5. cvičení – Posloupnosti a limita posloupnosti (opakování ze SŠ)

Pro opakování použijte např.: http://msr.vsb.cz/posloupnosti-a-rady/vlastnosti-posloupnosti

5.1 Základní pojmy

Definice 5.1
Posloupnosti reálných čísel (dále jen posloupnosti) budeme nazývat funkci, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají **členy posloupnosti**. Funkční hodnota posloupnosti f v bodě n se nazývá ***n*-tý člen posloupnosti** a značí se místo $f(n)$ zpravidla f_n.

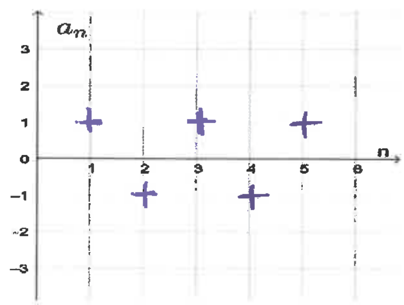
Zadání posloupnosti

a) **vzorcem pro *n*-tý člen a_n**, např. $a_n = 2n - 1$,
b) **rekurentně** zadáním prvního členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit další členy podle předchozích členů. Např.: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 3$.

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

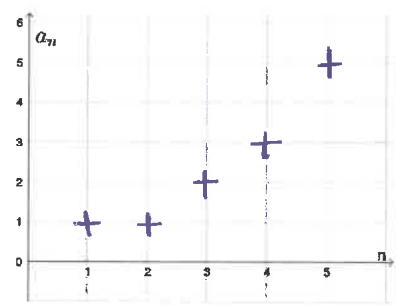
Příklad 5.1
Určete prvních pět členů následujících posloupností a znázorněte graficky jejich průběh.
a) $a_n = (-1)^{n-1}$

$a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$
$a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1$
$a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$
$a_4 = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$
$a_5 = \ldots\ldots = 1$



b) $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = a_2 + a_1 = 2$
$a_4 = a_3 + a_2 = 3$
$a_5 = a_4 + a_3 = 5$



Některé vlastnosti posloupností

Posloupnost (a_n) se nazývá

- **shora ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq c$,
- **zdola ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq c$,
- **ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leq c$,
- **rostoucí**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$,
- **neklesající**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$.

5.2 Aritmetická posloupnost

Definice 5.2

Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

říkáme, že (a_n) je **aritmetická posloupnost** a číslo d se nazývá **diference**.

Pro každou aritmetickou posloupnost (a_n) platí:

a) n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 + (n-1)d$,
b) pro libovolné dva členy posloupnosti a_r, a_s platí $a_s = a_r + (s-r)d$,
c) pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

5.3 Geometrická posloupnost

Definice 5.3

Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $q \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

říkáme, že (a_n) je **geometrická posloupnost** a číslo q se nazývá **kvocient**.

Pro každou geometrickou posloupnost (a_n) platí:

a) n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
b) pro libovolné dva členy posloupnosti a_r, a_s platí $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$,
c) pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ pro $q \neq 1$. Je-li $q = 1$, pak $s_n = na_1$.

5.4 Limita posloupnosti

Definice 5.4

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Symbolicky zapsáno: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon)$

Příklad 5.2

Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon)$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

horní celá část čísla $\frac{1}{\varepsilon}$, tj. nejmenší celé číslo, které je větší než $\frac{1}{\varepsilon}$

Definice 5.5
Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu plus nekonečno, jestliže ke každému reálnému číslu k existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n > k$.
Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Symbolicky zapsáno: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{R} \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > k)$

Příklad 5.3

Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

$\forall k \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : n > k$

$n_0 = \lceil k \rceil + 1$

Definice 5.6
Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu mínus nekonečno, jestliže ke každému reálnému číslu l existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n < l$.
Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Symbolicky zapsáno: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall l \in \mathbb{R} \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < l)$

Věta 5.1
Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice 5.7
Posloupnost (a_n) se nazývá

a) **konvergentní**, jestliže má vlastní limitu (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$),

b) **divergentní**, jestliže má nevlastní limitu (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$) nebo limita neexistuje.

Věta 5.2
Každá konvergentní posloupnost je ohraničena.

Definice 5.8
Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n). Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, se nazývá **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n).

Věta 5.3
Nechť posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}^*$. Pak každá z ní vybraná posloupnost má tutéž limitu.

Definice 5.9
Limitu posloupnosti $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme Eulerovo číslo a označujeme e.

Věta 5.4
a) Nechť (a_n) je neklesající shora ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a rovná se supremu oboru hodnot této posloupnosti, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.
b) Nechť (a_n) je nerostoucí zdola ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a rovná se infimu oboru hodnot této posloupnosti, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.
c) Nechť (a_n) je neklesající posloupnost, která není shora ohraničená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
d) Nechť (a_n) je nerostoucí posloupnost, která není zdola ohraničená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 5.4
Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

• $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost $(2^{n+1} > 2^n)$ (tj. i neklesající),
• $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ dle věty 5.4 c)

Příklad 5.5
Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n} = e$.

• $\{5n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ • $\underbrace{\left\{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right\}}$ je vybraná posloupnost z $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (Definice 5.8)

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \cancel{\infty}\ e \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n} = \cancel{\infty}\ e$ věta 5.3

5.5 Výpočet limit

Věta 5.5

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$,

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

e) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$,

má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl.

Základní limity

[1] $\lim_{n\to\infty} c = c \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

[3] $\lim_{n\to\infty} n = \infty$,

[4] $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$,

[5] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

[6] $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & pro\ q > 1, \\ 1 & pro\ q = 1, \\ 0 & pro\ q \in (-1;1), \\ neexistuje & pro\ q \leq -1. \end{cases}$

Příklad 5.6

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty}(n^2 + 5n - 1) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^2}_{\infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} 5n}_{\infty} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1}_{1} = \infty + \infty - 1 = \underline{\underline{\infty}}$

b) $\underbrace{\lim_{n\to\infty}(n^2 - 5n - 1)}_{\underbrace{\infty - \infty - 1}_{\text{nedef. výraz}}} = \lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(1 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right] = \infty \cdot (1 - 0 - 0) = \underline{\underline{\infty}}$

c) $\underbrace{\lim_{n\to\infty}(-n^2 + 5n)}_{\underbrace{-\infty + \infty}_{\text{nedef. výraz}}} = \lim_{n\to\infty}\left[-n^2\left(1 - \frac{5}{n}\right)\right] = -\infty \cdot (1 - 0) = \underline{\underline{-\infty}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5n^2+8n-1}{1+2n+3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(-5+\frac{8}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+3\right)} = \frac{-5+0-0}{0+0+3} = -\frac{5}{3}$

vytýkání nejvyšší mocniny v čitateli / jmenovateli

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5n^2+8n-1}{1+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(-5+\frac{8}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(\frac{1}{n}+2\right)} = \frac{\infty\cdot(-5+0-0)}{0+2} = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-1}{1+2n+3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(8-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+3\right)} = \frac{8-0}{\infty\,(0+0+3)} = 0$

Příklad 5.7

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2\left(9-\frac{4}{n^2}\right)} - 2\sqrt{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2}\left(\sqrt{9-\frac{4}{n^2}} - 2\right)\right] =$

$= \infty\cdot(3-2) = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\underbrace{\sqrt{n^2}}_{\infty}\left(\underbrace{\sqrt{9-\frac{4}{n^2}}-3}_{0}\right)}\right]$

nedef. výraz ⇒ takto nelze řešit

$\cdot\frac{\sqrt{9n^2-4}+3n}{\sqrt{9n^2-4}+3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(9n^2-4)-9n^2}{\sqrt{9n^2-4}+3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{n^2}\left(\sqrt{9-\frac{4}{n^2}}+3\right)} =$

$= \frac{-4}{\infty\cdot(3+3)} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}} = \text{"}\frac{1}{\underbrace{\infty-\infty}}\text{"}$

nedef. výraz

$\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}{\underbrace{(n^2+n)-(n^2+2)}_{n-2}} =$

$= \lim \frac{\sqrt{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}{n\left(1-\frac{2}{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{1-0} = 2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}-16\sqrt[3]{n^3}}{\sqrt[3]{n^4\left(1+\frac{18}{n^3}\right)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-16\right)}{\sqrt[3]{n^4}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{18}{n^3}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-16}{\sqrt[3]{1+\frac{18}{n^3}}} = 0\cdot\frac{\sqrt{0+0}-16}{\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{0}}$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\sqrt{n^2}\cdot\sqrt{5+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt[3]{n^5}\cdot\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt[3]{n^5}}\left(\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\frac{n^{2/2}}{n^{5/3}}\cdot\sqrt{5+\frac{3}{n}}\right)}{\cancel{\sqrt[3]{n^5}}\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{5/3}}\cdot\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^5}}-\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}+\frac{1}{n^{2/3}}\sqrt{5+3/n}}{\frac{1}{n^{1/3}}\cdot\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^5}}-\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2+0+0}+\frac{1}{\infty}\cdot\sqrt{5+0}}{\frac{1}{\infty}\cdot\sqrt{2+0+0}-\sqrt[3]{5+0}} = \underline{\underline{-\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}}$$

Příklad 5.8

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = \underline{\underline{e^3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 =$

$$= e\cdot 1^5 = \underline{\underline{e}}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 = e^3\cdot 1^4 = \underline{\underline{e^3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{5}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}}_{e \text{ - viz př. 5.5}}\right]^{1/5} = \underline{\underline{e^{1/5}}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{2}}_{1}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{3n\cdot 5}{5}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}}_{e}\right]^{3/5} = \underline{\underline{e^{3/5}}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{3n+2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{3n}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{2}}_{1}\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{\frac{3n\cdot 5}{5}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{5n}\right]^{\frac{3}{5}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{5n+2-2}\right]^{3/5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{5n+2}}_{e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{-2}}_{1}\right]^{3/5}$

$= \underline{\underline{e^{3/5}}}$

Příklad 5.9

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

POZOR! $\{(1-\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ není vybraná posloupnost z $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$, protože $\{-n\}_{n=1}^{\infty}$ není ryze rostoucí posl.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}}\right)^n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overset{1^n \swarrow 1}{1}}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}}_{1}} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$

> **Věta 5.6**
> Nechť jsou dány posloupnosti $(a_n), (b_n)$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$. Jestliže dále
> a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*, pak\ a \leq b.$
> b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ pak\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$
> c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty,\ pak\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

Příklad 5.10

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} n!$.

- $n < n!$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\Big\}\ \lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$ (viz věta 5.6 b)

Věta 5.7 (o limitě sevřené posloupnosti)

Nechť jsou dány posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n)$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L, L \in \mathbb{R}^*, pak \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Příklad 5.11

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+4n+5}$

- $\dfrac{-1}{n^3+4n+5} \leq \dfrac{(-1)^n}{n^3+4n+5} \leq \dfrac{1}{n^3+4n+5}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)}{n^3+4n+5} = \dfrac{-1}{\infty} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3+4n+5} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$\Big\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3+4n+5} = \underline{\underline{0}}$

viz věta 5.7

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}$.

- $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\cos\frac{n^2+1}{2n-1}}{n} \leq \dfrac{1}{n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{-1}{n}\right) = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\Big\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cdot\cos\dfrac{n^2+1}{2n-1} = \underline{\underline{0}}$

viz věta 5.7

Věta 5.8

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost (b_n) je ohraničená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Příklad 5.12

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n}$.

- $-1 \leq \sin(n^2+1) \leq 1 \Rightarrow \{\sin(n^2+1)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená posl.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\Big\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2+1)}{n} = 0$

viz věta 5.12

Příklad 5.13

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^7 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^7 = 1^7 = \underline{\underline{1}}$

c) $\lim \sqrt[2n]{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{n}{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

- $\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{n}{n}} = \underline{\underline{3}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{3^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{n}{n}}\right) = 2^0\cdot 3 = 1\cdot 3 = \underline{\underline{3}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = \underline{\underline{3}}$

dle věty 5.7

Příklad 5.14

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$

$$3n : (3n-1) = 1 + \frac{1}{3n-1}$$
$$\frac{-(3n-1)}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1+1} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)\right]$$

$$= e\cdot 1 = \underline{\underline{e}}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} 2^{2n}}_{\infty}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right]^2 =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} 2^{2n}}_{\infty}\cdot\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}}_{1}\right]^2 = \underline{\underline{\infty}}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{n}$

$$2n : (3n-1) = \frac{2}{3} + \frac{2/3}{3n-1} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)$$
$$\frac{-\left(2n-\frac{2}{3}\right)}{2/3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)\right]^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{\frac{n\cdot 3}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1+1}\right]^{1/3} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}_{0}\cdot\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right.}_{e}\cdot\left.\underbrace{\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{1}}_{1}\right)\right]^{1/3}$$

$$= 0\cdot(e\cdot 1)^{1/3} = \underline{\underline{0}}$$