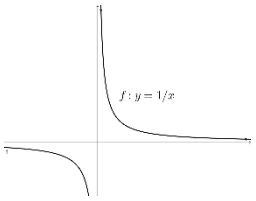
Sudá a lichá funkce

Definice 3.3

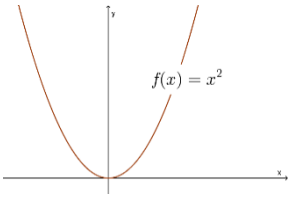
Funkce f **se nazývá sudá (resp. lichá)**, pokud platí:

a) Je-li $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$.

b) $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pro všechna $x \in D(f)$.



funkce lichá (graf souměrný podle počátku)



funkce sudá (graf souměrný podle osy y)

Příklad 3.2

Určete, zda jsou následující funkce sudé nebo liché.

a) $f: y = \frac{x}{x^2+1}$

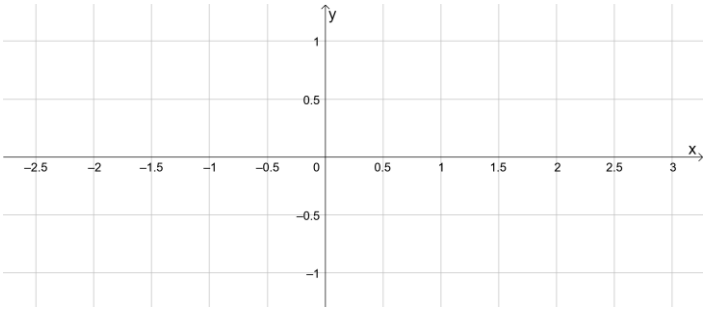
b) $g: y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Periodická funkce

Definice 3.4
Řekneme, že funkce f je periodická s periodou $p, p \in \mathbb{R}^+$, jestliže platí:
a) Je-li $x \in D(f)$, pak $x + p \in D(f)$.
b) $f(x) = f(x + p)$ pro všechna $x \in D(f)$.

Příklad 3.3
Sestrojte graf funkce f, víte-li:
- $D(f) = \mathbb{R}$,
- *f je lichá,*
- $f(0) = 0 = f(\frac{3}{2})$,
- *f je periodická s periodou 3,*
- $\forall x \epsilon \left(0; \frac{3}{2}\right) : f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Vypočtěte $f(1\,000), f(\pi), f\left(-\sqrt{2}\right)$.



3.3 Operace s funkcemi

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí

Definice 3.5
Nechť f a g jsou funkce. **Součtem $f + g$, rozdílem $f - g$, součinem $f \cdot g$ a podílem f/g funkcí f a g** nazveme funkce, které jsou dány předpisem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g)\ \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}.$$

Absolutní hodnotou funkce f *nazýváme funkci definovanou předpisem*
$$|f|(x) = |f(x)| \qquad pro\ x \in D(f).$$

Skládání funkcí

Definice 3.6
Nechť f a g jsou funkce. **Složenou funkcí $f \circ g$** nazveme funkci definovanou předpisem

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \qquad pro\ x \in D(g) \wedge g(x) \in f(x).$$

Funkci f nazýváme **vnější složka** a funkci g nazýváme **vnitřní složka** složené funkce $f \circ g$.

Příklad 3.4

Jsou dány funkce $f: y = 3 - 2x$ a $g: y = \ln x$.

a) Určete složenou funkci $f \circ g$ a její definiční obor.

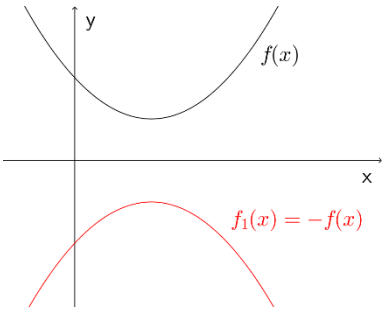
b) Určete složenou funkci $g \circ f$ a její definiční obor.

3.4 Transformace grafu funkce

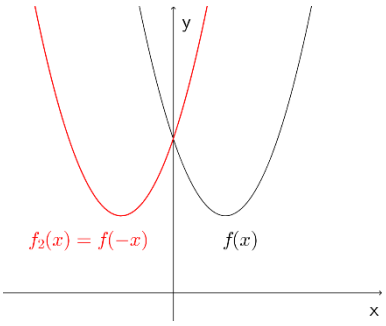
Nechť je dána funkce $f: y = f(x), x \in D(f)$. Připomeňme si, jak lze pomocí grafu funkce f sestrojit grafy následujících funkcí:

a) $f_1: y = -f(x)$,
b) $f_2: y = f(-x)$,
c) $f_3: y = f(x) + b$,
d) $f_4: y = f(x - a)$,
e) $f_5: y = k \cdot f(x)$,
f) $f_6: y = f(mx)$,

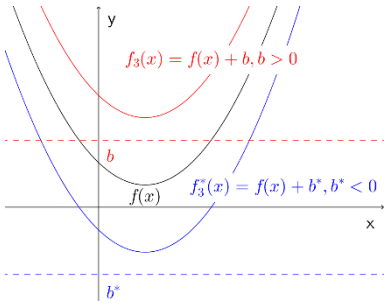
kde $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, k \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+$ jsou konstanty.



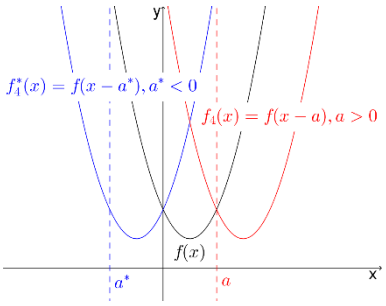
a) grafy funkcí f a f_1 jsou souměrné podle osy x



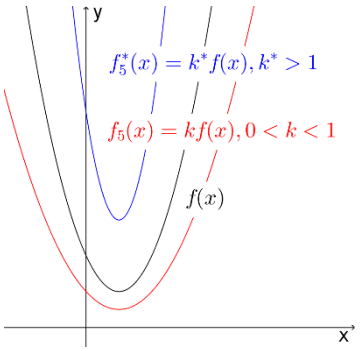
b) grafy funkcí f a f_2 jsou souměrné podle osy y



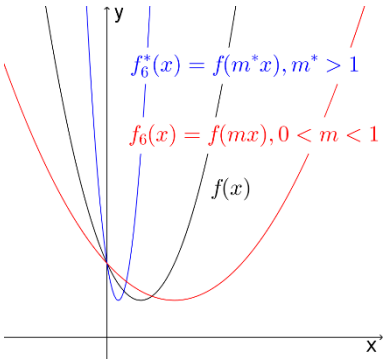
c) graf funkce f_3 je posunutím grafu funkce f o $|b|$ ve směru osy y (je-li $b > 0$, jde o posunutí „nahoru“; (je-li $b < 0$, jde o posunutí „dolů“)



d) graf funkce f_4 je posunutím grafu funkce f o $|a|$ ve směru osy x (je-li $a > 0$, jde o posunutí „doprava“; je-li $b < 0$, jde o posunutí „doleva“)



e) graf funkce f_5 je deformací grafu funkce f ve směru osy y (je-li $k > 1$, jde o k násobné „zvětšení“ ve směru osy y; je-li $0 < k < 1$, jde o k násobné „zmenšení“ ve směru osy y)



f) graf funkce f_6 je deformací grafu funkce f ve směru osy x (je-li $m > 1$, jde o m násobné „zúžení“ ve směru osy y; je-li $0 < m < 1$, jde o m násobné „rozšíření“ ve směru osy y)

Příklad 3.5

Nakreslete v jednom souřadnicovém systému grafy funkcí $f: y = x^2$ a $f_1, f_2, \dots, f_4$. Využijte úpravy předpisu funkcí doplněním na čtverec.

a) $f_1: y = x^2 + 4x - 3$

b) $f_2: y = x^2 - 6x - 7$

c) $f_3: y = 2x^2 - 8x + 10$

d) $f_4: y = -3x^2 - 2x + 1$

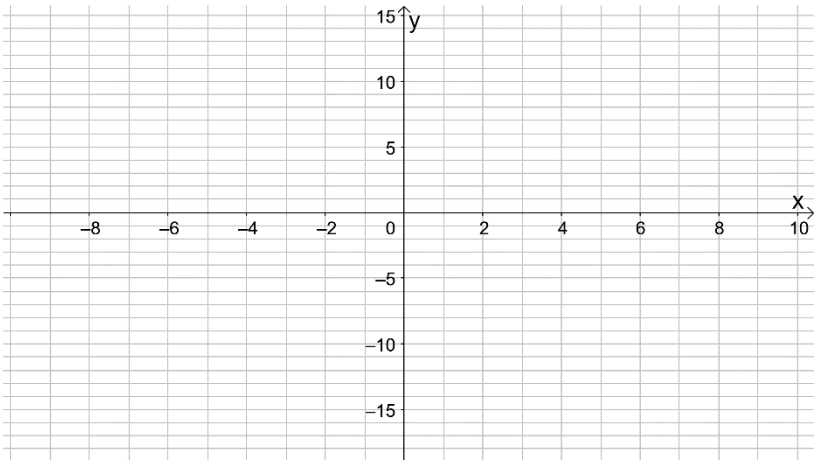
Poznámka:

Rozklad kvadratického trojčlenu **doplněním na čtverec** – „přinutíme fungovat“ druhou mocninu trojčlenu a následně rozdíl čtverců.

Například:

$$x^2 + 8x + 7 = \underbrace{x^2 + 8x}_{x^2 + 2Bx} + \underbrace{??}_{B^2} \quad \underbrace{- ?? + 7 = x^2 + 8x}_{x^2 + 2Bx} + \underbrace{16 - 16}_{B^2} \quad \underbrace{+ 7 = (x+4)^2}_{(x+B)^2} - 9 =$$

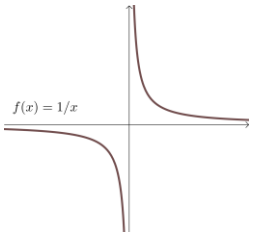
$$= [(x+4) - 3][(x+4) + 3] = (x+1)(x+7)$$



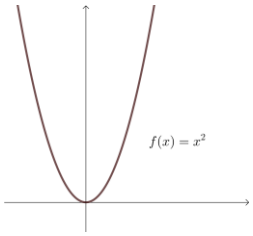
3.5 Inverzní funkce

Prostá funkce

Definice 3.7
Řekneme, že funkce f **je prostá**, právě když pro každé $x_1, x_2 \in D(f)$ takové, že $x_1 \neq x_2$ platí, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.



funkce je prostá



funkce není prostá

Poznámka: Složením dvou prostých funkcí vznikne funkce prostá.

Příklad 3.6

Dokažte, že $f: y = \frac{x+2}{x-3}$ je prostá.

Inverzní funkce

Definice 2.13
Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} se nazývá funkce inverzní k funkci f, jestliže platí:
a) $D(f^{-1}) = H(f)$.
b) $\forall y \in D(f^{-1})\colon f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

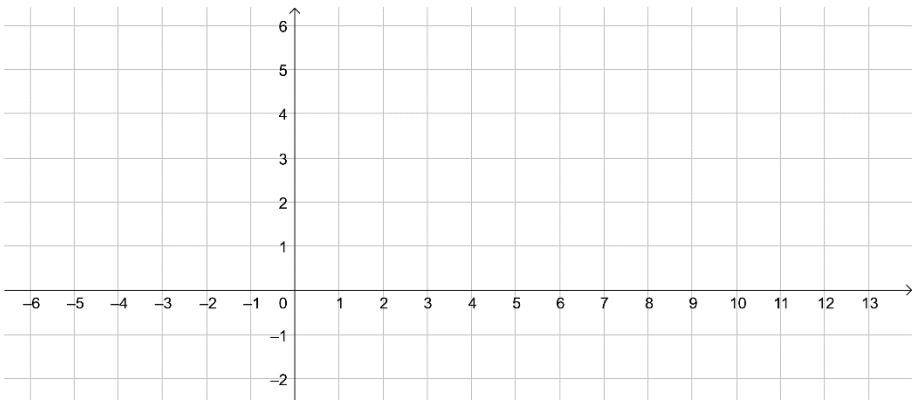
Věta 2.1
Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} existuje právě tehdy, když f je funkce prostá.

Věta 2.2
Nechť f je prostá funkce a f^{-1} funkce k ní inverzní. Potom platí:
1. f^{-1} je prostá funkce.
2. Je-li f rostoucí, resp. klesající, potom f^{-1} je rostoucí, resp. klesající.
3. $\forall x \in D(f)\colon (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.
   $\forall x \in D(f^{-1})\colon (f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$.
4. Inverzní funkce k f^{-1} je f, tj. $(f^{-1})^{-1} = f$.
5. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle přímky $p\colon y = x$.

Jak postupujeme, chceme-li najít funkci inverzní k funkci f?
1) Ověříme, že funkce f je prostá.
2) Určíme definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$ funkce f.
3) Určíme $D(f^{-1})$ a určíme předpis f^{-1}.

Příklad 3.7

Ověřte, že k funkci $f\colon y = \frac{x+2}{x-3}$ existuje funkce inverzní, najděte ji a načrtněte její graf.



3.6 Základní elementární funkce

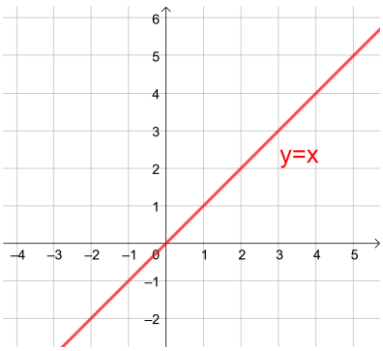
Základní elementární funkce (nutno znát definice a grafy – zopakujte si například dle *Čepička a kol., Herbář funkcí*, dostupné online z http://mi21.vsb.cz/modul/herbar-funkci)

- Exponenciální funkce
- Logaritmická funkce
- Konstantní funkce
- Mocninné funkce
- Goniometrické funkce
- Cyklometrické funkce
- Hyperbolické funkce
- Hyperbelometrické funkce

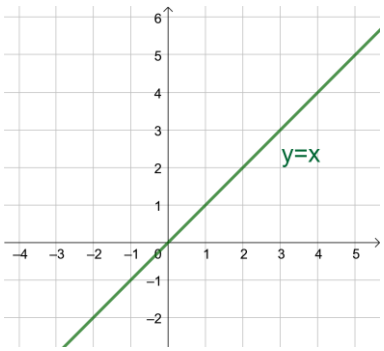
Definice 3.1
Elementárními funkcemi nazýváme funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu algebraických operací (tj. operací $+, -, \cdot, :$) a skládání funkcí.

3.7 Mocninné funkce a funkce n-tá odmocnina

$$f: y = x^n; n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$$

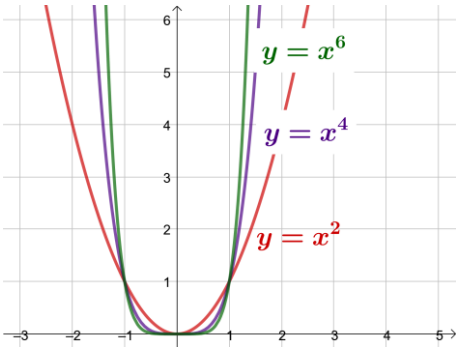


$n = 1$: f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

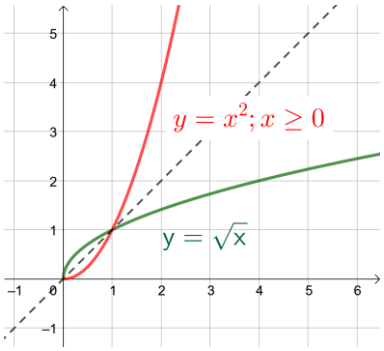


$f: y = x \Rightarrow f^{-1}: y = x$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R}, H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

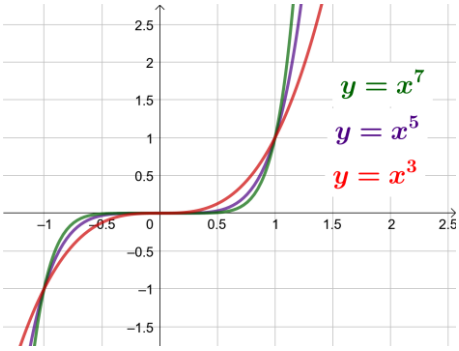


n sudé: f není prostá $\Rightarrow \nexists f^{-1}$

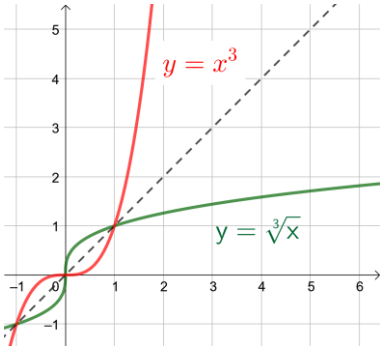


$f: y = x^n; n\ je\ sudé; x \in \langle 0; \infty) \Rightarrow f^{-1}: y = \sqrt[n]{x}$

$D(f^{-1}) = \langle 0; \infty), H(f^{-1}) = \langle 0; \infty)$



n liché: f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$



$f: y = x^n; n\ je\ liché \Rightarrow f^{-1}: y = \sqrt[n]{x}$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R}, H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

POZOR!

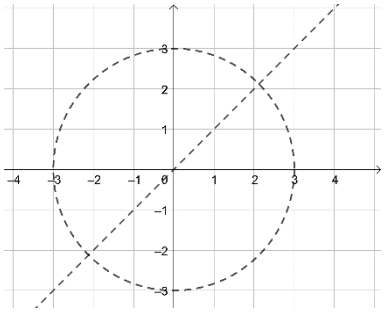
- $\sqrt{4} = 2, \sqrt{4} \neq -2$ (viz graf $f: y = \sqrt{x}$)
- $\sqrt{x^2} = x$ platí pouze pro $x \in \langle 0; \infty)$
- $x \in (-\infty; 0) \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$

} $\sqrt{x^2} = |x|$

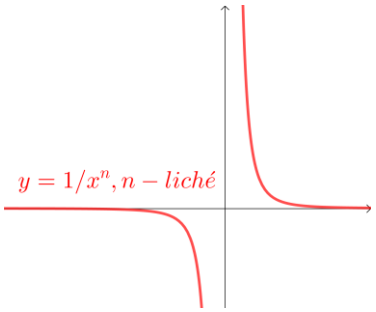
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ platí pouze pro $x \in \langle 0; \infty)$

Příklad 3.8

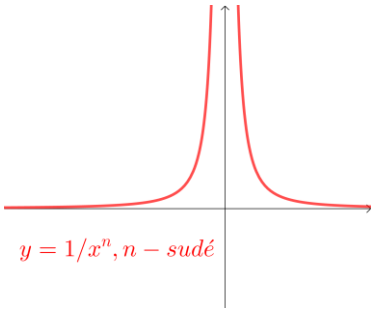
Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci $f: y = \sqrt{9 - x^2}, D(f) = \langle 1; 2 \rangle$.



$$f: y = x^{-n}; n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad kde\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$



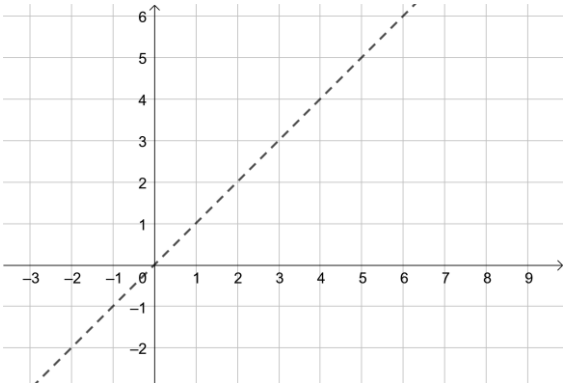
$f: y = x^{-n}; n\ je\ liché$
$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, H(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$



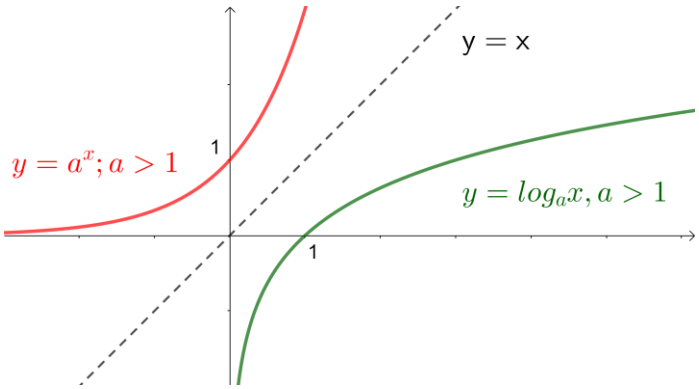
$f: y = x^{-n}; n\ je\ sudé$
$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, H(f) = (0; \infty)$

Příklad 3.9

Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci $f: y = \frac{x+1}{x-3}$.

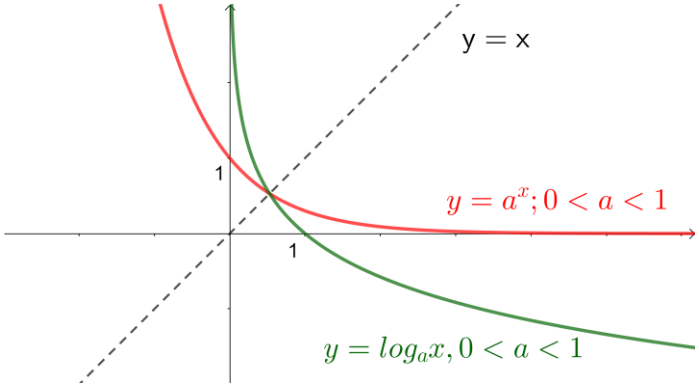


3.8 Exponenciální a logaritmické funkce



$f: y = a^x; a > 1$
$D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (0; \infty)$
f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$f^{-1}: y = \log_a x\,; a > 1$
$D(f^{-1}) = (0; \infty); H(f^{-1}) = \mathbb{R}$



$f: y = a^x; 0 < a < 1$
$D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (0; \infty)$
f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$f^{-1}: y = \log_a x\,; 0 < a < 1$
$D(f^{-1}) = (0; \infty);\ H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

POZOR!

- $\log_a a^x = x$ platí $\forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a x} = x$ platí pouze pro $x \in (0; \infty)$

Příklad 3.10

Určete pravdivostní hodnotu daných výroků.

a) $V1: 3^{0,375} > 0$
b) $V2: 3^{-0,375} > 0$
c) $V3: 3^{0,375} > 1$
d) $V4: 3^{-0,375} > 1$
e) $V5: (-3)^{0,375} > 0$
f) $V6: 3^{0,375} > 0{,}3^{0,375}$
g) $V7: 3^{-0,375} > 0{,}3^{-0,375}$

Příklad 3.11

Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^x > 0$

b) $0{,}3^x > 0$

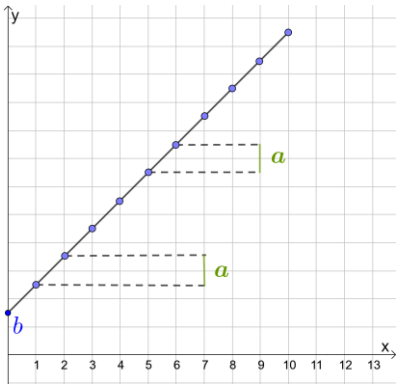
c) $3^x > 1$

d) $0{,}3^x > 1$

Lineární růst vs. Exponenciální růst

Lineární růst

$f: y = ax + b; kde\ a > 0, b \in \mathbb{R}\ (v\ praxi\ většinou\ b > 0), x\ (čas) \geq 0$



$f(0) = b$, *tj.* b označuje počáteční stav

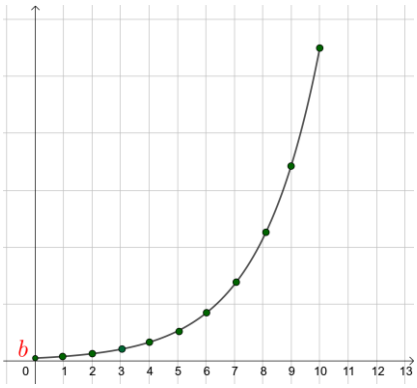
$f(x) = ax + b$

$f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b$

} přírůstek za časovou jednotku: $f(x) - f(x-1) = a$

Exponenciální růst

$f: y = b \cdot a^x; kde\ a > 1, b > 0, x\ (čas) \geq 0$



$f(0) = b$, *tj.* b označuje počáteční stav

$f(x) = b \cdot a^x$

$f(x-1) = b \cdot a^{x-1} = b \cdot a^x \cdot \frac{1}{a}$

} přírůstek za časovou jednotku: $f(x) - f(x-1) = a^x \cdot b \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)$

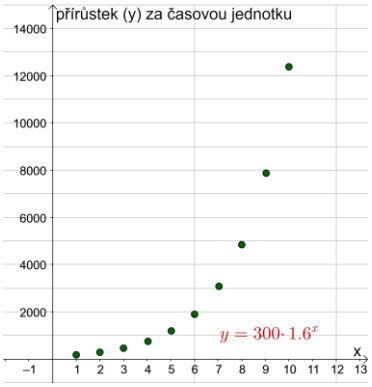
koeficient růstu za časovou jednotku: $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$

Dokážete předvídat důsledky exponenciálního růstu?

Příklad 3.12:

Velkovezír Sissa ben Dahir, jenž je považován za vynálezce šachů. Hru daroval indickému králi, který velkovezírovi nabídl, aby si sám řekl, co chce za odměnu. Dahir odpověděl, že by rád rýži, a to tak, že za první políčko šachovnice dostane jedno zrnko, za druhé dvě zrnka, za třetí čtyři, za čtvrté osm zrnek a tak dále až po poslední čtyřiašedesáté políčko. S každým dalším políčkem žádal jen dvojnásobek rýže, která byla na políčku předešlém. Král ocenil jeho skromnost, ale odměna se mu zdála malá. Avšak učenec trval na svém. Sběrači pšenice proto odešli na čtyři strany prostorné indické země, načež králi došla nečekaná zpráva: V celé Indii není tolik pšeničných zrn, abyste mohl uspokojit přání Sissy ben Dahira. Kolik zrn měl velkovezír dostat za 64. políčko? Tipněte si a následně exaktně vypočtěte.

Šíření covid-19: exponenciální růst?



Demonstrace exponenciálního růstu – časová jednotka 5 dní, 25. 8. 2020 – bylo registrováno 302 nakažených, 15. září statistikové odhadli reprodukční číslo na 1,6 (**Pozor!** Epidemiologický model šíření nemoci nelze vytvořit jen pomocí tohoto jednoduchého exponenciálního modelu!!! Zamyslete se proč…)

***Zdroj**: Lázňovský,Kasík: Exponenciální růst mate i experty. Vyzkoušejte si, čím je tak nebezpečný. online: https://www.idnes.cz/technet/veda/jak-vypada-exponencialni-rust-covid-19-koronavirus.A200915_130739_veda_mla*

Logaritmus čísla $x > 0$ o základu $a > 0$, $a \neq 1$ je takové číslo y, pro které platí $a^y = x$, tj.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Příklad 3.13

Určete:

a) $log_2 8 =$

b) $log_{10} 100 = log\, 100 =$

c) $log_{\frac{2}{7}} \frac{7}{2} =$

d) $log_e e^3 = ln\, e^3 =$

Příklad 3.14

Určete pravdivost daných výroků:

a) $V1: log_3 5 > 0$

b) $V2: log_3 0{,}2 > 0$

c) $V3: log_{0,1} 5 > 0$

d) $V4: log_{0,1} 0{,}25 > 0$

e) $V5: log_3(-5) > 0$

f) $V6: log_3 1 > 0$

Věty o logaritmech

$\forall a, z \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+, c, n \in \mathbb{R}$:

1. Vztah mocniny a logaritmu: $a^{\log_a x} = x$ (např.: $e^{\ln x} = x, 10^{\log x} = x;\ 2^{\log_2 x} = x$)
2. Logaritmus součinu: $\log_a x\, y = \log_a x + \log_a y$
3. Logaritmus podílu: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. Logaritmus mocniny: $\log_a x^n = n \log_a x$
5. Podíl dvou logaritmů: $\frac{\log_a x}{\log_a z} = \log_z x$ (např.: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$)
6. Převod reálného čísla na logaritmus: $c = \log_a a^c$ (např.: $3 = \log_2 2^3 = \log 10^3 = \ln e^3$)

Příklad 3.15

Vypočtěte:

a) $log_3(81 \cdot 27)$

b) $log_6 9 + log_6 4$

c) $log_3 18 - log_3 2$

d) $log_3 9^4$

e) $3\, log_8 2$

Logaritmování

Rovnice $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je pro $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ ekvivalentní s rovnicí

$$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b \text{ pro } c \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}.$$

Tuto ekvivalentní úpravu nazýváme **logaritmování**.

Příklad 3.16

Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

a) $2^x = 10$

b) $3^x = 13^{x-1}$

c) $2^x \cdot 3^{x-1} = 4^{x+1}$

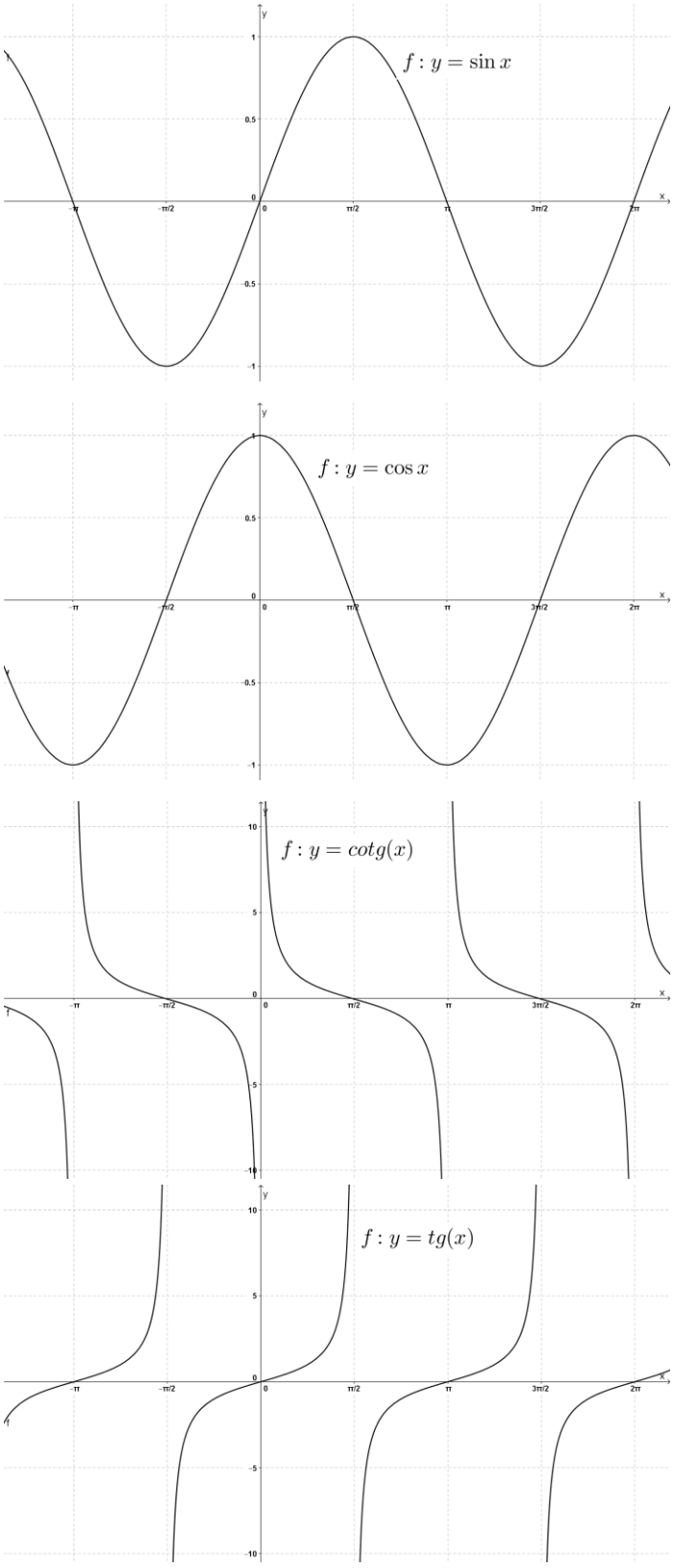
d) $3 \cdot 7^x - 7^{x-1} = 60$

Příklad 3.17

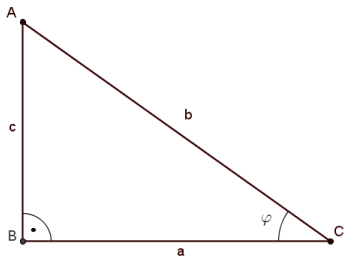
Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci $f: y = 2 + 3^{x-1}$.

4. cvičení – Goniometrické a cyklometrické funkce. Základní goniometrické rovnice a nerovnice.

4.1 Goniometrické funkce



4.2 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku



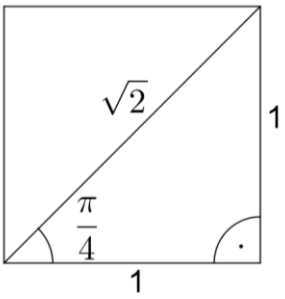
$$\sin\varphi = \frac{c}{b}$$

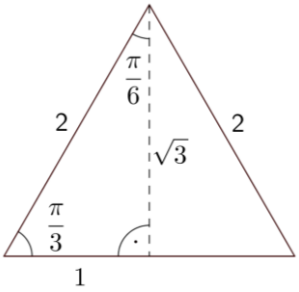
$$\cos\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}\ pro\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

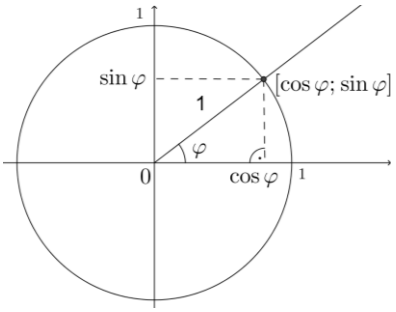
$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{tg\ \varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a}{c}\ pro\ \varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

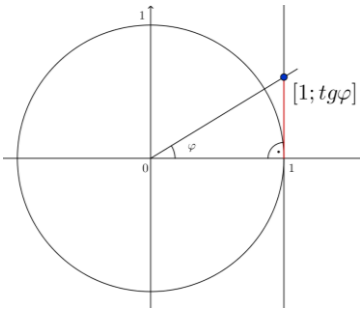
Goniometrické funkce – základní tabulkové hodnoty

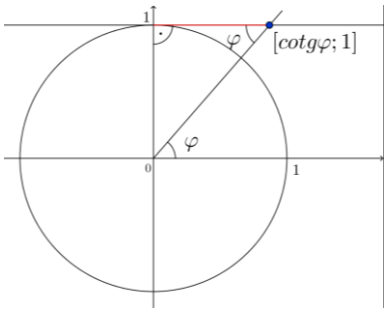




Pomocné obrázky pro určení goniometrických funkcí úhlů: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$







Jak pracovat s jednotkovou kružnicí při určování hodnot goniometrických funkcí?

	0	$\boldsymbol{\pi/6}$	$\boldsymbol{\pi/4}$	$\boldsymbol{\pi/3}$	$\boldsymbol{\pi/2}$
$\boldsymbol{\sin\varphi}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\boldsymbol{\cos\varphi}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---
$\boldsymbol{\operatorname{cotg}\varphi}$	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tabulka základních hodnot goniometrických funkcí

Příklad 4.1

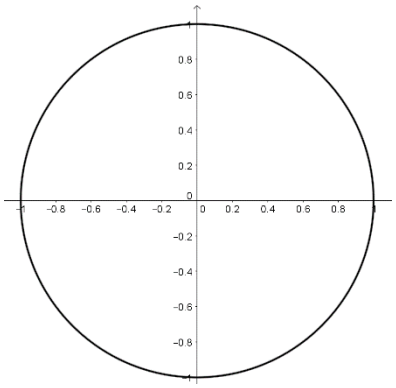
Pomocí jednotkové kružnice určete:

a) $sin\frac{3\pi}{4}$

b) $cos\frac{3\pi}{4}$

c) $tg\frac{3\pi}{4}$

d) $cotg\frac{3\pi}{4}$

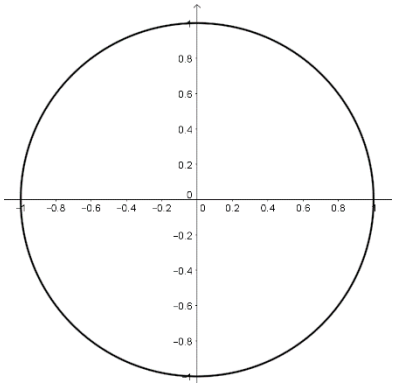


e) $sin\frac{7\pi}{6}$

f) $cos\frac{7\pi}{6}$

g) $tg\frac{7\pi}{6}$

h) $cotg\frac{7\pi}{6}$

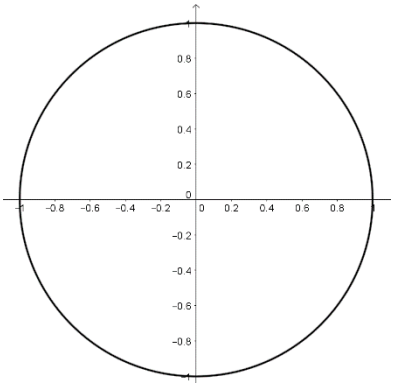


i) $sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

j) $cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

k) $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

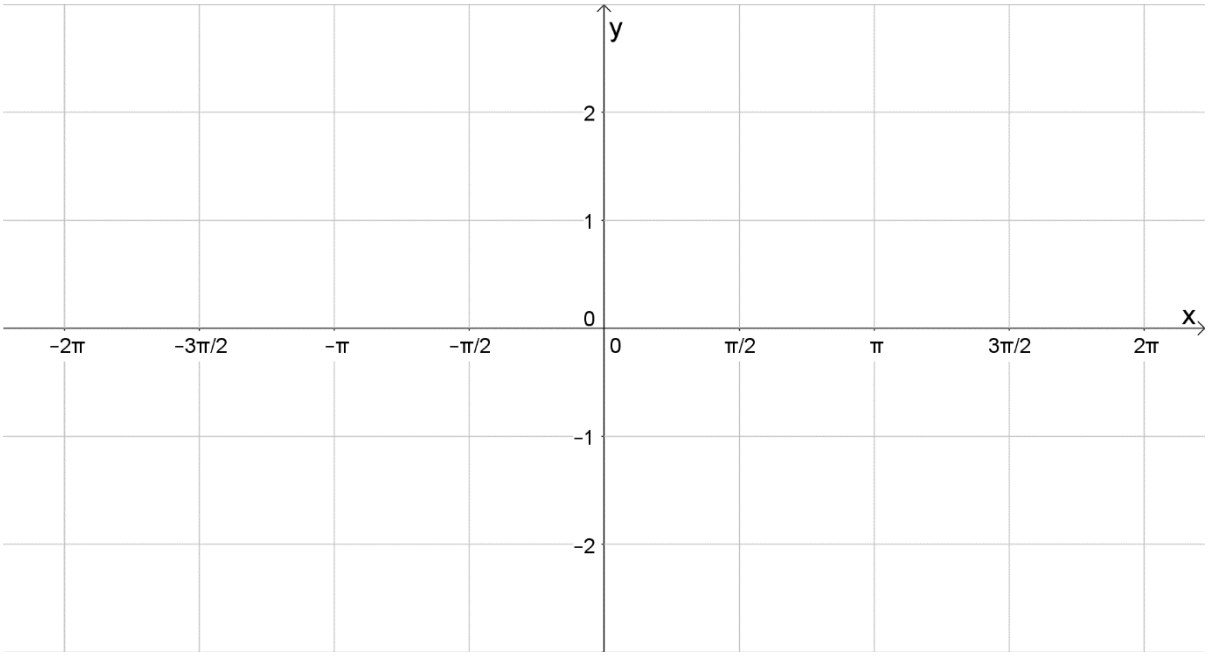
l) $cotg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$



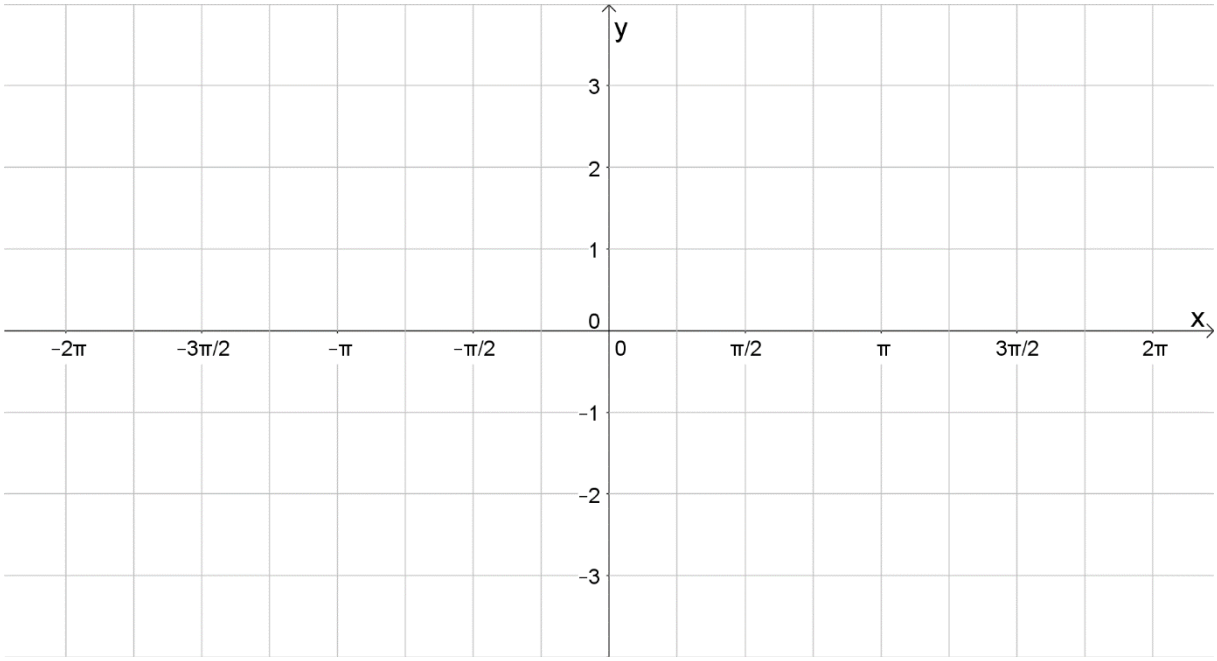
Příklad 4.2

Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $f_1: y = 1 - sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,



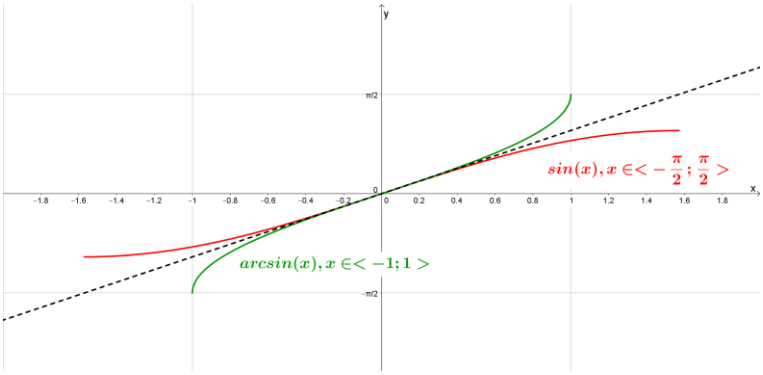
b) $f_2: y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$,



4.3 Cyklometrické funkce

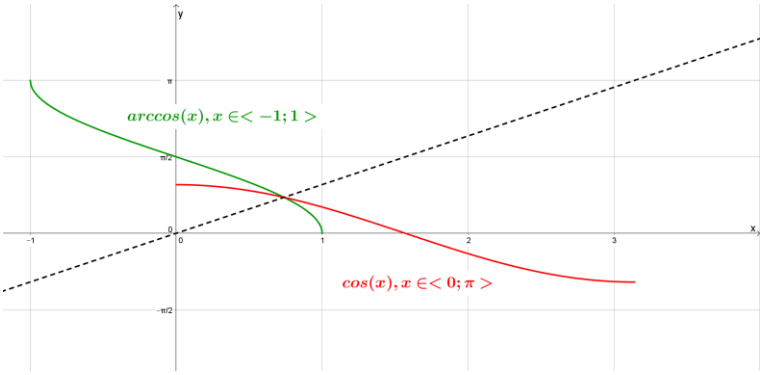
Cyklometrické funkce definujeme jako inverzní funkce k **restrikcím** funkcí goniometrických.

Arkussinus



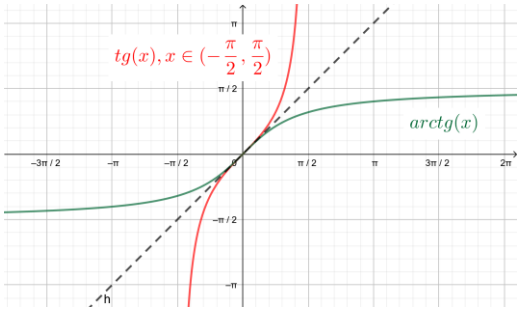
$$f: y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \arcsin x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

Arkuskosinus



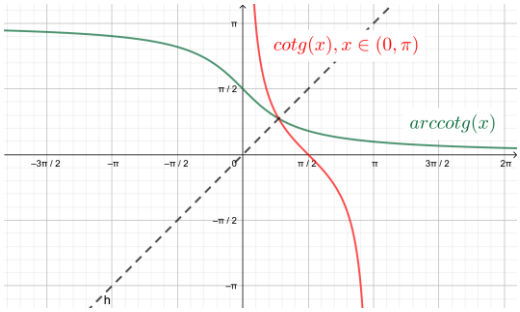
$$f: y = \cos x, x \in \langle 0; \pi \rangle, \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \arccos x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

Arkustangens



$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}}$$

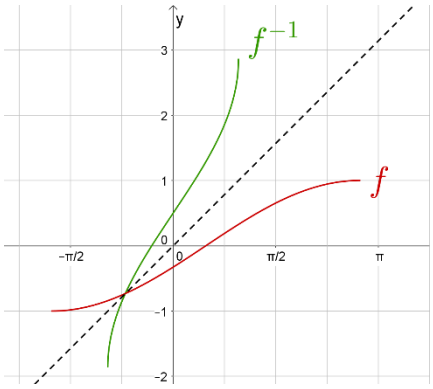
Arkuskotangens



$$f: y = \operatorname{cotg} x, x \in (0; \pi), \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R}}$$

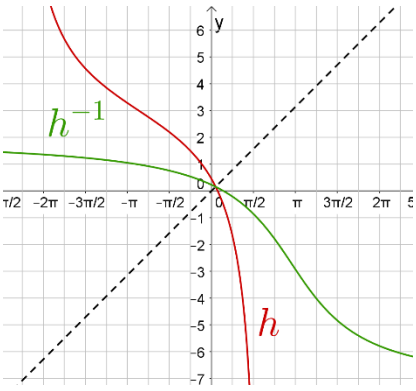
Příklad 4.3

Je dána funkce $f: y = sin\frac{2x-1}{3}, x \in \langle -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \rangle$. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci f.



Příklad 4.4

Je dána funkce $h: y = 3 - 2cotg(x + 2)$, $x \in (-2; \pi - 2)$. Určete funkci h^{-1} inverzní k funkci h.



4.4 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.

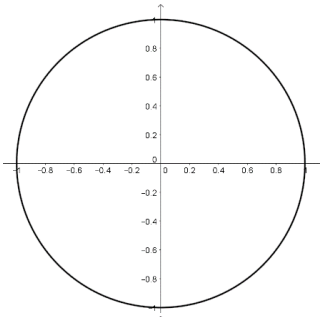
Základní goniometrická rovnice je každá rovnice zapsaná ve tvaru $g(x) = a$, kde $g(x)$ je jedna z goniometrických funkcí $(\sin x, \cos x, tg\, x, cotg\, x)$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. (Uvědomte si, že při definici goniometrické rovnice uvažujeme, že $x \in \mathbb{R}$, tzn. že hodnoty neznámé x uvádíme v obloukové míře!!!)

Řešení základních goniometrických rovnic je přímo viditelné z grafů příslušných goniometrických funkcí nebo z jednotkové kružnice.

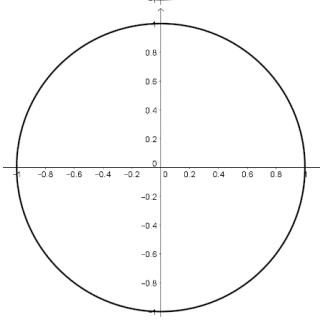
***Příklad 4.5**:*

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

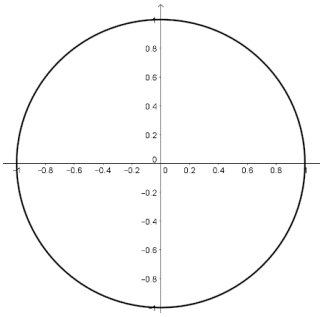
a) $\sin x = \frac{1}{2}$



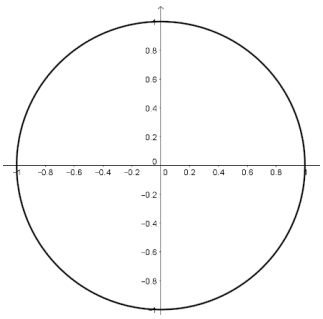
b) $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



c) $cotg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



d) $\sin x = -0{,}374\,1$ *(výsledek zapište s přesností na 2 des. místa)*



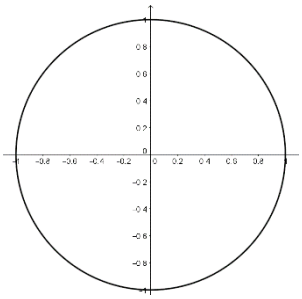
Složitější goniometrické rovnice

Substituce na základní typ: Pomocí jednoduché substituce $y = x + l$ nebo $y = x \cdot l$ převedeme složitější gon. rovnici typu $g(x + l) = k$ nebo $g(x \cdot l) = k$, kde g je gon. funkce s neznámou x a l, k jsou reálná čísla, na základní typ gon. rovnic $g(x) = k$.

Příklad 4.6:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$sin\, 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

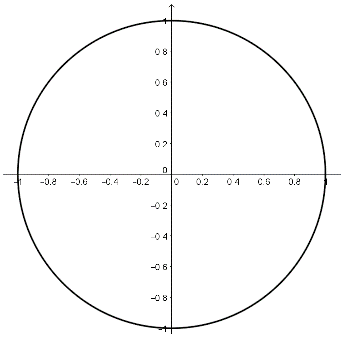


Substituce na kvadratickou rovnici

Příklad 4.7:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$2sin^2 x - 3 = 3\, cos\, x$$



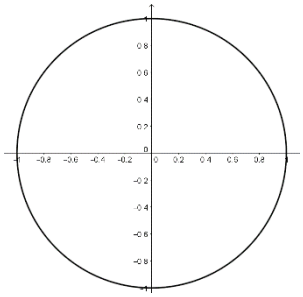
Dvojnásobný argument – při řešení tohoto typu úloh se využívají vzorce pro dvojnásobný argument gon. funkcí:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\cos(2x) = cos^2x - sin^2x$$

Příklad 4.8:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$cos\, x + sin\, 2x = 0$



Goniometrické funkce součtů a rozdílů, součet a rozdíl gon. funkcí – při řešení tohoto typu úloh se používají následující vzorce:

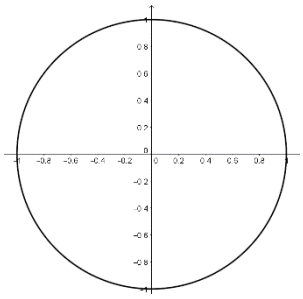
$$\sin(x+y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Příklad 4.9:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$-\cos 3x = \cos 7x$



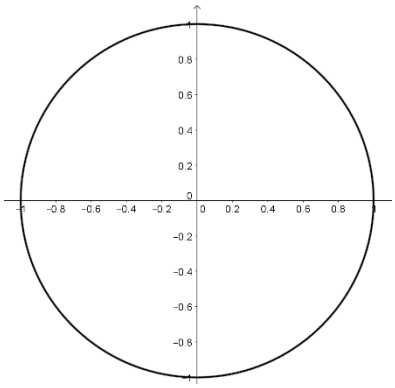
4.5 Goniometrické nerovnice

Základní goniometrické nerovnice

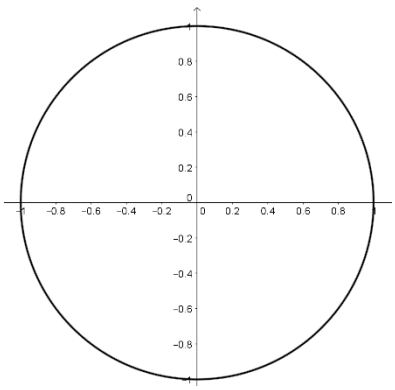
Příklad 4.10:

Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

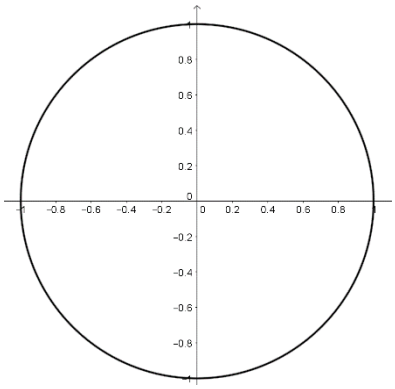
a) $\sin x > 0{,}5$



b) $\cos x < -0{,}5$



c) $tg\,x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

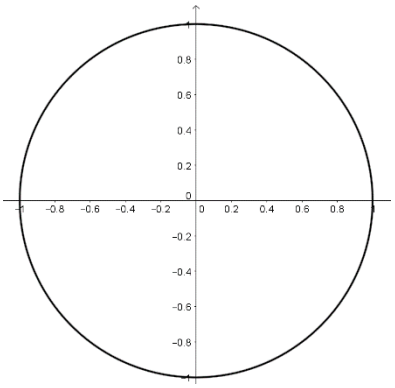


Složitější goniometrické nerovnice

Příklad 4.11:

Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

a) $sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0{,}5$



4.6 Slovní úlohy vedoucí na gon. rovnice

***Příklad 4.12**:*

Silnice má stoupání 3°30‘. O kolik metrů se liší nadmořská výška dvou míst, která jsou od sebe po silnici vzdálená 2km? (Výsledek zaokrouhlete na celé metry.)

***Příklad 4.13**:*

Na těleso působí v jednom bodě dvě síly: síla F_1 o velikosti $760\ N$ působí ve vodorovném směru (zleva doprava) a síla F_2 o velikosti $28{,}8\ N$ působí ve směru svislém (shora dolů). Těleso se vlivem těchto dvou sil dá do pohybu. Určete odchylku trajektorie tělesa od vodorovného směru. (Výsledek zaokrouhlete na celé stupně a minuty.)

4.7 Definiční obory - opakování

Příklad 4.14:

Určete definiční obor funkce f dané předpisem.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - sin(x^2 + 4) + ln(1 - |x - 3|)$

b) $g(x) = 2arccos\,(\frac{1}{x+3})$

c) $h(x) = e^{sin(x)+x} - log_2(x + 3) + \frac{4x-7}{\sqrt{x^2+x-2}}$

5. cvičení – Posloupnosti a limita posloupnosti (opakování ze SŠ)

Pro opakování použijte např.: http://msr.vsb.cz/posloupnosti-a-rady/vlastnosti-posloupnosti

5.1 Základní pojmy

Definice 5.1
Posloupnosti reálných čísel (dále jen posloupnosti) budeme nazývat funkci, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

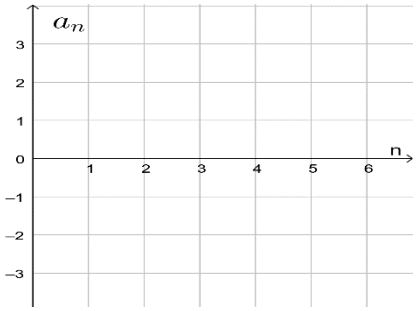
Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají **členy posloupnosti**. Funkční hodnota posloupnosti f v bodě n se nazývá ***n*-tý člen posloupnosti** a značí se místo $f(n)$ zpravidla f_n.

Zadání posloupnosti

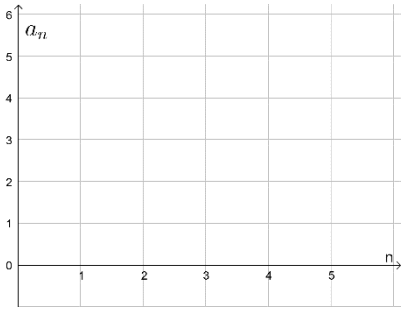
a) **vzorcem pro *n*-tý člen a_n**, např. $a_n = 2n - 1$,
b) **rekurentně** zadáním prvního členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit další členy podle předchozích členů. Např.: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 3$.

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

Příklad 5.1
Určete prvních pět členů následujících posloupností a znázorněte graficky jejich průběh.
a) $a_n = (-1)^{n-1}$



b) $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$



Některé vlastnosti posloupností

Posloupnost (a_n) se nazývá

- **shora ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq c$,
- **zdola ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq c$,
- **ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leq c$,
- **rostoucí**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$,
- **neklesající**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$.

5.2 Aritmetická posloupnost

Definice 5.2
Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

říkáme, že (a_n) je **aritmetická posloupnost** a číslo d se nazývá **diference**.

Pro každou aritmetickou posloupnost (a_n) platí:
a) n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 + (n-1)d$,
b) pro libovolné dva členy posloupnosti a_r, a_s platí $a_s = a_r + (s-r)d$,
c) pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

5.3 Geometrická posloupnost

Definice 5.3
Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $q \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

říkáme, že (a_n) je **geometrická posloupnost** a číslo q se nazývá **kvocient**.

Pro každou geometrickou posloupnost (a_n) platí:
a) n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
b) pro libovolné dva členy posloupnosti a_r, a_s platí $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$,
c) pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ pro $q \neq 1$. Je-li $q = 1$, pak $s_n = na_1$.

5.4 Limita posloupnosti

Definice 5.4
Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Symbolicky zapsáno: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon)$

Příklad 5.2

Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon)$

Definice 5.5

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu plus nekonečno, jestliže ke každému reálnému číslu k existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n > k$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Symbolicky zapsáno: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > k)$

Příklad 5.3

Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Definice 5.6

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu mínus nekonečno, jestliže ke každému reálnému číslu l existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n < l$.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Symbolicky zapsáno: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall l \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n < l)$

Věta 5.1

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice 5.7

Posloupnost (a_n) se nazývá

a) **konvergentní**, jestliže má vlastní limitu (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$),

b) **divergentní**, jestliže má nevlastní limitu (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$) nebo limita neexistuje.

Věta 5.2

Každá konvergentní posloupnost je ohraničena.

Definice 5.8
Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n). Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, se nazývá **posloupnosti vybranou** z posloupnosti (a_n).

Věta 5.3
Nechť posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}^*$. Pak každá z ní vybraná posloupnost má tutéž limitu.

Definice 5.9
Limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme Eulerovo číslo a označujeme e.

Věta 5.4
a) Nechť (a_n) je neklesající shora ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n$ a rovná se supremu oboru hodnot této posloupnosti, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n\epsilon\mathbb{N}\}$.
b) Nechť (a_n) je nerostoucí zdola ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n$ a rovná se infimu oboru hodnot této posloupnosti, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n\epsilon\mathbb{N}\}$.
c) Nechť (a_n) je neklesající posloupnost, která není shora ohraničená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
d) Nechť (a_n) je nerostoucí posloupnost, která není zdola ohraničená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 5.4
Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Příklad 5.5
Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n} = e$.

5.5 Výpočet limit

Věta 5.5

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

b) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,

c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

e) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,

má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl.

Základní limity

[1] $\lim_{n\to\infty} c = c \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

[3] $\lim_{n\to\infty} n = \infty$,

[4] $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$,

[5] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

[6] $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & pro\ q > 1, \\ 1 & pro\ q = 1, \\ 0 & pro\ q \in (-1;1), \\ neexistuje & pro\ q \leq -1. \end{cases}$

Příklad 5.6

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty} (n^2 + 5n - 1)$

b) $\lim_{n\to\infty} (n^2 - 5n - 1)$

c) $\lim_{n\to\infty} (-n^2 + 5n)$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2+8n-1}{1+2n+3n^2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2+8n-1}{1+2n}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{8n-1}{1+2n+3n^2}$

Příklad 5.7

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}$

Příklad 5.8

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n+2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{3n+2}$.

Příklad 5.9

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Věta 5.6

Nechť jsou dány posloupnosti $(a_n), (b_n)$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$. Jestliže dále

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*, pak\ a \leq b.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ pak\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty,\ pak\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

Příklad 5.10

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} n!$.

Věta 5.7 (o limitě sevřené posloupnosti)

Nechť jsou dány posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n)$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L, L \in \mathbb{R}^*, pak \lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Příklad 5.11

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+4n+5}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} cos \frac{n^2+1}{2n-1}$.

Věta 5.8

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost (b_n) je ohraničená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Příklad 5.12

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{sin(n^2+1)}{n}$.

Příklad 5.13

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7}$

c) $\sqrt[2n]{3^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$.

Příklad 5.14

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{n}$

6. cvičení – Limita a spojitost funkce

6.1 Limita funkce

Definice 6.1 (okolí a prstencové okolí)

a) ***Okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}$ (podrobněji δ-okolím bodu x_0) rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $O(x_0)$.

b) ***Okolím bodu*** $+\infty$ rozumíme každý interval $(k; +\infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(+\infty)$.

c) ***Okolím bodu*** $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty; k)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(-\infty)$.

d) ***Prstencovým okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}^*$ rozumíme množinu $O(x_0)\backslash\{x_0\}$. Značíme je $P(x_0)$.

Definice 6.2 (definice limity)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \big(\forall O(A)\ \exists P(x_0)\ \forall x \in P(x_0): f(x) \in O(A)\big).$$

Poznámka: Limita nám nic neříká o tom, jak se funkce chová přímo v bodě x_0.

Mluvíme o následujících případech limity ($x_0, A \in \mathbb{R}$):

- vlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,
- nevlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$,
- vlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$,
- nevlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

6.2 Jednostranné limity

Definice 6.3

a) ***Levým prstencovým okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta; x_0)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^-(x_0)$.

b) ***Pravým prstencovým okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0; x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^+(x_0)$.

Definice 6.4

a) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zleva rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje levé prstencové okolí $P^-(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^-(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

b) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

6.3 Vlastnosti limit

Věta 6.1
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^*$. Limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné. Zapsáno symbolicky:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A. \right)$$

Věta 6.2
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 6.3
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují $\lim_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0} g(x)$. Pak platí:

[1] $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$,

[2] $\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$,

[3] $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \,/\, \lim_{x \to x_0} g(x)$,

[4] $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right|$,

jsou-li definovány pravé strany výše uvedených rovností.

6.4 Spojitost

Definice 6.5
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Věta 6.4
Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.

Věta 6.5
Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá v bodě $f(x_0)$. Pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.

Věta 6.6
Nechť funkce f je základní elementární funkce a nechť x_0 je vnitřním bodem definičního oboru $D(f)$. Pak funkce f je spojitá v bodě x_0.

6.5 Výpočet limit

Limity funkcí spojitých v bodě

Příklad 6.1

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} arctg\, x$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} e^x$

Příklad 6.2

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2 + 3)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + 2^x \sin x}{\ln(1+x)+(x+1)\cos x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(x \cdot tg\, x)$

Limity v nevlastních bodech a v bodech, v nichž není funkce definována

Příklad 6.3

Dokažte, že platí $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ *a* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Limity dle věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí (věta 6.3)

Poznámka: Připomeňme si výrazy, které nejsou definovány:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{A}{0}\ (A \in \mathbb{R}^*) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Příklady 6.4

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim_{x\to -\infty} (e^x + x)$ *b)* $\lim_{x\to \infty} x\ arctg\ x$ *c)* $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Příklad 6.5

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.

Věta 6.7

Nechť funkce f a g jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Příklady 6.6

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x - \sin x}{\sin^3 x}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$

Příklady 6.7

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+x-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$ *c)* $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$

Věta 6.8

Nechť f, g, h jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Poznámka: Zapamatujte si, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Důkaz lze najít např. v [1].

Příklady 6.8

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\sin x + x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x + tg^2 x}{x \sin x}$

Věta 6.9

Nechť f, g jsou funkce a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že funkce g je na tomto okolí ohraničená. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Příklad 6.9

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x}$

Věta 6.10

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*, A \in \mathbb{R}$ a nechť platí

a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$,

b) Funkce f je spojitá v bodě A.

Pak složená funkce $f \circ g$ má v bodě x_0 limitu a platí

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(A).$$

Příklad 6.10

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \cos\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$.

Věta 6.11

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*, A, B \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí

a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$,

b) $\lim_{y\to A} f(y) = B$,

c) Existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $g(x) \neq A$.

Pak $\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = B$.

Příklad 6.11

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Příklad 6.12

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$.

Věta 6.12

Nechť f je funkce a nechť existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$). Nechť $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 0$. Pak platí $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)} = -\infty$).

Analogicky pro levé prstencové okolí.

Poznámka: Skutečnost obsaženou v předchozí větě budeme symbolicky zapisovat

$$„\frac{1}{0_+} = +\infty“, „\frac{1}{0_-} = -\infty“.$$

Příklad 6.13

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$ *b)* $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{arctg\, x}{arccotg\, x}$

Příklad 6.14

Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2}$

Využití limit pro ověření spojitosti funkce v bodě x_0

Příklad 6.15

Určete, zda jsou následující funkce spojité v bodě x_0.

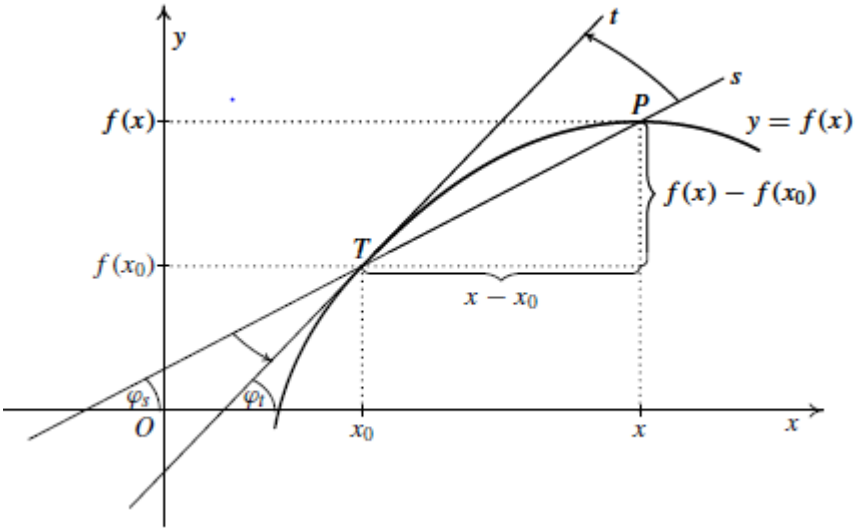
a) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} x+1 & pro\ x \neq 1 \\ 3 & pro\ x = 1 \end{cases}$ *b)* $x_0 = 2,\ f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

7. cvičení Využití limit – Derivace

7.1 Definice derivace

Derivování je přechod od funkce f, jež udává vztah mezi proměnnými x a y, k funkci f', jež udává vztah mezi proměnnou x a směrnici tečny funkce f v bodě x. Hodnota $f'(x)$, udává v každém bodě x sklon funkce f (směrnici její tečny). Funkci $f'(x)$ nazýváme **derivací** funkce f.

Geometrický model



Geometrický model derivace (převzato z [1])

Definice 7.1
Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme ji **derivací** funkce f v bodě x_0.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Definice 7.2
Nechť $x_0 \in D(f)$.

Existuje-li limita $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, značíme ji $f'_+(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zprava** funkce f v bodě x_0.
Existuje-li limita $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, značíme ji $f'_-(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zleva** funkce f v bodě x_0.

Funkce f má v bodě x_0 derivaci, právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny.

Příklad 7.1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí v bodě x_0.

a) $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = 0$ *b)* $f(x) = |\sin x|,\ x_0 = 0$ *c)* $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2,\ x_0 = 0$

Věta 7.1

Má-li funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

7.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

[1] $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}\ (konst.), x \in \mathbb{R},$

[2] $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}\,, x \in \mathbb{R}^+,$

[3] $(\sin x)' = \cos x\,,\ x \in \mathbb{R},$

[4] $(\cos x)' = -\sin x\,,\ x \in \mathbb{R},$

[5] $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}.$

Věta 7.2

Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $fg, \frac{f}{g}$ a cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci a platí

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0,$

d) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$

Příklad 7.2

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = -3\sin x + 2e^x - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = x^4 \sin x$

e) $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2}$

f) $f(x) = tg\, x$

[6] $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z},$

[7] $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$

Věta 7.3

Derivace inverzní funkce

Nechť $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(y_0)}, je - li\ \ f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, \quad je - li\ \ f'(y_0) = 0\ a\ funkce\ f\ je\ na\ I\ rostoucí, \\ -\infty, \quad je - li\ \ f'(y_0) = 0\ a\ funkce\ f\ je\ na\ I\ klesající. \end{cases}$$

Příklad 7.3

Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem $f(x) = \ln x$.

[8] $(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^+,$

[9] $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1;1),$

[10] $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1;1),$

[11] $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R},$

[12] $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}.$

Věta 7.4

Derivace složené funkce

Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládáme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$(F)'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

Příklad 7.4

Vypočtěte F', je-li F dána předpisem:

a) $F(x) = (x^4 - 3x^2 + 2)^{10}$ *b)* $F(x) = sin\,5x$ *c)* $F(x) = ln(sin\,x)$

d) $F(x) = \sqrt{x^4 - 2}$ *e)* $F(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

[13] $(a^x)' = a^x \ln a\,,\ a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},$

[14] $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}\,,\quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},\ x \in \mathbb{R}^+.$

Příklad 7.5

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = ln(1 + cos\, x)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$

c) $f(x) = arctg\,\sqrt{6x-1}$

d) $f(x) = sin^2 x$

e) $f(x) = sin\, x^2$

f) $f(x) = log_3 x^4$

Derivace funkcí $f(x)^{g(x)}$

Využíváme známého vztahu $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Příklad 7.6

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^x$ *b)* $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

7.3 Derivace vyšších řádů

Definice 7.3

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom n-tou derivací (nebo derivací n-tého řádu) funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$ a definujeme rovností

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',$$

přičemž $f^{(0)}(x) = f$.

Příklad 7.7

Vypočtěte třetí derivaci funkce f dané předpisem.

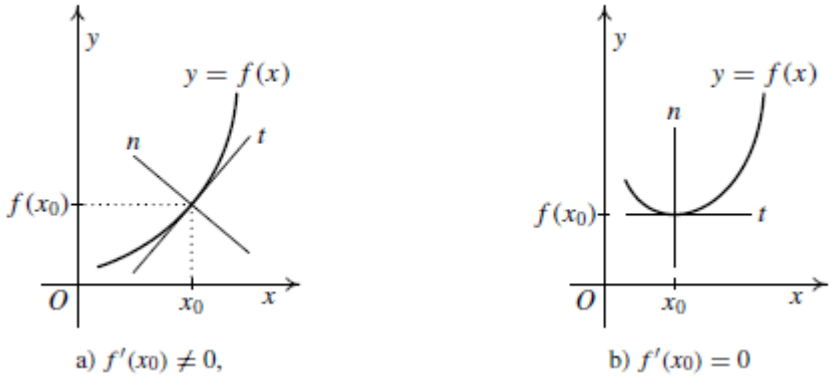
a) $f(x) = \cos^2 x$ *b)* $f(x) = x \cdot \ln x$ *c)* $f(x) = xe^{2x}$

Tečna a normála

Definice 7.4
Přímka t o rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá **tečna ke grafu funkce f v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$**. Přímka n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, se nazývá **normála ke grafu funkce f v dotykovém bodě T**.



Tečna a normála ke grafu funkce (převzato z [1])

Příklad 7.8

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ *v dotykovém bodě* $T = (2, ?)$.

Příklad 7.9

Určete rovnice tečen ke grafu funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$ *, které jsou kolmé k přímce* $p: x + 2y + 3 = 0$.

7.4 Fyzikální význam derivace

Předpokládejme, že přímočarý pohyb hmotného bodu je popsán funkcí $s(t)$, která udává polohu hmotného bodu v závislosti na čase. Nechť existuje první a druhá derivace funkce $s(t)$.

$v(t_0) = s'(t_0)$ nazýváme **okamžitou rychlostí** bodu v čase t_0.

$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$ nazýváme **okamžitým zrychlením** bodu v čase t_0.

Příklad 7.10

Dráha pohybujícího se tělesa je popsána funkcí s danou předpisem $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$. Přitom dráha s je vyjádřena v metrech a čas t v sekundách. Zjistěte, ve kterém okamžiku je rychlost nulová.

8. cvičení – L'Hospitalovo pravidlo

8.1 L'Hospitalovo pravidlo (LP)

Věta 8.1

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Existuje-li $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámky:

- LP platí i pro jednostranné limity.
- LP říká, že limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se dá v případě, že se jedná o limitu typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{cokoliv}{\pm\infty}\right]$ nahradit limitou $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, za předpokladu, že $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje.
- LP se dá využít i pro limity typu $[0 \cdot (\pm\infty)], \infty - \infty, f(x)^{g(x)}$.
  (Nejprve upravíme na $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right], \left[\frac{\nexists}{\pm\infty}\right]$)
- **POZOR!** Pokud $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, nelze LP použít!!! Rozhodně to však neznamená, že $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

Příklad 8.1

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\cdot \sin x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$ *e)* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x^2+1}$ *f)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x-2}{3x^3+2x^2+x}$

Příklad 8.2

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

8.2 Limity typu $[0 \cdot (\pm\infty)]$

Převedeme na typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$.

Příklad 8.3

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x \cdot \ln x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 \cdot e^{-x})$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln\frac{1}{x}$

8.3 Limity typu $[\infty - \infty]$

Převedeme na společného jmenovatele.

Příklad 8.4

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - cotg\, x\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\cdot \sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

8.4 Limity typu $\left[f(x)^{g(x)}\right]$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ převedeme na $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)}$.

(Plyne z věty o limitě složené funkce (věta 6.10).)

Poznámka:

- Typ $[0^0] = 1$,
- Typ $[\infty^\infty]$ vede na $[\infty \cdot \infty] = \infty$.

Příklad 8.5

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x$

8.5 Spojitost funkce

Příklad 8.6

Určete, zda je funkce f spojitá v bodě x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi} & pro\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & pro\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{tg\,2x}{x} & pro\ x \neq 0 \\ 2 & pro\ x = 0 \end{cases} ; x_0 = 0$

8.6 Další příklady na LP

Příklad 8.7

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{ln(1-x^2)}{ln(\sin \pi x)}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - arctg\ x\right) ln\, x$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ln(\sin x)}{ln\, x}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - x}{x^n - 1}$ $(n \in \mathbb{R} \backslash \{0\})$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$

9. cvičení – Průběh funkce

Co chápeme pod pojmem vyšetření průběhu funkce?
Vyšetření vlastností, které nám umožní, abychom funkci rozumně charakterizovali a nakreslili její graf.

Co nás obvykle zajímá při vyšetření průběhu funkce?
Definiční obor; sudost, lichost (informace, zda je graf funkce symetrický); periodičnost; spojitost; maximální intervaly, na nichž je funkce monotónní (dále monotonie); lokální extrémy (minima, maxima); maximální intervaly, na nichž je funkce konvexní, konkávní (dále konvexnost, konkávnost); inflexní body; asymptoty grafu funkce.

9.1 Monotonie

Věta 9.1
Nechť funkce f má na intervalu $(a,b), a,b \in \mathbb{R}^*$, derivaci. Je-li
a) $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***rostoucí*** na (a,b),
b) $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***neklesající*** na (a,b),
c) $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***klesající*** na (a,b),
d) $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***nerostoucí*** na (a,b).

Příklad 9.1
Určete maximální intervaly ryzí monotonie následujících funkcí:

a) $f: y = 2x^2 - 5x + 1$ *b)* $g: y = \frac{ln^2 x}{x}$ *c)* $h: y = e^{x^3 - 12x}$

9.2 Lokální extrémy

Definice 9.1
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální minimum***, resp. ***lokální maximum***, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***ostré lokální minimum***, resp. ***ostré lokální maximum***, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

Má-li funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální extrém***.

Definice 9.2
Bod $x_0 \in D(f)$, ve kterém platí $f'(x_0) = 0$, se nazývá ***stacionární bod***.

Věta 9.2
Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$, anebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta 9.3
Nechť $f'(x_0) = 0$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li
a) $f''(x) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum,
b) $f''(x) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.

Věta 9.4
Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a nechť $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Je-li:
- n liché, pak f nemá v bodě x_0 lokální extrém.
- n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f má v bodě x_0 lokální minimum.
- n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak f má v bodě x_0 lokální maximum.

Příklad 9.2

Najděte lokální extrémy a maximální intervaly monotonie následujících funkcí.

a) $f: y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$

b) $g: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

9.3 Konvexnost, konkávnost

Definice 9.3
Řekneme, že funkce f je ***ryze konvexní na intervalu*** $\boldsymbol{I} \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in f$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

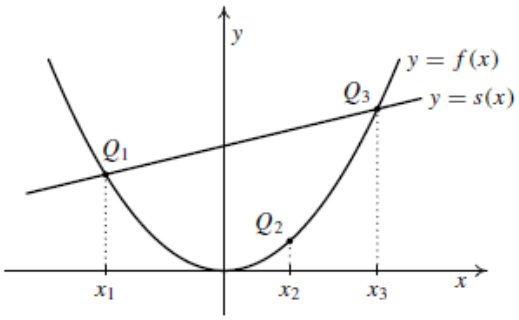
$$f(x_2) < f(x_!) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Nahradíme-li v definici 9.3 znak < znakem $\leq$, dostáváme funkci ***konvexní na intervalu*** $\boldsymbol{I}$. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je ***ryze konvexní***, resp. ***konvexní***.

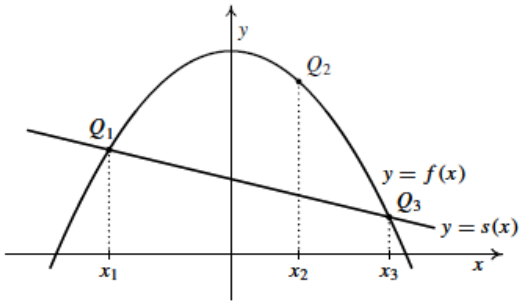
Definice 9.4
Řekneme, že funkce f je ***ryze konkávní na intervalu*** $\boldsymbol{I} \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in f$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) > f(x_!) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Nahradíme-li v definici 9.4 znak > znakem $\geq$, dostáváme funkci ***konkávní na intervalu*** $\boldsymbol{I}$. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je ***ryze konkávní***, resp. ***konkávní***.



Graf konvexní funkce
(převzato z [1])

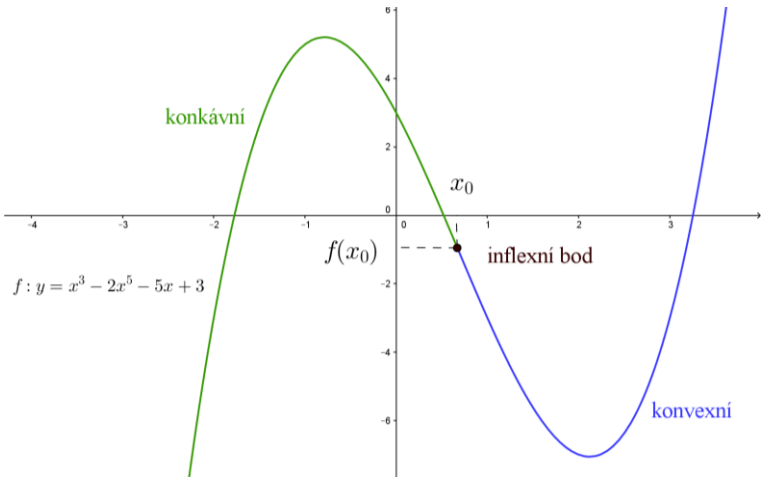


Graf konkávní funkce
(převzato z [1])

Definice 9.5
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***inflexi***, jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní, resp. naopak.

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $\big(x_0, f(x_0)\big)$ nazýváme ***inflexním bodem*** funkce f.

Tj. v inflexním bodě existuje tečna a mění se zde „konvexnost na konkávnost“ anebo naopak.



Věta 9.5

Nechť funkce f má na intervalu $(a, b), a, b \in \mathbb{R}^*$, druhou derivaci. Je-li

a) $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***ryze konvexní*** na (a, b),

b) $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***konvexní*** na (a, b),

c) $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***ryze konkávní*** na (a, b),

d) $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***konkávní*** na (a, b).

Příklad 9.3

Určete maximální intervaly, na nichž jsou následující funkce konvexní, resp. ryze konvexní a určete jejich inflexní body:

a) $f: y = x^3 + 3x$ *b)* $g: y = \frac{x}{1+x^2}$ *c)* $h: y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$

9.4 Asymptoty grafu funkce

Definice 9.6

Přímka $p: x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá ***svislá asymptota grafu funkce f***, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Svislé asymptoty mohou nastat v bodech nespojitosti definičního oboru nebo v hraničních bodech definičního oboru.

Příklad 9.4

Najděte svislé asymptoty grafů funkcí:

a) $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ *b)* $g: y = x + \frac{\ln x}{x}$

Definice 9.7

Přímka $p: y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu,*** resp. ***v mínus nekonečnu***, jestliže platí:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0.$$

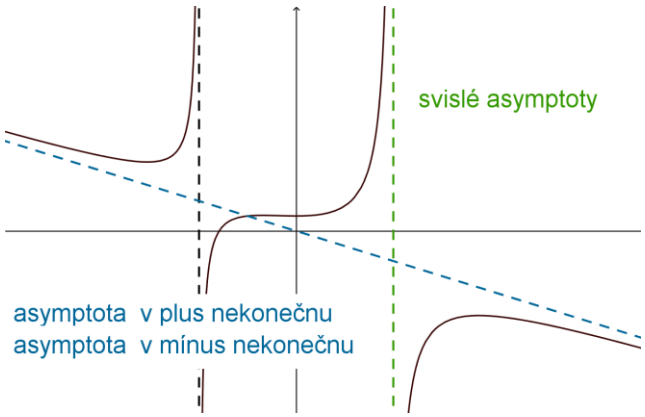
Věta 9.5

Přímka $p: y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu,*** právě když

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a, \;\; a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b, \;\; b \in \mathbb{R}.$$

Přímka $p: y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v mínus nekonečnu,*** právě když

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a, \;\; a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = b, \;\; b \in \mathbb{R}.$$



Příklad 9.5

Najděte asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ grafů funkcí:

a) $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ *b)* $g: y = x + \frac{\ln x}{x}$

9.5 Průběh funkce

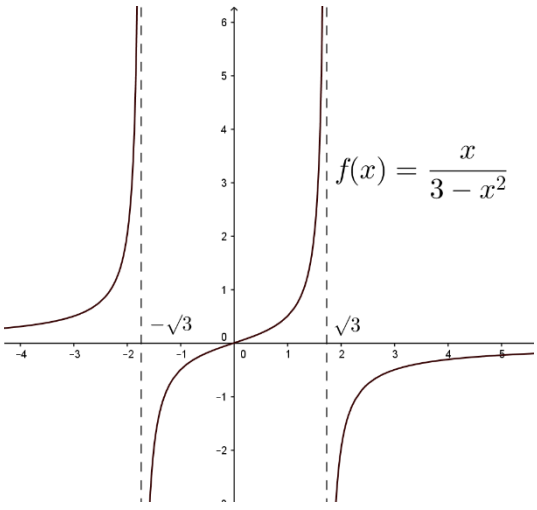
Postup:

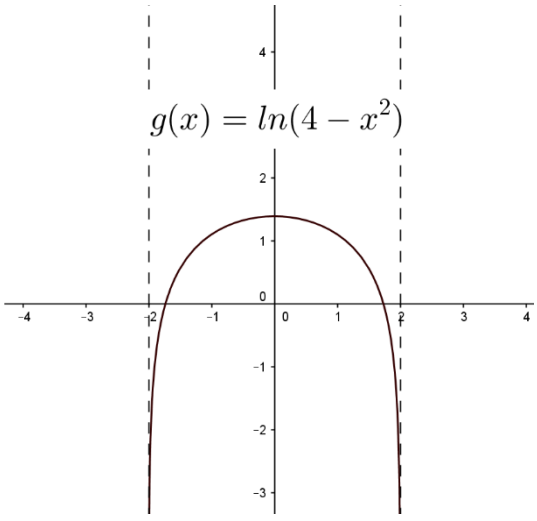
1. Určíme definiční obor.
2. Rozhodneme, zda je funkce spojitá, resp. určíme body nespojitosti.
3. Rozhodneme, zda je funkce sudá nebo lichá, příp. periodická.
4. Vypočteme f' a $D(f')$.
5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
6. Určíme intervaly monotonie funkce a lokální extrémy.
7. Vypočteme f'' a $D(f'')$.
8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní a určíme inflexní body.
10. Najdeme svislé asymptoty a asymptoty v $\pm\infty$.
11. Podle potřeby určíme další vlastnosti funkce f (průsečíky s osami, funkční hodnoty ve významných bodech, …)
12. Načrtneme graf funkce f.

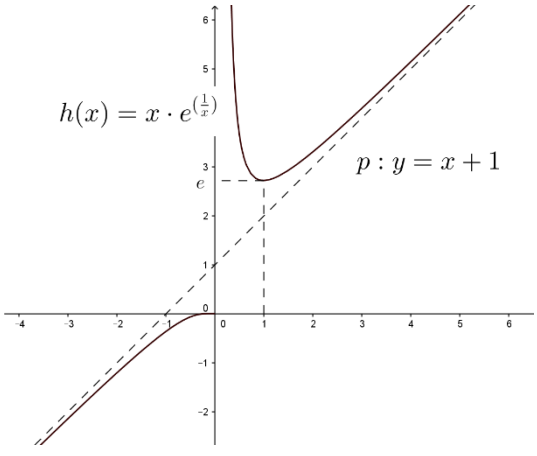
Příklad 9.6

Vyšetřete průběh funkcí:

a) $f: y = \frac{x}{3-x^2}$ *b)* $g: y = ln(4 - x^2)$ *c)* $h: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$


$f(x) = \frac{x}{3 - x^2}$
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$


$g(x) = ln(4 - x^2)$
4
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


$h(x) = x \cdot e^{(\frac{1}{x})}$
$p : y = x + 1$
e

10. cvičení – Globální extrémy, Aproximace funkce polynomem

10.1 Globální extrémy

V matematických aplikacích se často zabýváme hledáním bodu z množiny M, v němž funkce f nabývá největší, resp. nejmenší funkční hodnoty. Říkáme, že hledáme globální extrémy funkce f na množině M.

Definice 10.1
Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního maxima** v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.
Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního minima** v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.
Nabývá-li funkce f na množině M globálního maxima nebo minima v bodě x_0, říkáme, že funkce f nabývá na množině M **globálního extrému** v bodě x_0.

Věta 10.1 (Weierstrassova)
Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce f nabývá globálního maxima i minima.

Postup hledání globálních extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$

1. V intervalu $(a; b)$ najdeme body „podezřelé z lokálních extrémů“, tj. stacionární body a body, v nichž první derivace neexistuje.
2. Vypočteme funkční hodnoty ve všech bodech podezřelých z lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\langle a; b\rangle$.
3. Vybereme bod, v němž má funkce f největší, resp. nejmenší funkční hodnotu. V tomto bodě nabývá funkce f globálního maxima, resp. globálního minima.

Příklad 10.1
Najděte globální extrémy funkce $f: y = x - 3\ln x, x \in \langle 1; e^2\rangle$.

Příklad 10.2

Najděte globální extrémy funkce $f: y = arctg\ \frac{1-x}{1+x}, x \in \langle 0; 1 \rangle$.

V praxi hraje velice důležitou roli optimalizace, tj. hledání „nejlepšího“ nebo „nejhoršího“ řešení nějakého problému.

Příklad 10.3

Mezi všemi kladnými čísly vyberte to, jehož součet s převrácenou hodnotou je minimální.

Příklad 10.4

Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu bylo ochlazování páry ve válci nejmenší, tj. aby povrch válce byl minimální.

Příklad 10.5

Na přímce o rovnici $y = 3x + 1$ *najděte bod, který je nejblíže bodu* $[8; -5]$.

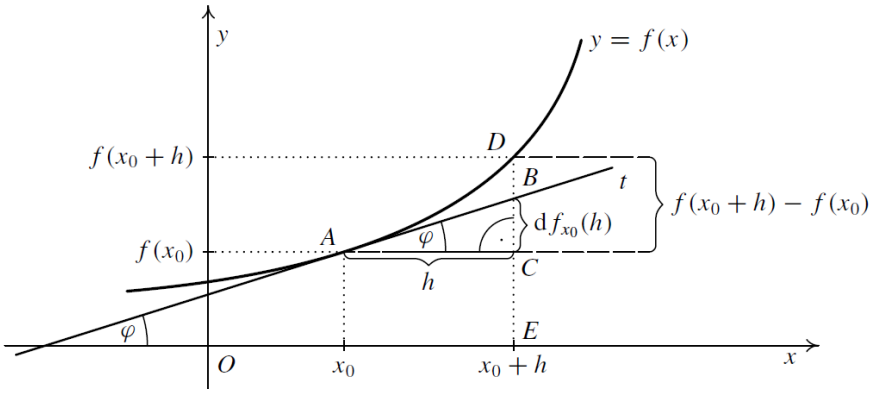
10.2 Aproximace funkce polynomem

Definice 10.2

Předpokládejme, že funkce f definována na nějakém okolí bodu x_0. Existuje-li takové číslo $A \in \mathbb{R}$, že pro funkci $\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h$ platí $\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$, pak říkáme, že **funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná**.

Lineární funkci df_{x_0} definovanou předpisem $df_{x_0}(h) = A \cdot h$ nazýváme **diferenciálem** funkce f v bodě x_0.

Diferenciál vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na malé změně jejího argumentu. Tuto závislost aproximuje jako přímou úměrnost v okolí zvoleného bodu.



(převzato z [1])

Věta 10.2

Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0. Pro diferenciál pak platí

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h \text{ pro každé } h \in \mathbb{R}.$$

Využití: Nahrazení funkce na okolí daného bodu lineární funkcí, tj. polynomem stupně jedna.

Příklad 10.6

Najděte přírůstek funkce $f: y = x^3 - 4x^2 - 10x - 12$ a její diferenciál v bodě $x_0 = 0$ pro přírůstek $h = 1{,}2, resp. h = 0{,}2$. Určete chybu, které se při výpočtu $f(x_0 + h)$ dopustíme, aproximujeme-li funkci f na okolí bodu x_0 přímkou, tj. nahradíme-li přírůstek funkce f v bodě x_0 diferenciálem.

Příklad 10.7

Užitím diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu:

a) $\sqrt[4]{267}$ *b)* $1{,}04^5$

10.3 Taylorův polynom

Definice 10.3

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci do řádu n. Pak se polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývá **Taylorův polynom *n*-tého stupně v bodě x_0**.

Poznámky:

- Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o **Maclaurinově polynomu**.
- Taylorův polynom používáme pro nahrazení funkce na okolí daného bodu polynomem.
- Čím vyšší stupeň Taylorova polynomu použijeme, tím menší chyby se při aproximaci funkce tímto polynomem dopustíme.

Příklad 10.8

Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f: y = \ln x$ v okolí bodu $x_0 = 1$.

Příklad 10.9

Napište Maclaurinův polynom třetího stupně funkce $f: y = \frac{1+x}{1-x}$.

Příklad 10.10

Rozviňte polynom $f: y = x^3 - 2x + 5$ podle mocnin $(x - 1)$.

10.4 Taylorův vzorec

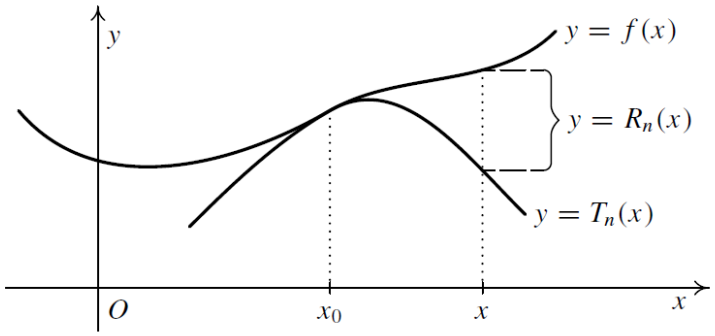
Věta 10.3 (Taylorův vzorec)

Nechť má funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n + 1, n \geq 1$. Nechť $x \in O(x_0)$. Pak existuje číslo ξ ležící mezi x_0 a x takové, že platí:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$



Prezentace významu zbytku $R_n(x)$ (převzato z [1])

Poznámky:

- Uvedená podoba zbytku R_n se nazývá **Lagrangeův tvar zbytku**.
- Číslo ξ, které závisí při pevně zvoleném středu x_0 na x, nemusí být dáno jednoznačně.
- Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o **Maclaurinově vzorci**.

Příklad 10.11

Najděte Maclaurinův vzorec funkce $f: y = e^x, x \in \mathbb{R}$ pro obecné n.

Příklad 10.12

Užitím Maclaurinova vzorce vypočtěte hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Příklad 10.13

Užitím Taylorova vzorce $(pro\ n = 3)$ *přibližně vypočtěte* $\sqrt[3]{30}$.

–

11. cvičení - Úvod do integrálního počtu

11.1 Několik poznámek na úvod

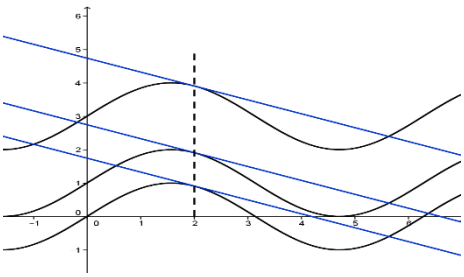
funkce f	derivování → / ← **integrování**	$f'(x)$ … směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x; f(x)]$
$f(x)$ … poloha bodu pohybujícího se po přímce v čase x	derivování → / ← **integrování**	$f'(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x
$f(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x	derivování → / ← **integrování**	$f'(x)$ … okamžité zrychlení bodu v čase x

Integrální počet – Jakou funkci musíme derivovat, abychom získali danou funkci $f(x)$?

Hledáme $F(x)$	derivování → / ← **integrování**	Známe $f(x) = F'(x)$

Například:

$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + 1$	$\cos x$
$\sin x - 3$	$\cos x$
⋮	⋮
$\sin x + c, c \in \mathbb{R}$	$\cos x$



Geometrická interpretace: Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x; F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ rovnoběžné, tj. mají stejnou směrnici.

Definice 11.1
Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I.
Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkce k funkci f**, jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) = F'(x).$$

Věta 11.1 (O existenci primitivní funkce)
Je-li funkce f spojitá na otevřeném intervalu I, má v I primitivní funkci.

Poznámka: Spojitost je postačující, nikoliv nutnou podmínkou existence primitivní funkce.

Věta 11.2
Je-li F primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, pak funkce $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, jsou právě všechny primitivní funkce k f na I.

Označení: Je-li F primitivní funkce k f, píšeme $\int f(x)dx = F(x)$ a mluvíme o neurčitém integrálu.

Úmluva: Symbol $\int f(x)dx$ pro nás bude znamenat některou z primitivních funkcí k f. Každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty.

Věta 11.3
Na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru příslušné integrované funkce platí:

[1] $\int c\,dx = cx \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$,

[3] $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = ln|x|$,

[4] $\int \sin x\;dx = -\cos x$,

[5] $\int \cos x\;dx = \sin x$,

[6] $\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\,x$,

[7] $\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -cotg\,x$,

[8] $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$,

[9] $\int e^x\,dx = e^x$,

[10] $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctg\,x = -arccotg\,x$,

[11] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsin\,x = -arccos\,x$,

[12] $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$.

Platnost vzorců plyne ze vzorců pro derivování.

Věta 11.4 (O linearitě neurčitého integrálu)
Nechť f a g jsou funkce spojité na otevřeném intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak v I platí

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Příklad 11.1

a) $\int x\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int \sqrt{x}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{x}}$

e) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

f) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$

h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx$

i) $\int \left(2x^3-\frac{5}{x^2+1}+\frac{\sin x}{3}\right)dx$

j) $\int \frac{x^2-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx$

k) $\int cotg^2 x\,dx$

l) $\int (x-1)^3 dx$

m) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

11.2 Základní integrační metody

Metoda Per Partes

Věta 11.5
Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v I. Pak v I platí

$$\int \big(u(x) \cdot v'(x)\big)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int \big(u'(x) \cdot v(x)\big)\, dx.$$

Nejčastější integrály řešené metodou per partes:

Označme $P(x)$ libovolný polynom.

	$\boldsymbol{u(x)}$	$\boldsymbol{v'(x)}$
$\int (P(x) \cdot e^{ax})\, dx$	$P(x)$	e^{ax}
$\int (P(x) \cdot \sin(ax))\, dx$	$P(x)$	$\sin(ax)$
$\int (P(x) \cdot \cos(ax))\, dx$	$P(x)$	$\cos(ax)$
$\int (P(x) \cdot \ln x)\, dx$	$\ln x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \arcsin x)\, dx$	$\arcsin x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \arccos x)\, dx$	$\arccos x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \operatorname{arctg} x)\, dx$	$\operatorname{arctg} x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \operatorname{arccotg} x)\, dx$	$\operatorname{arccotg} x$	$P(x)$

Příklad 11.2

a) $\int (x^2+1) e^x dx$

b) $\int x \cdot \ln x \, dx$

c) $\int \ln x \, dx$

d) $\int x \cdot arctg\, x \, dx$

e) $\int (x^2 - 3x + 2)e^x dx$

f) $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

g) $\int (x^2 - 2x) \cdot arctg\, x\, dx$

Příklad 11.3

a) $\int cos\, x \cdot e^x dx$

b) $\int cos^2 x\, dx$

c) $\int sin\,3x \cdot e^x dx$

První substituční metoda

Věta 11.6

Nechť

- funkce φ má na intervalu $(a;b)$ konečnou derivaci a pro všechna $x \in (a;b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha;\beta)$,
- funkce f je spojitá v $(\alpha;\beta)$.

Buď F libovolná primitivní funkce k f na $(\alpha;\beta)$. Pak v $(a;b)$ platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\ dx = F\big(\varphi(x)\big).$$

Píšeme: $\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\ dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)\ dt = F(t) = F\big(\varphi(x)\big)$

Příklad 11.4

a) $\int sin^4 x \cdot cos\,x\ dx$

b) $\int \frac{1}{x}(ln^3 x - ln\,x)\ dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

d) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$

e) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$

f) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$

g) $\int cos(5x-1)\,dx$

h) $\int \frac{dx}{arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$

i) $\int (1-\pi x)^{2000}\,dx$

j) $\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

k) $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx$

l) $\int \frac{x^9}{(x^5+1)^3}\,dx$

12. cvičení - Úlohy týkající se rozkladu rac. lomené funkce na parc. zlomky

12.1 Polynomy

Definice 12.1
Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Funkci

$$P: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$$

Nazýváme **reálný polynom (mnohočlen)**. Čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty polynomu** P a n **stupeň polynomu** P.

Příklady polynomů:

- $P_1: y = 3x^3 - 1$ … polynom stupně 3,
- $P_2: y = 7x^4 + 3x^2 - 1$ … polynom stupně 4,
- $P_3: y = 4$ … polynom stupně 0.

Definice 12.2
Funkce R daná předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P je polynom a Q je nenulový polynom se nazývá **racionální lomenná funkce**.

Říkáme, že funkce R je **ryze lomenná**, jestliže stupeň polynomu P je nižší než stupeň polynomu Q. Je-li stupeň polynomu P stejný nebo vyšší než stupeň polynomu Q, mluvíme o **neryze lomenné** funkci.

Příklady racionálně lomenných funkcí:

- $R_1: y = \frac{3x^3-1}{7x^4+3x^2-1}$ … ryze lomenná racionální funkce
- $R_2: y = \frac{3x^5-1}{7x^4+3x^2-1}$ … neryze lomenná racionální funkce

Příklad 12.1

Vyjádřete neryze lomenou racionální funkci f jako součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce.

$$f: y = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

12.2 Rozklad polynomu na součin

Definice 12.3
Kořenem polynomu P rozumíme libovolnou komplexní číslo α takové, že $P(\alpha) = 0$.

Definice 12.4
Jsou-li $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ navzájem různé kořeny polynomu P_n a $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$, pak tvar polynomu

$$P_n: y = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-\beta_s)^{k_s}$$

Nazýváme **rozklad polynomu P_n na součin kořenových činitelů v komplexním oboru**. Číslům $k_1, k_2, \dots, k_s$ říkáme **násobnosti kořenů** $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Platí $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Věta 12.1
Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

- Polynom stupně 0 nemá žádný kořen.
  $P: y = 2$ … nemá žádný kořen

- Polynom stupně 1 má právě jeden kořen.
  $P: y = x - 2$ … kořen 2

- Polynom stupně 2 má právě dva komplexní kořeny, přičemž každý počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost.
  $P: y = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ … kořeny: 1, -2
  $P: y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ … dvojnásobný kořen 1
  $P: y = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ … kořeny: $i, -i$

- Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.
  - $P: y = x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$ … kořeny: $0, i, -i$
  - $P: y = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$ … kořeny: $0, 1, -1$

- Má-li polynom komplexní kořen $x = \alpha + \beta i$, má i komplexně sdružený kořen $x = \alpha - \beta i$, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

  Roznásobíme-li kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům $\alpha \pm \beta i$, dostáváme

  $$[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)] = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

  To je kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$.

Věta 12.2
Je-li polynom $P_n(x)$ stupně $n, n \geq 1$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ všechny jeho kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \ldots, k_s$ a označíme-li $x^2 + p_1x + q_1$, …, $x^2 + p_rx + q_r$ všechny kvadratické trojčleny odpovídající všem různým dvojicím komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $l_1, l_2, \ldots, l_r$, dostaneme

$$P_n(x) = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (x-\beta_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (x^2+p_rx+q_r)^{l_r}.$$

Tento tvar polynomu nazýváme **rozklad polynomu na součin ireducibilních (nerozložitelných) kořenových činitelů v reálném oboru**.

Příklad 12.2
Rozložte polynom $P_5(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních kořenových činitelů v reálném oboru, víte-li, že jeden kořen je $x = -\frac{1}{2}$.

12.3 Rozklad na parciální zlomky

Věta 12.3
Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomenná funkce s reálnými koeficienty a nechť
$Q(x) = \cdots \cdot (x-\alpha)^k \cdot \cdots \cdot (x^2+px+q)^j \cdot \cdots$, pak

$$R(x) = \cdots \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j} + \cdots,$$

Kde $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_j, C_1, \cdots, C_j \in \mathbb{R}$.

Postup nalezení koeficientů rozkladu [2]

1. Nejprve se přesvědčíme, že zadaná funkce je ryze lomenná. Pokud tomu tak není, převedeme ji dělením na součet polynomu a racionální ryze lomenné funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
2. Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.
3. Podle tohoto rozkladu napíšeme předpokládaný tvar rozkladu na parciální zlomky s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomenné funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu získaného v bodě 2.
4. Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů. Na jedné straně rovnice je mnohočlen se známými koeficienty, na druhé straně mnohočlen s neznámými koeficienty.
5. Dva mnohočleny jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají stejné koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, která má vzhledem k jednoznačnosti rozkladu právě jedno řešení.
6. Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice a tím dostat hned některé koeficienty. Pak stačí porovnat koeficienty jen u některých mocnin neznámé (tak, abychom dostali potřebný počet rovnic pro ty koeficienty, jejichž hodnoty ještě nemáme).

Příkad 12.3

Rozložte na parciální zlomky:

a) $R(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$

b) $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4-1}$

c) $R(x) = \frac{x^4 - x + 1}{x^3 - 1}$

d) $R(x) = \frac{-3x^3+25x^2-32x-2}{(x-1)^2(x-2)(x+3)}$

12.4 Integrace racionální lomenné funkce

Každou racionální lomenou funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \underbrace{R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_s(x)}_{\text{parciální zlomky}}$$

Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$ jsou tyto funkce spojité, takže k nim existuje primitivní funkce a platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)\,dx + \int R_1(x)dx + \cdots + \int R_s(x)dx.$$

Integraci základních typů parciálních zlomků si vyzkoušíme v následujícím příkladu.

Příklad 12.4

a) $\int \frac{3}{x-7}dx$

b) $\int \frac{5}{(x-1)^2}dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

d) $\int \frac{3x+7}{x^2+2}dx$

e) $\int \frac{1}{x^2+2x+10}dx$

f) $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1}\,dx$

Příklad 12.5

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+4x-5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$$

13. cvičení - Další typy integrálů

13.1 Integrály typu $\int R(e^x)dx$, $\int R(\ln x)dx$

$\int R(e^x)dx$	substituce: $t = e^x$, $dt = e^x dx$ nebo substituce: $t = e^x \Rightarrow x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}dt$
$\int R(\ln x)dx$	substituce: $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$

Příklad 13.1

a) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$

b) $\int \frac{\ln x-1}{(\ln^2 x+1)x}dx$

13.2 Integrály obsahující odmocniny

$\int R\left(x, \sqrt[s]{x}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{x} \Rightarrow x = t^s,\ dx = st^{s-1}dt$
$\int R\left(x, \sqrt[s]{ax+b}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{ax+b} \Rightarrow x = \frac{t^s-b}{a},\ dx = \frac{s}{a}t^{s-1}dt$
$\int R\left(x, \sqrt[s_1]{x}, \sqrt[s_2]{x}, \dots, \sqrt[s_k]{x}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{x}$, kde s je nejmenší společný násobek $s_1, s_2, \dots, s_k$
$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Příklad 13.2

a) $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

c) $\int x\sqrt{3-x}dx$

d) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$

e) $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

13.3 Integrály obsahující goniometrické funkce

Speciálním případem je $\int sin^n x \cdot cos^m x\,dx$, který řešíme takto:

- je $-$ li n liché: substituce: $t = \cos x,\ dt = -\sin x\,dx$
- je-li m liché: substituce: $t = \sin x,\ dt = \cos x\,dx$
- je-li n, m liché: substituce: $t = \cos x,\ dt = -\sin x\,dx$
  nebo
  substituce: $t = \sin x,\ dt = \cos x\,dx$
- je-li n, m sudé: upravíme pomocí vztahů:
  $sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Příklad 13.3

a) $\int \sin x \cdot \cos^3 x \ dx$

b) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$

c) $\int \sin^2 x \, dx$

d) $\int sin^4 x \cdot cos^2 x \, dx$

14. cvičení - Výpočet určitého integrálu (+ aplikace)

Určitý integral přiřazuje funkci číslo. Podle toho, co daná funkce znázorňuje, může mít výsledné číslo různý význam. Například:

- obsah rovinného obrazce,
- délka křivky,
- objem tělesa,
- celkový elektrický náboj rozložený na rovinném obrazci, …

Definice 14.1
Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$.
Řekneme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná neboli že má určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle a; b\rangle$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $|S(f, D, \Xi) - I| < \varepsilon$.

Číslo I pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme $\int_a^b f(x)dx = I$.

Číslo a se nazývá dolní mez, číslo b horní mez, interval $\langle a; b\rangle$ integrační obor a funkce f integrand. Horní a dolní mez nazýváme společně integrační meze.

Věta 14.1
Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$. Nechť je na tomto intervalu splněna kterákoliv z následujících podmínek:

1) $f(x)$ je monotónní,
2) $f(x)$ je spojitá,
3) $f(x)$ je ohraničená a má konečný počet bodů nespojitosti.

Pak existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$.

Věta 14.2
Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak také funkce $f(x) \pm g(x)$ a $cf(x)$, kde c je libovolná konstanta, jsou na tomto intervalu integrovatelné a platí:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

První vlastnost se nazývá **aditivita vzhledem k integrandu**, druhá **homogenita**.

Věta 14.3
Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a; b\rangle$ a $a < c < b$. Pak je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ právě když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a; c\rangle$ a $\langle c; b\rangle$. Přitom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx.$$

Této vlastnosti se říká **aditivita vzhledem k integračnímu oboru**.

Příklad 14.1

Vypočtěte $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$, kde

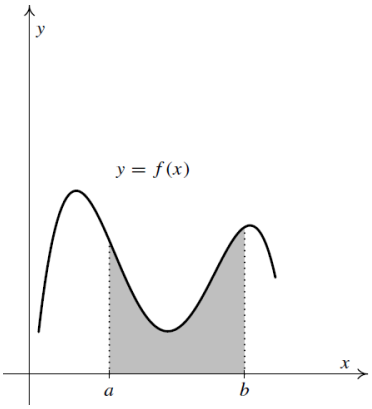
$$f(x) = \begin{cases} 2 & pro\ x\ \in \langle -2; 1\rangle, \\ -1 & pro\ x\ \in (1; 3), \\ 1 & pro\ x\ \in \langle 3; 4\rangle. \end{cases}$$

Věta 14.4 (Newtonova-Leibnitzova formule)
Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce. Pak platí, že:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Poznámka: Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžilo označení $[F(x)]_a^b$, proto obvykle píšeme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$



Geometrická interpretace Newtonova-Leibnitzova vzorce (převzato z [2])

Příklad 14.2

S využitím Newtonova-Leibnitzova vztahu určete:

a) $\int_1^2 x^4 dx$

b) $\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx$

c) $\int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2+2} + \frac{x}{x^2+2} \right) dx$

14.1 Metoda per partes pro určitý integrál

Věta 14.5

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Příklad 14.3

a) $\int_1^2 (x^2+1)\,ln\,x\,dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2\,sin\,x\,dx$

c) $\int_0^1 V^2 e^{-\frac{V}{2}}\,dV$

14.2 Substituční metoda pro určitý integrál

Věta 14.6
Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, $a<b$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu $\langle \alpha;\beta\rangle$, $\alpha<\beta$, derivaci $\varphi'(x)$, která je na intervalu $\langle \alpha;\beta\rangle$ integrovatelná. Dále nechť platí $a\le\varphi(x)\le b$ pro $x\in\langle \alpha;\beta\rangle$. Pak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Příklad 14.4

a) $\int_\pi^{2\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$

b) $\int_0^1 x(x^2-1)^3\,dx$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

14.3 Geometrické aplikace určitého integrálu

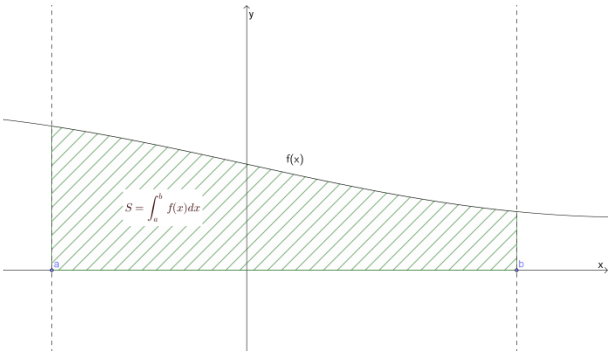
Věta 14.7
Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, integrovatelná a **nezáporná**. Pak pro obsah množiny $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$S(A) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta 14.8
Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$. Pak pro obsah množiny $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$S(B) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

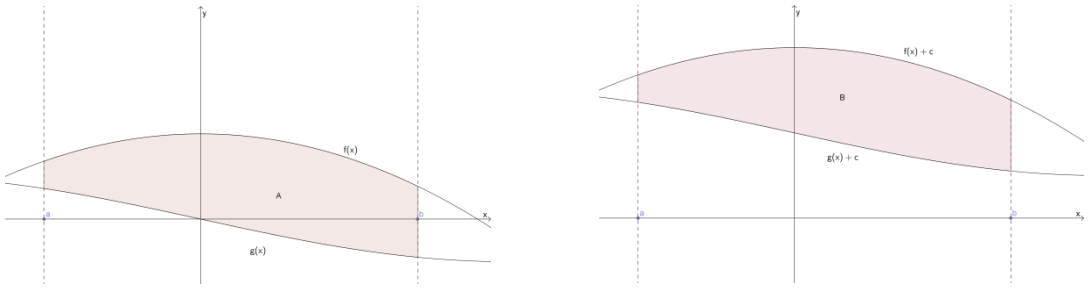
Je-li funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)dx$ udává obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.



Geometrická interpretace určitého integrálu

Naším úkolem je určit obsah množiny A (části roviny), která je ohraničena přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g.

Předpokládejme, že funkce f a g jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ integrovatelné a platí, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a; b\rangle$. Pak si množinu A lze představit jako plochu na obrázku (a).



(a) (b)

Mnnožiny A a množina B

Je zřejmé, že pokud grafy funkcí f a g posuneme o konstantu *c* ve směru osy y, pak se obsah množiny B, která je ohraničená grafy funkcí $f + c$, $g + c$ a přímkami $x = a$ a $x = b$ bude stejný jako obsah původní množiny A, tj. $S(A) = S(B)$ – viz obr. (a), (b).

Příklad 14.5

Vypočtěte obsah množiny K ohraničené grafy funkcí $g: y = x^2 + x - 3$ a $f: y = -x^2 - 2x + 2$.

Věta 14.9 (O délce křivky)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro délku jejího grafu G platí

$$l(G) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad 14.6

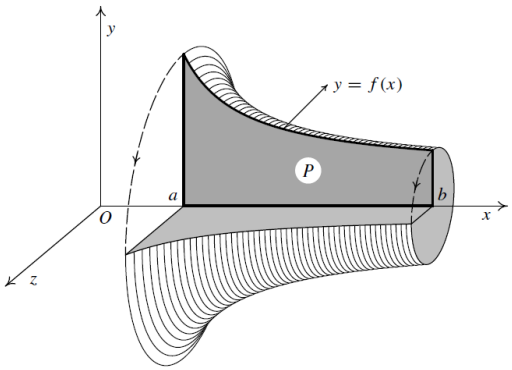
Určete délku grafu G funkce $f: y = \ln x, x \in \langle\sqrt{3}; \sqrt{15}\rangle$.

Věta 14.10 (O objemu rotačního tělesa)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro objem rotačního tělesa V, které vzniklo rotací křivočarého obdelníku $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Věta 14.11 (O obsahu pláště rotačního tělesa)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro obsah pláště rotačního tělesa V, které vzniklo rotací křivočarého obdelníku $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Rotační těleso (převzato z [2])

Příklad 14.7

Odvoďte vztahy pro objem koule a obsah kulové plochy o poloměru $r > 0$.