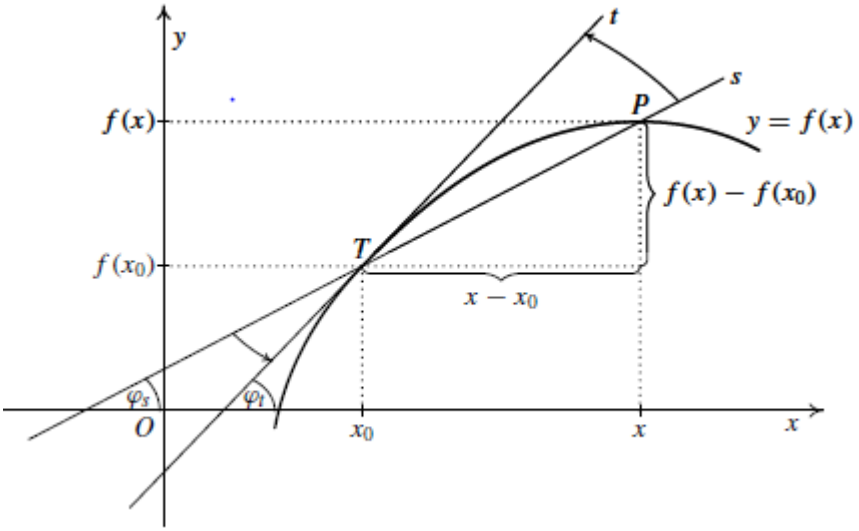
7. cvičení Využití limit – Derivace

7.1 Definice derivace

Derivování je přechod od funkce f, jež udává vztah mezi proměnnými x a y, k funkci f', jež udává vztah mezi proměnnou x a směrnici tečny funkce f v bodě x. Hodnota $f'(x)$, udává v každém bodě x sklon funkce f (směrnici její tečny). Funkci $f'(x)$ nazýváme **derivací** funkce f.

Geometrický model



Geometrický model derivace (převzato z [1])

Definice 7.1
Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme ji **derivací** funkce f v bodě x_0.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Definice 7.2
Nechť $x_0 \in D(f)$.

Existuje-li limita $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, značíme ji $f'_+(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zprava** funkce f v bodě x_0.
Existuje-li limita $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, značíme ji $f'_-(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zleva** funkce f v bodě x_0.

Funkce f má v bodě x_0 derivaci, právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny.

Příklad 7.1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí v bodě x_0.

a) $f(x) = \sin x\,,\ x_0 = 0$ *b)* $f(x) = |\sin x|,\ x_0 = 0$ *c)* $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2,\ x_0 = 0$

Věta 7.1

Má-li funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

7.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

[1] $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}\ (konst.), x \in \mathbb{R},$

[2] $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}\,, x \in \mathbb{R}^+,$

[3] $(\sin x)' = \cos x\,,\ x \in \mathbb{R},$

[4] $(\cos x)' = -\sin x\,,\ x \in \mathbb{R},$

[5] $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}.$

Věta 7.2

Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $fg, \frac{f}{g}$ a cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci a platí

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0,$

d) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$

Příklad 7.2

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = -3\sin x + 2e^x - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = x^4 \sin x$

e) $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2}$

f) $f(x) = tg\, x$

[6] $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z},$

[7] $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$

Věta 7.3

Derivace inverzní funkce

Nechť $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(y_0)}, je - li\ \ f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, \quad je - li\ \ f'(y_0) = 0\ a\ funkce\ f\ je\ na\ I\ rostoucí, \\ -\infty, \quad je - li\ \ f'(y_0) = 0\ a\ funkce\ f\ je\ na\ I\ klesající. \end{cases}$$

Příklad 7.3

Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem $f(x) = \ln x$.

[8] $(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^+,$

[9] $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1;1),$

[10] $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1;1),$

[11] $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R},$

[12] $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}.$

Věta 7.4

Derivace složené funkce

Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládáme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$(F)'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

Příklad 7.4

Vypočtěte F', je-li F dána předpisem:

a) $F(x) = (x^4 - 3x^2 + 2)^{10}$ *b)* $F(x) = sin\,5x$ *c)* $F(x) = ln(sin\,x)$

d) $F(x) = \sqrt{x^4 - 2}$ *e)* $F(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

[13] $(a^x)' = a^x \ln a\,,\ a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},$

[14] $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}\,,\quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},\ x \in \mathbb{R}^+.$

Příklad 7.5

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = ln(1 + cos\, x)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$

c) $f(x) = arctg\sqrt{6x-1}$

d) $f(x) = sin^2 x$

e) $f(x) = sin\, x^2$

f) $f(x) = log_3 x^4$

Derivace funkcí $f(x)^{g(x)}$

Využíváme známého vztahu $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Příklad 7.6

Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x^x$ *b)* $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

7.3 Derivace vyšších řádů

Definice 7.3

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom n-tou derivací (nebo derivací n-tého řádu) funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$ a definujeme rovností

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',$$

přičemž $f^{(0)}(x) = f$.

Příklad 7.7

Vypočtěte třetí derivaci funkce f dané předpisem.

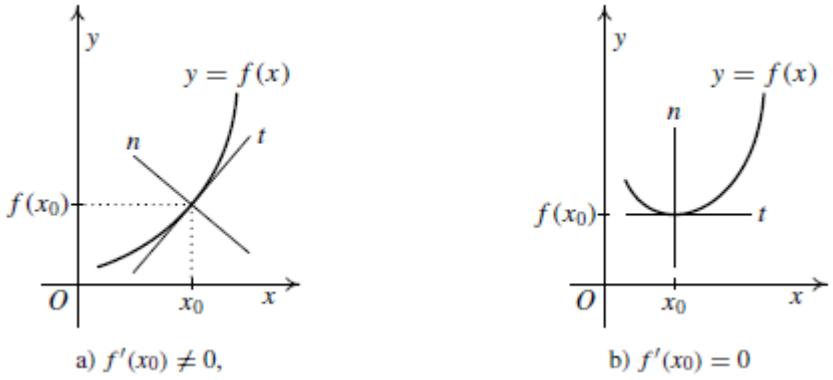
a) $f(x) = \cos^2 x$ *b)* $f(x) = x \cdot \ln x$ *c)* $f(x) = xe^{2x}$

Tečna a normála

Definice 7.4
Přímka t o rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá **tečna ke grafu funkce f v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$**. Přímka n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, se nazývá **normála ke grafu funkce f v dotykovém bodě T**.



Tečna a normála ke grafu funkce (převzato z [1])

Příklad 7.8

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ *v dotykovém bodě* $T = (2, ?)$.

Příklad 7.9

Určete rovnice tečen ke grafu funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$ *, které jsou kolmé k přímce* $p: x + 2y + 3 = 0$.

7.4 Fyzikální význam derivace

Předpokládejme, že přímočarý pohyb hmotného bodu je popsán funkcí $s(t)$, která udává polohu hmotného bodu v závislosti na čase. Nechť existuje první a druhá derivace funkce $s(t)$.

$v(t_0) = s'(t_0)$ nazýváme **okamžitou rychlostí** bodu v čase t_0.

$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$ nazýváme **okamžitým zrychlením** bodu v čase t_0.

Příklad 7.10

Dráha pohybujícího se tělesa je popsána funkcí s danou předpisem $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$. Přitom dráha s je vyjádřena v metrech a čas t v sekundách. Zjistěte, ve kterém okamžiku je rychlost nulová.