6. cvičení – Limita a spojitost funkce

6.1 Limita funkce

Definice 6.1 (okolí a prstencové okolí)

a) ***Okolím bodu x_0*** $\in \mathbb{R}$ (podrobněji δ-okolím bodu x_0) rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $O(x_0)$.

b) ***Okolím bodu*** $+\infty$ rozumíme každý interval $(k; +\infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(+\infty)$.

c) ***Okolím bodu*** $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty; k)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(-\infty)$.

d) ***Prstencovým okolím bodu x_0*** $\in \mathbb{R}^*$ rozumíme množinu $O(x_0)\backslash\{x_0\}$. Značíme je $P(x_0)$.

Definice 6.2 (definice limity)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \big(\forall O(A)\ \exists P(x_0)\ \forall x \in P(x_0): f(x) \in O(A)\big).$$

Poznámka: Limita nám nic neříká o tom, jak se funkce chová přímo v bodě x_0.

Mluvíme o následujících případech limity ($x_0, A \in \mathbb{R}$):

- vlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,
- nevlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$,
- vlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$,
- nevlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

6.2 Jednostranné limity

Definice 6.3

a) ***Levým prstencovým okolím bodu x_0*** $\in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta; x_0)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^-(x_0)$.

b) ***Pravým prstencovým okolím bodu x_0*** $\in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0; x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^+(x_0)$.

Definice 6.4

a) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zleva rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje levé prstencové okolí $P^-(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^-(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

b) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

6.3 Vlastnosti limit

Věta 6.1
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^*$. Limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné. Zapsáno symbolicky:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A. \right)$$

Věta 6.2
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 6.3
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Pak platí:

[1] $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x),$

[2] $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x),$

[3] $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) / \lim\limits_{x \to x_0} g(x),$

[4] $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right|,$

jsou-li definovány pravé strany výše uvedených rovností.

6.4 Spojitost

Definice 6.5
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže platí
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Věta 6.4
Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.

Věta 6.5
Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá v bodě $f(x_0)$. Pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.

Věta 6.6
Nechť funkce f je základní elementární funkce a nechť x_0 je vnitřním bodem definičního oboru $D(f)$. Pak funkce f je spojitá v bodě x_0.

6.5 Výpočet limit

Limity funkcí spojitých v bodě

Příklad 6.1 (věta 6.6)

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} e^x$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = \underline{\underline{0}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 0 = \underline{\underline{0}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$x_0 \in D(f) \cap f$ je elem. f-ce $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ je spojitá v x_0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Příklad 6.2 (věty 6.4 – 6.6)

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2 + 3)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2^x\sin x}{\ln(1+x)+(x+1)\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(x \cdot \operatorname{tg} x)$

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2 + 3) = \ln 1 + 1^2 + 3 = 0 + 1 + 3 = \underline{\underline{4}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2^x\cdot\sin x}{\ln(1+x)+(x+1)\cdot\cos x} = \frac{e^0+2^0\cdot\sin 0}{\ln(1+0)+(1+0)\cdot\cos 0} = \frac{1+1\cdot 0}{0+1\cdot 1} = \underline{\underline{1}}$

c) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(x\cdot \operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{4}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

Limity v nevlastních bodech a v bodech, v nichž není funkce definována

Příklad 6.3

Dokažte, že platí $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$.

• $\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (-\delta, 0): \frac{1}{x} < k$ (def. jednostranné nevl. limity)

$\frac{1}{x} < k \Leftrightarrow 1 > k \cdot x \ (x < 0!) \Leftrightarrow x < \frac{1}{k}$ pro $k > 0$ ✓ (protože $x < 0$) ("−" < "+")

$x > \frac{1}{k}$ pro $k < 0 \Rightarrow \delta = \frac{-1}{k}$ ✓

$1 > 0$ pro $k = 0$ ✓

• $\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (0, \delta): \frac{1}{x} > k$

$\frac{1}{x} > k \Leftrightarrow 1 > kx \ (x > 0) \Leftrightarrow x < \frac{1}{k}$ pro $k > 0 \Rightarrow \delta = \frac{1}{k}$ ✓

$x > \frac{1}{k}$ pro $k < 0$ ("+" > "−") ✓

$1 > 0$ pro $k = 0$ ✓

Limity dle věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí (věta 6.3)

Poznámka: Připomeňme si výrazy, které nejsou definovány:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{A}{0}\ (A \in \mathbb{R}^*) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Příklady 6.4

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x + x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} x$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x + x) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^x + \lim\limits_{x\to -\infty} x = 0 + (-\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}(x \cdot \operatorname{arctg} x) = \lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \infty \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\infty}}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1} - \lim\limits_{x\to -\infty} x =$

$= \infty - (-\infty) = \infty + \infty = \underline{\underline{\infty}}$

Příklad 6.5 (věta 6.1)

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = "\frac{1}{0^+}" = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = "\frac{1}{0^+}" = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \underline{\underline{\infty}}$

Věta 6.7
Nechť funkce f a g jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Příklady 6.6 (věta 6.7)
Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x-\sin x}{\sin^3 x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$

a) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = \underline{\underline{-2}}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin x}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\cancel{\sin x}\cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x\,\underbrace{(1-\cos^2 x)}_{\sin^2 x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cancel{\cos x}}{\cos x\,(\cancel{1-\cos x})(1+\cos x)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

d) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \underline{\underline{2}}$$

e) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\underbrace{\cancel{(x-2)}(x+2)}_{(x^2-4)}(x^2+4)} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{(2+2)(2^2+4)} = \frac{12}{32} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

f) $$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|\cdot|x+1|}{x-1} \sim \underline{\underline{\text{neexistuje}}}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 1^+} |x+1|}_{} = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\left(\frac{x-1}{x-1}\right)}_{}\cdot 2 = \underline{\underline{2}}$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 1^-} |x+1|}_{2} = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{\left[\frac{-(x-1)}{x-1}\right]}_{-1}\cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1}$$

Příklady 6.7 (viz 6.7)

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1-0+0}{2+0-0}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{3-\frac{1}{x^4}}}=\frac{2+0}{\sqrt{3-0}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left((x^2+9)-(x^2-9)\right)}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{18x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{-x \text{ pro } x\to-\infty\,!!}\left(\sqrt{1+9/x^2}+\sqrt{1-9/x^2}\right)}=\frac{-18}{2}=\underline{\underline{-9}}$

Věta 6.8

Nechť f,g,h jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0\in\mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x\in P(x_0)$ platí $g(x)\le f(x)\le h(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$, $A\in\mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Poznámka: Zapamatujte si, že $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Důkaz lze najít např. v [1].

Příklady 6.8

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\sin x+x}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2x}{x\sin x}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{1}}=\underline{\underline{1}}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\sin x+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{x}}=\frac{0}{2}=\underline{\underline{0}}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin^2x+\cos^2x)-(\cos^2x-\sin^2x)+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{x\cdot\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(2\sin^2x+\sin^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{x\cdot\sin x\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1}+\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos^2x}}_{1}}{\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{1}}=\underline{\underline{3}}$

Věta 6.9
Nechť f, g jsou funkce a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že funkce g je na tomto okolí ohraničená. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Příklad 6.9
Vypočtěte následující limity.

a) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x}$

a) $\lim_{x\to 0} x\cdot \sin\frac{1}{x} = 0$, protože $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \wedge \lim_{x\to 0} x = 0$ (věta 6.9)

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x} = 0$, protože $-1 \le \cos e^{x^2+x+1} \le 1 \wedge \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (věta 6.9)

Věta 6.10
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*, A \in \mathbb{R}$ a nechť platí
a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$,
b) Funkce f je spojitá v bodě A.
Pak složená funkce $f \circ g$ má v bodě x_0 limitu a platí

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(A).$$

Příklad 6.10
Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \cos\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$.

$y = g(x) = \cancel{\cos}(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x})$: $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} (\underbrace{x^2}_{0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{-1\le \sin\frac{1}{x} \le 1}) = 0$

$\lim_{y\to 0} \cos y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \cos(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}) = \underline{\underline{1}}$

Věta 6.11
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*, A, B \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí
a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$,
b) $\lim_{y\to A} f(y) = B$,
c) Existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $g(x) \ne A$.
Pak $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = B$.

Příklad 6.11 (věta 6.11)

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{1}\cdot 5 = 1\cdot 5 = \underline{\underline{5}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

$y = \sqrt[3]{1+x} \Rightarrow x = y^3-1$

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{1+x} = 1$; $\lim\limits_{y\to 1}\frac{y-1}{y^3-1} = \lim\limits_{y\to 1}\frac{\cancel{y-1}}{(\cancel{y-1})(y^2+y+1)} = \frac{1}{1^2+1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Příklad 6.12

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$.

$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\underbrace{\ln x}_{-\infty}\cdot\underbrace{\ln x}_{-\infty}} = \text{„}e^{\infty}\text{“} = \underline{\underline{\infty}}$

Pozn.: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x\cdot\ln x) = \text{„}-\infty\cdot(-\infty)\text{“} = \infty$

Věta 6.12
Nechť f je funkce a nechť existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$). Nechť $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 0$. Pak platí $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)} = -\infty$).

Analogicky pro levé prstencové okolí.

Poznámka: Skutečnost obsaženou v předchozí větě budeme symbolicky zapisovat

$$\text{„}\frac{1}{0_+} = +\infty\text{“}, \text{„}\frac{1}{0_-} = -\infty\text{“}.$$

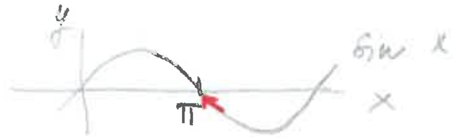
Příklad 6.13 (věta 6.12)

Vypočtěte následující limity.

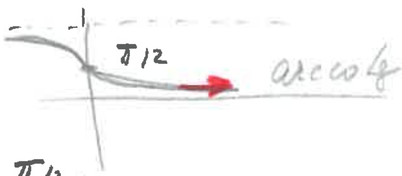
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$

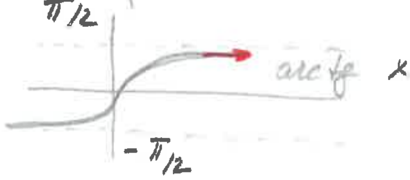
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \text{"}\frac{2}{0^+}\text{"} = \underline{\underline{\infty}}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = \underline{\underline{-\infty}}$



c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} = \text{"}\frac{\pi/2}{0^+}\text{"} = \underline{\underline{\infty}}$





Příklad 6.14 (věta 6.12)

Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x+1}{\sin x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \text{"}\frac{1+\frac{1}{0^+}}{1}\text{"} = \text{"}\frac{1+\infty}{1}\text{"} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x+1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \text{"}\frac{1+\frac{1}{0^-}}{1}\text{"} = \text{"}\frac{1-\infty}{1}\text{"} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$ neexistuje

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x+1}{\cos x-1} = \text{"}\frac{2}{0^-}\text{"} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos x+1}{\cos x-1} = \text{"}\frac{2}{0^-}\text{"} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1} = \underline{\underline{-\infty}}$

c) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \text{"}\frac{-8}{0^+}\text{"} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \text{"}\frac{-8}{0^+}\text{"} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \underline{\underline{-\infty}}$

Využití limit pro ověření spojitosti funkce v bodě x_0

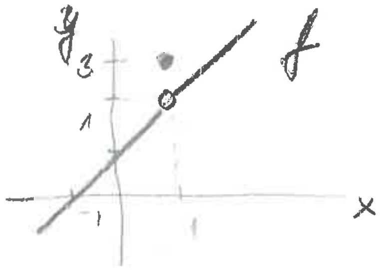
Příklad 6.15 (Definice

Určete, zda jsou následující funkce spojité v bodě x_0.

a) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} x+1 & pro\ x \neq 1 \\ 3 & pro\ x = 1 \end{cases}$ b) $x_0 = 2,\ f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$; $f(1) = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f není v $x=1$ spojitá



b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{x-2} = 1$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

$\Big\}$ $\lim_{x \to 2} f(x)$ neexistuje $\Rightarrow$ f není v $x=2$ spojitá