9. cvičení – Průběh funkce

Co chápeme pod pojmem vyšetření průběhu funkce?
Vyšetření vlastností, které nám umožní, abychom funkci rozumně charakterizovali a nakreslili její graf.

Co nás obvykle zajímá při vyšetření průběhu funkce?
Definiční obor; sudost, lichost (informace, zda je graf funkce symetrický); periodičnost; spojitost; maximální intervaly, na nichž je funkce monotónní (dále monotonie); lokální extrémy (minima, maxima); maximální intervaly, na nichž je funkce konvexní, konkávní (dále konvexnost, konkávnost); inflexní body; asymptoty grafu funkce.

9.1 Monotonie

Věta 9.1
Nechť funkce f má na intervalu $(a,b), a,b \in \mathbb{R}^*$, derivaci. Je-li
a) $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***rostoucí*** na (a,b),
b) $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***neklesající*** na (a,b),
c) $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***klesající*** na (a,b),
d) $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***nerostoucí*** na (a,b).

Příklad 9.1
Určete maximální intervaly ryzí monotonie následujících funkcí:

a) $f: y = 2x^2 - 5x + 1$ *b)* $g: y = \frac{\ln^2 x}{x}$ *c)* $h: y = e^{x^3-12x}$

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x - 5$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{4} \Leftrightarrow \underline{x \in (\frac{5}{4}; \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty; \frac{5}{4}) \Rightarrow f(x) \searrow}$

($x = \frac{5}{4}$ ... souřadnice vrcholu paraboly)

b) $g(x) = \frac{\ln^2 x}{x} \qquad D(g) = (0; \infty)$

$g'(x) = \frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x \cdot (2 - \ln x)}{x^2}$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\ln x}_{t} \cdot (2 - \ln x) > 0 \Leftrightarrow t(2-t) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \in (0; 2) \Leftrightarrow \ln x \in (0; 2) \Leftrightarrow x \in (e^0; e^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x \in (1; e^2) \Rightarrow g(x) \nearrow}$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow (t < 0) \vee (t > 2) \Leftrightarrow (\ln x < 0) \vee (\ln x > 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x \in (0; 1),\ x \in (e^2; \infty) \Rightarrow g(x) \searrow}$

c) $h(x) = e^{x^3-12x}$ $\quad D(h) = \mathbb{R}$

$h'(x) = \underbrace{e^{x^3-12x}}_{>0} \cdot (3x^2-12)$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2-12 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty;-2);\ x \in (2;\infty)} \Rightarrow h(x) \nearrow$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2-12 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow \underline{x \in (-2;2)} \Rightarrow h(x) \searrow$

9.2 Lokální extrémy

Definice 9.1
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální minimum***, resp. ***lokální maximum***, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***ostré lokální minimum***, resp. ***ostré lokální maximum***, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

Má-li funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální extrém***.

Definice 9.2
Bod $x_0 \in D(f)$, ve kterém platí $f'(x_0) = 0$, se nazývá ***stacionární bod***.
Věta 9.2
Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$, anebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta 9.3
Nechť $f'(x_0) = 0$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li
a) $f''(x) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum,
b) $f''(x) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.

Věta 9.4
Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a nechť $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Je-li:
- n liché, pak f nemá v bodě x_0 lokální extrém.
- n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f má v bodě x_0 lokální minimum.
- n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak f má v bodě x_0 lokální maximum.

Příklad 9.2

Najděte lokální extrémy a maximální intervaly monotonie následujících funkcí.

a) $f: y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$ *b)* $g: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

a) $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = \underbrace{60x^2}_{\geq 0}(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \iff (x = 0) \vee (x^2 - x - 2 = 0)$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ stac. body: $\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2}$

$f'(x)$ neex. $\times$

$f''(x) = 240x^3 - 180x^2 - 240x = 60x(4x^2 - 3x - 4)$

$f''(0) = 0$ ... nelze určit, zda jde o extrém

$f''(-1) = -60 \cdot (4 + 3 - 4) = -180 < 0 \Rightarrow$ v $x = -1$ je lok. max.

$f''(2) = 120(16 - 6 - 4) = 720 > 0 \Rightarrow$ v $x = 2$ je lok. min.

$f'''(x) = 720x^2 - 360x - 240 = 60(12x^2 - 6x - 4) = 120(6x^2 - 3x - 2)$

$f'''(0) = -240 \neq 0 \Rightarrow$ 3. derivace (lichá), tj. v $x = 0$ není extrém

$x \in (-\infty; -1) \Rightarrow f(x) \nearrow$

$x \in (-1; 2) \Rightarrow f(x) \searrow$

$x \in (2; \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow$

b) $g(x) = x \cdot e^{1/x} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g'(x) = e^{1/x} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - 1}{x}$

$g'(x) = 0 \iff$ $x = 1$ ... stac. bod

$g'(x)$ neex. $\iff x = 0 \notin D(g) \Rightarrow$ není extrém

$$g''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{+x+(1-x)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(-x+1+x)}{x^3} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$g''(1) = e > 0 \Rightarrow$ ↗ $x = 1$ ... lok. minimum

↘ ↓ min. ↗ ; 0, 1

$x \in (-\infty; 0) \Rightarrow g(x)$ ↘
$x \in (0; 1) \Rightarrow g(x)$ ↘
$x \in (1; \infty) \Rightarrow g(x)$ ↗

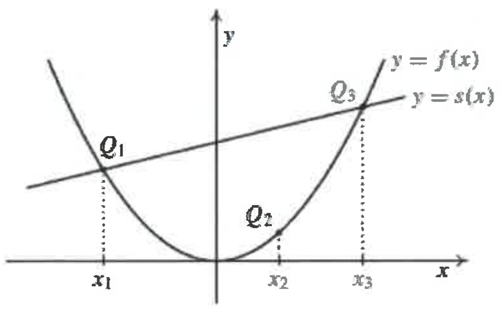
9.3 Konvexnost, konkávnost

Definice 9.3
Řekneme, že funkce f je ***ryze konvexní na intervalu*** $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in f$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí
$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

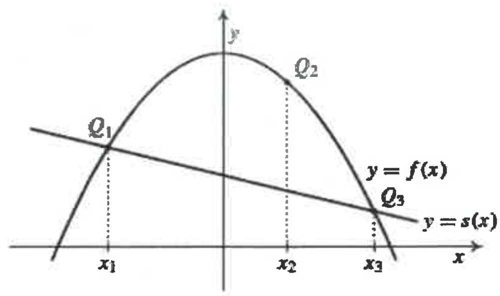
Nahradíme-li v definici 9.3 znak < znakem ≤, dostáváme funkci ***konvexní na intervalu I***. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je ***ryze konvexní***, resp. ***konvexní***.

Definice 9.4
Řekneme, že funkce f je ***ryze konkávní na intervalu*** $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in f$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí
$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Nahradíme-li v definici 9.4 znak > znakem ≥, dostáváme funkci ***konkávní na intervalu I***. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je ***ryze konkávní***, resp. ***konkávní***.



Graf konvexní funkce (převzato z [1])

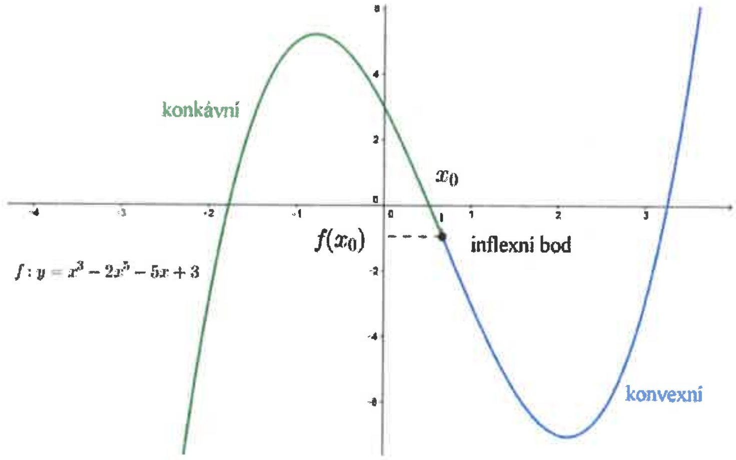


Graf konkávní funkce (převzato z [1])

Definice 9.5
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***inflexi***, jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní, resp. naopak.

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $(x_0, f(x_0))$ nazýváme ***inflexním bodem*** funkce f.

Tj. v inflexním bodě existuje tečna a mění se zde „konvexnost na konkávnost" anebo naopak.



Věta 9.5
Nechť funkce f má na intervalu $(a, b), a, b \in \mathbb{R}^*$, druhou derivaci. Je-li
a) $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***ryze konvexní*** na (a, b),
b) $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***konvexní*** na (a, b),
c) $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***ryze konkávní*** na (a, b),
d) $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***konkávní*** na (a, b).

Příklad 9.3
Určete maximální intervaly, na nichž jsou následující funkce konvexní, resp. ryze konvexní a určete jejich inflexní body:

a) $f: y = x^3 + 3x$ *b)* $g: y = \frac{x}{1+x^2}$ *c)* $h: y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$

a) $f(x) = x^3 + 3x$ $D(f) = \mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 + 3$
$f''(x) = 6x$
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; \infty) \ldots f(x) \cup$ (konvexní)
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \ldots f(x) \cap$ (konkávní)
v $x = 0$ je inflexní bod

b) $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $D(g) = \mathbb{R}$
$g'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$
$g''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2) \cdot (-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3)}{(1+x^2)^4} =$
$= \frac{+2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}; 0); x \in (\sqrt{3}; \infty) \Rightarrow g(x) \cup$
$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}); x \in (0; \sqrt{3}) \Rightarrow g(x) \cap$

infl. body
$x_1 = -\sqrt{3}$
$x_2 = 0$
$x_3 = \sqrt{3}$

c) $h(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ $\quad D(h) = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{-\sin x\cdot(2+\sin x) - \cos x\cdot\cos x}{(2+\sin x)^2} = \frac{-2\cdot\sin x - 1}{(2+\sin x)^2}$$

$$h''(x) = \frac{(-2\cdot\cos x)\cdot(2+\sin x)^2 - (-2\cdot\sin x - 1)\cdot 2\cdot(2+\sin x)\cdot\cos x}{(2+\sin x)^4} =$$

$$= \frac{(2+\sin x)(-4\cdot\cos x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x + 4\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cos x)}{(2+\sin x)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot\cos x\,(\overset{\ominus}{\sin x - 1})}{(2+\sin x)^3}$$

$h''(x) > 0 \iff \cos x \overset{+}{<} 0 \iff \boxed{x \in (\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi);\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow h(x) \cup}$

$h''(x) < 0 \iff \cos x > 0 \iff \boxed{x \in (-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi);\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow h(x) \cap}$

9.4 Asymptoty grafu funkce

Definice 9.6
Přímka $p: x = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá ***svislá asymptota grafu funkce f***, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Svislé asymptoty mohou nastat v bodech nespojitosti definičního oboru nebo v hraničních bodech definičního oboru.

Příklad 9.4
Najděte svislé asymptoty grafů funkcí:

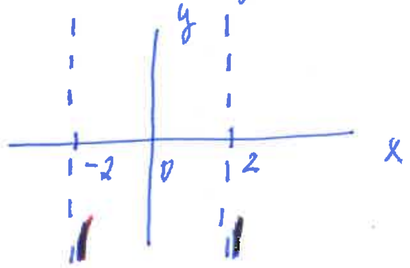
a) $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ $\qquad$ *b)* $g: y = x + \frac{\ln x}{x}$

a) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ $\quad D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

Svislé asymptoty mohou být: $x = -2$, $x = 2$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{4+x^3}{4-x^2} = \text{"}\frac{-4}{0^+}\text{"} = -\infty \Rightarrow$ asymptota: $x = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{4+x^3}{4-x^2} = \text{"}\frac{12}{0^-}\text{"} = -\infty \Rightarrow$ asymptota: $x = 2$

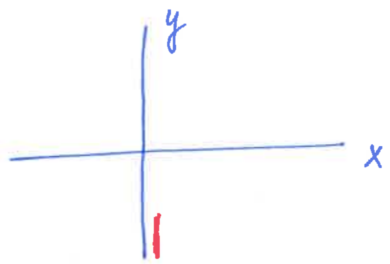


b) $g(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ $D(g) = (0;\infty)$

svislé asymptoty může být: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = \text{"}0 - \frac{\infty}{0^+} = 0 - \infty\cdot\infty\text{"} = -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ asymptota: $x = 0$



Definice 9.7

Přímka $p: y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu,*** resp. ***v mínus nekonečnu,*** jestliže platí:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax + b)\big) = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

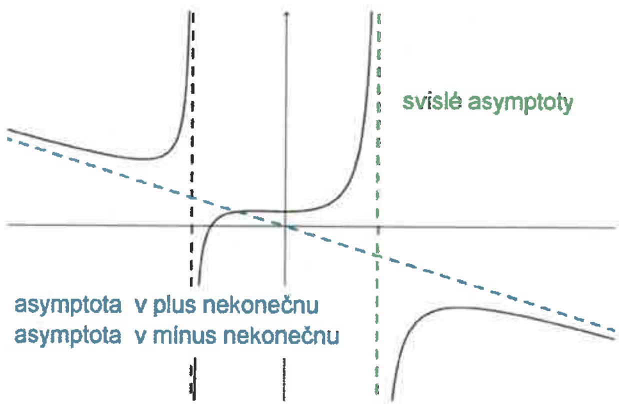
Věta 9.5

Přímka $p: y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu,*** právě když

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a,\quad a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b,\quad b \in \mathbb{R}.$$

Přímka $p: y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v mínus nekonečnu,*** právě když

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a,\quad a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = b,\quad b \in \mathbb{R}.$$



Příklad 9.5

Najděte asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ grafů funkcí:

a) $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ b) $g: y = x + \frac{\ln x}{x}$

a) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ $\mathcal{D}(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

asymptota v ∞

$p_1: y = ax + b$

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4+x^3}{4x-x^3} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4+x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4+x^3+4x-x^3}{4-x^2} = 0$

$p_1: y = -x$

asymptota v $-\infty$

$p_2: y = ax + b$

$a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4+x^3}{4x-x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3(\frac{4}{x^3}+1)}{x^3(\frac{4}{x^2}-1)} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{4+x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4+4x}{4-x^2} = 0$

$p_2: y = -x$

b) asymptota v ∞

$p_1: y = ax + b$

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 + \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}}_{LP} =$

$= 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (g(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{"LP"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$p_1: y = x$

asymptota v $-\infty$

$\mathcal{D}(g) = (0; \infty) \Rightarrow$ as. v $-\infty$ neřešíme

9.5 Průběh funkce

Postup:

1. Určíme definiční obor.
2. Rozhodneme, zda je funkce spojitá, resp. určíme body nespojitosti.
3. Rozhodneme, zda je funkce sudá nebo lichá, příp. periodická.
4. Vypočteme f' a $D(f')$.
5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
6. Určíme intervaly monotonie funkce a lokální extrémy.
7. Vypočteme f'' a $D(f'')$.
8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní a určíme inflexní body.
10. Najdeme svislé asymptoty a asymptoty v $\pm\infty$.
11. Podle potřeby určíme další vlastnosti funkce f (průsečíky s osami, funkční hodnoty ve významných bodech, ...)
12. Načrtneme graf funkce f.

Příklad 9.6

Vyšetřete průběh funkcí:

a) $f: y = \frac{x}{3-x^2}$ *b)* $g: y = ln(4-x^2)$ *c)* $h: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$

(1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

(2) viz (1)

(3) $f(-x) = \frac{-x}{3-(-x)^2} = \frac{-x}{3-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ $\underline{f \text{ je f-ce lichá}}$

(4) $f'(x) = \frac{(3-x^2) - x\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$

(5+6) $f'(x) = 0 \sim$ ✗

$f'(x)$ neex. $\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \notin D(f)$; $x = \sqrt{3} \notin D(f)$ $\Big\} \Rightarrow$ stac. b. neex.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in D(f) \Rightarrow$ $x \in (-\infty; -\sqrt{3})$ $f \nearrow$

$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \Rightarrow f \nearrow$

$x \in (\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow f \nearrow$

(7-9) $f''(x) = \frac{2x\cdot(3-x^2)^2 - (3+x^2)\cdot 2(3-x^2)\cdot(-2x)}{(3-x^2)^4} =$

$= \frac{(3-x^2)(6x - 2x^3 + 12x + 4x^3)}{(3-x^2)^4} = \frac{2x\overbrace{(2x^2+3)}^{+}}{(3-x^2)^3}$

	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$	$+$		$+$
$(3-x^2)^3$	$-$		$+$	$+$		$-$
$f''(x)$:	$+$		$-$	$+$		$-$
$f(x)$:	$\cup$		$\cap$	$\cup$		$\cap$

inflexní bod: $x=0$ $\quad(-\sqrt{3}\notin D(f);\ \sqrt{3}\notin D(f))$

(10) Svislé asymptoty

? $x=-\sqrt{3}$; $x=\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \text{“}\frac{-\sqrt{3}}{0^-}\text{”} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \text{“}\frac{-\sqrt{3}}{0^+}\text{”} = -\infty$$
$\Big\}$ as. $\underline{x=-\sqrt{3}}$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \text{“}\frac{\sqrt{3}}{0^+}\text{”} = \infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \text{“}\frac{\sqrt{3}}{0^-}\text{”} = -\infty$$
$\Big\}$ as. $\underline{x=\sqrt{3}}$

"Šikmé asymptoty"

• v ∞

p_1: $y=ax+b$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3-x^2}=0$$
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3-x^2}=0$$

$\underline{p_1:\ y=0}$

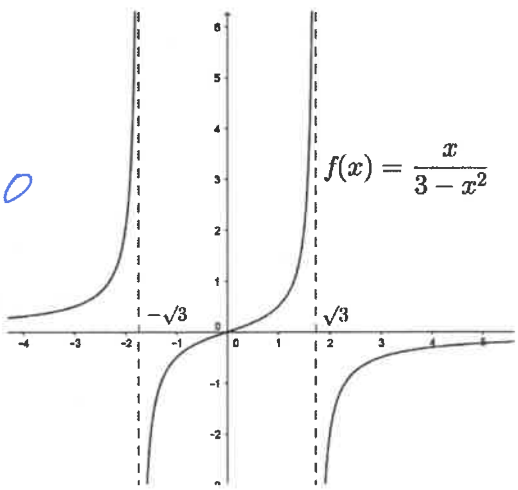
• v $-\infty$

p_2: $y=ax+b$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3-x^2}=0$$
$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3-x^2}=0$$

$\underline{p_2:\ y=0}$

(12)



1) (1) $f(x) = \ln(4-x^2)$; $4-x^2>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow |x|<2 \Rightarrow \underline{D(f)=(-2;2)}$

(3) $f(-x) = \ln(4-(-x)^2) = \ln(4-x^2) = f(x) \Rightarrow$ <u>f je fce sudá</u>

(POZOR! Nutno kontrolovat i $D(f)$)

(4) až (6) $f'(x) = \dfrac{-2x}{4-x^2}$

	$(-2;0)$	$(0;2)$
$-2x$	+	−
$(4-x^2)$	+	+
$f'(x)$:	+	−
$f(x)$:	↗	↘

$\Rightarrow$ lok. maximum: $x=0$, $y=\ln 4$

(7–9) $f''(x) = \dfrac{-2(4-x^2)+2x\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{-8-2x^2}{(4-x^2)^2} = \dfrac{-2(x^2+4)}{(4-x^2)^2}$

	$(-2;2)$
$-2(x^2+4)$	−
$(4-x^2)^2$	+
$f''(x)$:	−
$f(x)$:	∩

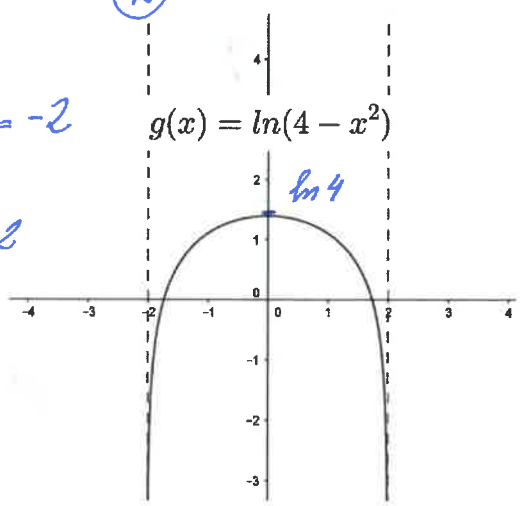
(10) <u>Svislé asymptoty</u>

? $x=-2$; $x=2$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \ln(4-x^2) = -\infty \Rightarrow$ as. $x=-2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(4-x^2) = -\infty \Rightarrow$ as. $x=2$

(12)



c) (1) $h(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ $D(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

(2) Bod nespojitosti: $x = 0$

(3) $h(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm h(x) \Rightarrow h$ není f-ce sudá ani lichá

(4) až (6) $h'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)$

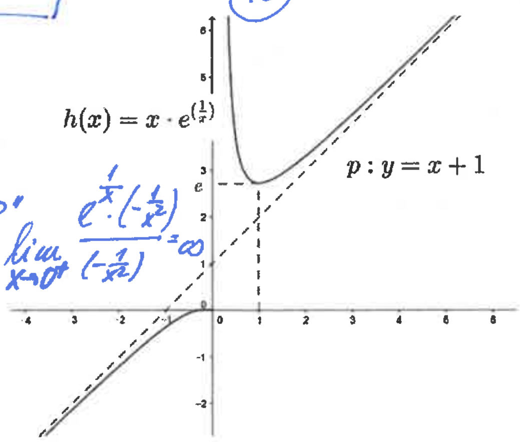
	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$e^{\frac{1}{x}}$	+	+	+
$(x-1)$	−	−	+
x	−	+	+
$h'(x)$:	+	−	+
$h(x)$:	↗	↘	↗

$\Rightarrow$ lok. minimum: $x = 1$, $y = e$

(7-9) $h''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) = + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}$

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$+e^{\frac{1}{x}}$	+	+
$\frac{1}{x^3}$	−	+
$h''(x)$:	−	+
$h(x)$:	∩	∪

(12)



(10) Svislé as.

? $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = "0 \cdot \infty" = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"LP"}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \infty$

$\Rightarrow$ as. $x = 0$

"Šikmé as."

(v −∞ obdobné)

$v\ \infty$: $p_1: y = ax + b$

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$b = \lim_{x \to \infty} (h(x) - ax) = \lim_{x \to \infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"LP"}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

$p_1: y = x + 1$