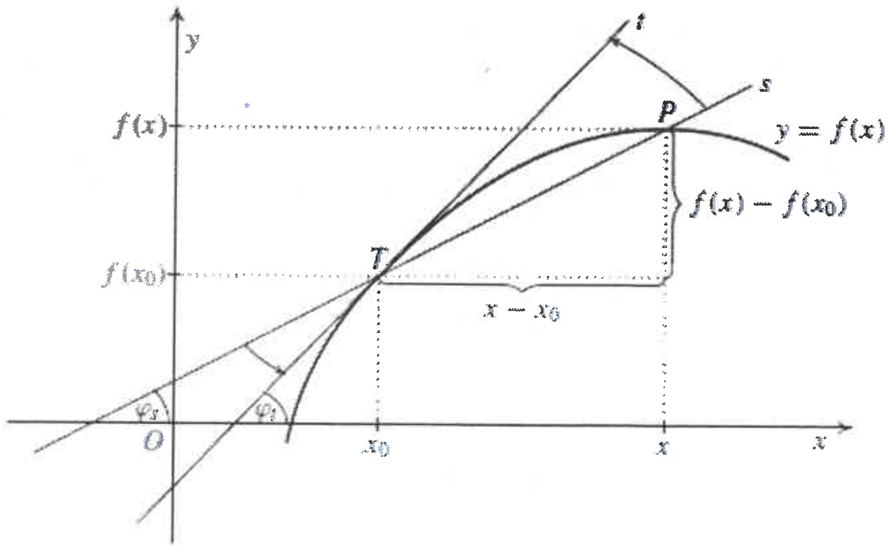
7. cvičení Využití limit – Derivace

7.1 Definice derivace

Derivování je přechod od funkce f, jež udává vztah mezi proměnnými x a y, k funkci f', jež udává vztah mezi proměnnou x a směrnici tečny funkce f v bodě x. Hodnota $f'(x)$, udává v každém bodě x sklon funkce f (směrnici její tečny). Funkci $f'(x)$ nazýváme **derivací** funkce f.

Geometrický model



Geometrický model derivace (převzato z [1])

Definice 7.1
Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme ji **derivací** funkce f v bodě x_0.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci.**
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci.**

Definice 7.2
Nechť $x_0 \in D(f)$.

Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, značíme ji $f'_+(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zprava** funkce f v bodě x_0.

Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, značíme ji $f'_-(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zleva** funkce f v bodě x_0.

Funkce f má v bodě x_0 derivaci, právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny.

Příklad 7.1

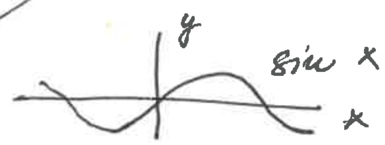
Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí v bodě x_0.

a) $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = 0$ *b)* $f(x) = |\sin x|,\ x_0 = 0$ *c)* $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2,\ x_0 = 0$

a) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \underline{\underline{1}}$

b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x} = \underline{\underline{\text{neex.}}}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1 \end{aligned}\right\}$$



c) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^4 - 3x^2 + 2) - (0^4 - 3\cdot 0^2 + 2)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 - 3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^3 - 3x) = \underline{\underline{0}}$

Věta 7.1
Má-li funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

7.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

[1] $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}\ (konst.), x \in \mathbb{R}$,

[2] $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$,

[3] $(\sin x)' = \cos x\,,\ x \in \mathbb{R}$,

[4] $(\cos x)' = -\sin x\,,\ x \in \mathbb{R}$,

[5] $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$.

Věta 7.2
Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $fg, \frac{f}{g}$ a cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci a platí

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0$,

d) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

Příklad 7.2

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = -3\sin x + 2e^x - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = x^4 \sin x$ e) $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2}$ f) $f(x) = tg\, x$

a) $f'(x) = (x^4 - 3x^2 + 2)' = \underline{\underline{4x^3 - 6x}}$

b) $f'(x) = \left(-3 \cdot \sin x + 2e^x - \frac{1}{x}\right)' = \underline{\underline{-3\cos x + 2e^x + \frac{1}{x^2}}}$

c) $f'(x) = (x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{e^x(x+1)}}$

d) $f'(x) = (x^4 \sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x = \underline{\underline{x^3(4\sin x + x \cdot \cos x)}}$

e) $$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x^4+2}\right)' = \frac{2 \cdot (x^4+2) - (2x+1) \cdot 4x^3}{(x^4+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 + 4 - 8x^4 - 4x^3}{(x^4+2)^2} = \frac{-6x^4 - 4x^3 + 4}{(x^4+2)^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2(3x^4 + 2x^3 - 2)}{(x^4+2)^2}}}$$

f) $$f'(x) = (tg\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}$$

[6] $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$,

[7] $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

Věta 7.3

Derivace inverzní funkce

Nechť $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)}, je - li\ f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, \quad je - li\ f'(y_0) = 0\ a\ funkce\ f\ je\ na\ I\ rostoucí, \\ -\infty, \quad je - li\ f'(y_0) = 0\ a\ funkce\ f\ je\ na\ I\ klesající. \end{cases}$$

Příklad 7.3

Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem $f(x) = \ln x$.

$$f^{-1}(x):\ y = \ln x \Rightarrow f(y):\ x = e^y$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

[8] $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$,

[9] $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$,

[10] $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$,

[11] $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$,

[12] $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Věta 7.4

Derivace složené funkce

Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládáme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$(F)'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

Příklad 7.4

Vypočtěte F', je-li F dána předpisem:

a) $F(x) = (x^4 - 3x^2 + 2)^{10}$
b) $F(x) = \sin 5x$
c) $F(x) = \ln(\sin x)$
d) $F(x) = \sqrt{x^4 - 2}$
e) $F(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

a) $$\left[(x^4 - 3x^2 + 2)^{10}\right]' = 10 \cdot (x^4 - 3x^2 + 2)^9 \cdot (x^4 - 3x^2 + 2)' = \underline{\underline{10 \cdot (x^4 - 3x^2 + 2)^9 (4x^3 - 6x)}}$$

b) $$(\sin 5x)' = \cos 5x \cdot (5x)' = \underline{\underline{5 \cdot \cos 5x}}$$

c) $$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \underline{\underline{\operatorname{cotg} x}}$$

d) $$\left(\sqrt{x^4 - 2}\right)' = \frac{1}{2}(x^4 - 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^4 - 2)' = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 - 2}} = \underline{\underline{\frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 2}}}}$$

e) $$(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{\ln a^x} \cdot \ln a = \underline{\underline{a^x \cdot \ln a}}$$

[13] $(a^x)' = a^x \ln a, \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},$

[14] $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \ x \in \mathbb{R}^+.$

Příklad 7.5

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$ c) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1}$

d) $f(x) = \sin^2 x$ e) $f(x) = \sin x^2$ f) $f(x) = \log_3 x^4$

a) $[\ln(1+\cos x)]' = \frac{1}{1+\cos x} \cdot \underbrace{(1+\cos x)'}_{-\sin x} = \underline{\underline{\frac{-\sin x}{1+\cos x}}}$

b) $\left(\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)' =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} \cdot \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^2} =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\sqrt{1+e^x}}{\sqrt{1-e^x}} \cdot \frac{(-\cancel{2}e^x)}{(1+e^x)^2} = \underline{\underline{\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^x} \cdot \sqrt{(1+e^x)^3}}}}$

c) $\left(\operatorname{arctg} \sqrt{6x-1}\right)' = \frac{1}{1+(6x-1)} \cdot \left(\sqrt{6x-1}\right)' = \frac{1}{6x} \cdot \frac{1}{2} \cdot (6x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(6x-1)'}_{6}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}}}$

d) $(\sin^2 x)' = 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \underline{\underline{\sin 2x}}$

POZOR! $(\sin^2 x) = (\sin x)^2 \neq \sin x^2$

e) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot \underbrace{(x^2)'}_{2x} = \underline{\underline{2x \cdot \cos x^2}}$

f) $(\log_3 x^4)' = \frac{1}{x^4 \ln 3} \cdot (x^4)' = \frac{4x^3}{x^4 \ln 3} = \underline{\underline{\frac{4}{x \cdot \ln 3}}}$ (dle [14])

Derivace funkcí $f(x)^{g(x)}$

Využíváme známého vztahu $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Příklad 7.6

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^x$ *b)* $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

a) $(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)' =$

$= \underbrace{e^{\ln x^x}}_{x^x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{x^x\cdot(1+\ln x)}}$

b) $\left((\sin x)^{\cos x}\right)' = \left(e^{\ln(\sin x)^{\cos x}}\right)' = \left(e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\right)' =$

$= e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\cdot(\cos x\cdot\ln(\sin x))' =$

$= (\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(\sin x) + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'\right)$

$= \underline{\underline{(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\cdot\ln(\sin x)\right)}}$

7.3 Derivace vyšších řádů

Definice 7.3

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom n-tou derivací (nebo derivací n-tého řádu) funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$ a definujeme rovností

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',$$

přičemž $f^{(0)}(x) = f$.

Příklad 7.7

Vypočtěte třetí derivaci funkce f dané předpisem.

a) $f(x) = \cos^2 x$ *b)* $f(x) = x\cdot\ln x$ *c)* $f(x) = xe^{2x}$

a) $f(x) = \cos^2 x$

$f'(x) = 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x) = -\sin 2x$

$f''(x) = (-\sin 2x)' = -\cos 2x\cdot 2 = -2\cdot\cos 2x$

$f'''(x) = (-2\cdot\cos 2x)' = -2\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = \underline{\underline{4\cdot\sin 2x}}$

b) $f(x) = x \cdot \ln x$

$f'(x) = (x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x$

$f''(x) = (1 + \ln x)' = \frac{1}{x}$

$f'''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$

c) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

$f'(x) = (x \cdot e^{2x})' = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(2x+1)$

$f''(x) = [e^{2x} \cdot (2x+1)]' = e^{2x} \cdot 2 \cdot (2x+1) + e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(4x+4)$

$f'''(x) = [e^{2x} \cdot (4x+4)]' = e^{2x} \cdot 2 \cdot (4x+4) + e^{2x} \cdot 4 =$

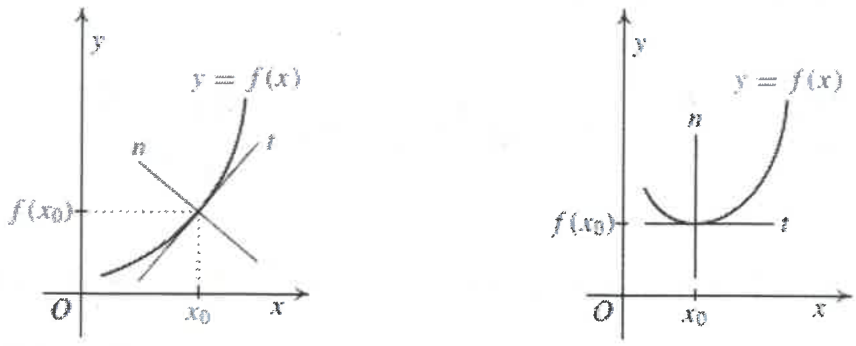
$= e^{2x}(8x+12) = \underline{\underline{4e^{2x}(2x+3)}}$

Tečna a normála

Definice 7.4
Přímka t o rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá **tečna ke grafu funkce f v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$**. Přímka n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, se nazývá **normála ke grafu funkce f v dotykovém bodě T**.



a) $f'(x_0) \neq 0$, b) $f'(x_0) = 0$

Tečna a normála ke grafu funkce (převzato z [1])

Příklad 7.8

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ v dotykovém bodě $T = (2, ?)$.

$$T \in f(x) \Rightarrow T = \left(2; \frac{8}{4+2^2}\right) = (\underset{x_0}{2}; \underset{y_0}{1})$$

$$t: y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$f'(x) = \left(\frac{8}{4+x^2}\right)' = \frac{-8}{(4+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{-16x}{(4+x^2)^2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t: y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow t: 2y - 2 = -x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{t: x + 2y - 4 = 0}}$$

$$ax + by + c = 0$$

$$n \perp t \Rightarrow \vec{n_n} = \vec{u_t} = (\overset{-b}{-2}; \overset{a}{1})$$

$$\Rightarrow n: -2x + y + c = 0$$

$$T \in n \Rightarrow -2x_0 + y_0 + c = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{n: -2x + y + 3 = 0}}$$

Příklad 7.9

Určete rovnice tečen ke grafu funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$, které jsou kolmé k přímce $p: x + +2y + 3 = 0$.

$$T \in f \Rightarrow T = \left(x_0; \frac{x_0^3}{6} + 2\right)$$

$$t \perp p \Rightarrow \vec{n_t} = \vec{u_p} = (-2; 1) \Rightarrow t: -2x + y + c = 0 \,/ \cdot (-1)$$

$$t: 2x - y - c = 0$$

$$t: y = \underset{f'(x_0)}{2}x - c$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x_0) = \frac{x_0^2}{2} = 2 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{01} = 2 \\ x_{02} = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} T_1 = \left(2; \frac{2^3}{6} + 2\right) = (2; \\ T_2 = \left(-2; \frac{(-2)^3}{6} + 2\right) = (-2; \end{matrix}$$

$$T_1 \in t: \quad t_1: 2 \cdot 2 - \frac{10}{3} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3} \Rightarrow t_1: 2x - y - \frac{2}{3} = 0$$

$$\underline{\underline{t_1: 6x - 3y - 2 = 0}}$$

$$T_2 \in t: \quad t_2: 2 \cdot (-2) - \frac{2}{3} - c = 0 \Rightarrow c = -\frac{14}{3} \Rightarrow t_2: 2x - y + \frac{14}{3} = 0$$

$$\underline{\underline{t_2: 6x - 3y + 14 = 0}}$$

7.4 Fyzikální význam derivace

Předpokládejme, že přímočarý pohyb hmotného bodu je popsán funkcí $s(t)$, která udává polohu hmotného bodu v závislosti na čase. Nechť existuje první a druhá derivace funkce $s(t)$.

$v(t_0) = s'(t_0)$ nazýváme **okamžitou rychlostí** bodu v čase t_0.

$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$ nazýváme **okamžitým zrychlením** bodu v čase t_0.

Příklad 7.10

Dráha pohybujícího se tělesa je popsána funkcí s danou předpisem $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$. Přitom dráha s je vyjádřena v metrech a čas t v sekundách. Zjistěte, ve kterém okamžiku je rychlost nulová.

$$v(t) = s'(t) = (2t^3 - 15t^2 + 36t + 2)' = 6t^2 - 30t + 36$$

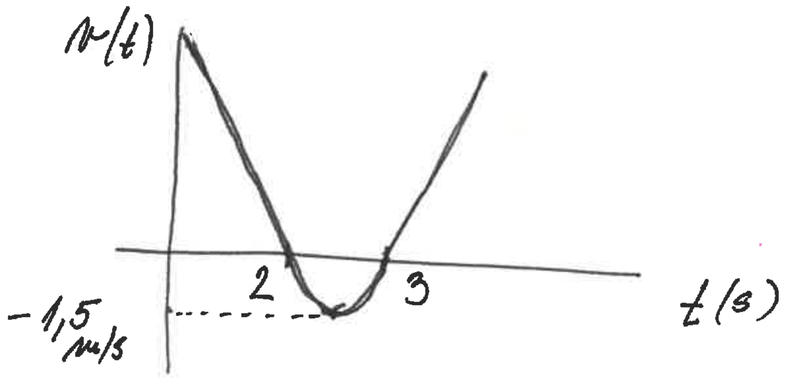
$$v(t) = 0$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0 \quad /:6$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \nearrow \underline{\underline{t_1 = 3\,s}} \quad \searrow \underline{\underline{t_2 = 2\,s}}$$



Co znamená záporná rychlost?
Těleso "couvá".