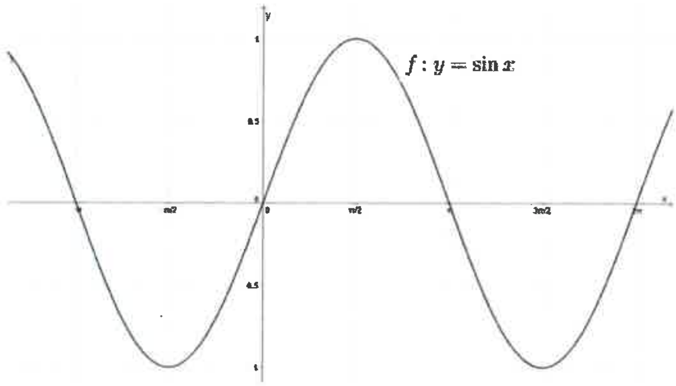
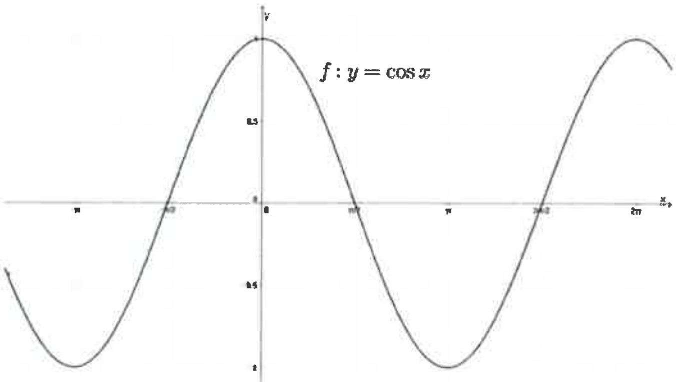
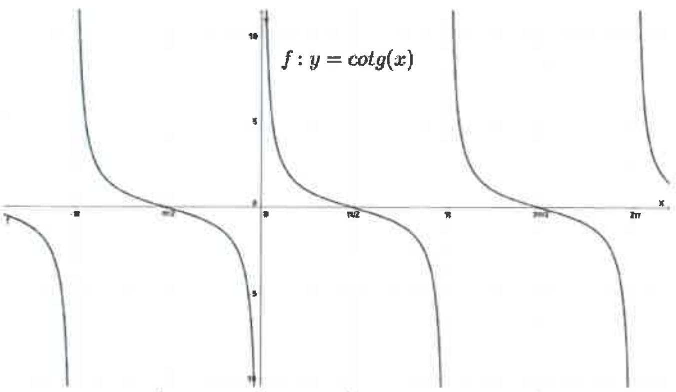
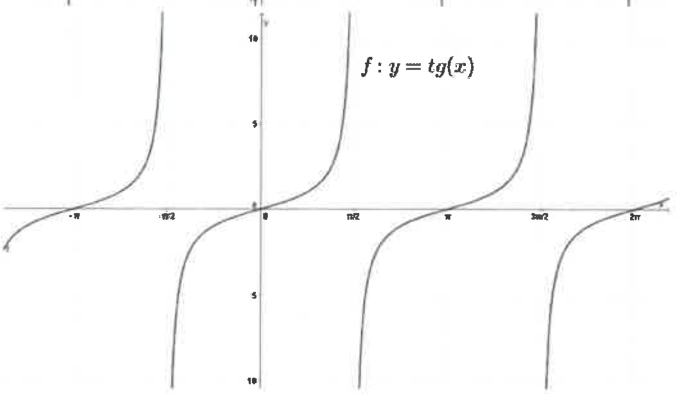
4. cvičení – Goniometrické a cyklometrické funkce. Základní goniometrické rovnice a nerovnice.

4.1 Goniometrické funkce

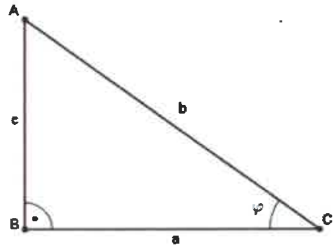








4.2 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku



$$\sin\varphi = \frac{c}{b}$$

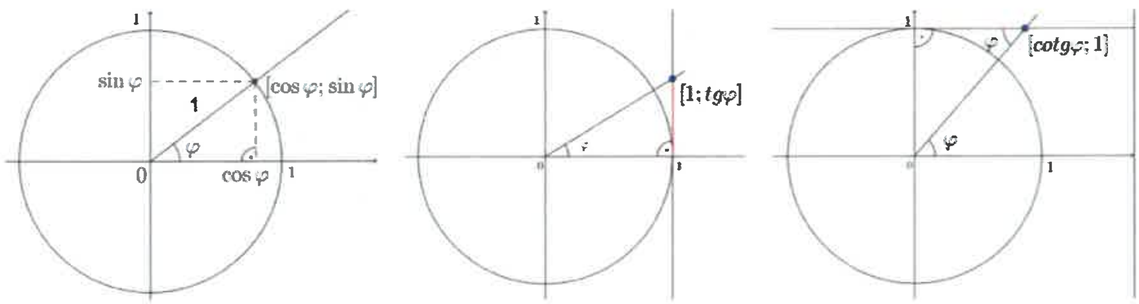
$$\cos\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}\ pro\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{tg\ \varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a}{c}\ pro\ \varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Goniometrické funkce – základní tabulkové hodnoty

Pomocné obrázky pro určení goniometrických funkcí úhlů: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$



Jak pracovat s jednotkovou kružnicí při určování hodnot goniometrických funkcí?

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin φ	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos φ	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
tg φ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---
cotg φ	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tabulka základních hodnot goniometrických funkcí

Příklad 4.1

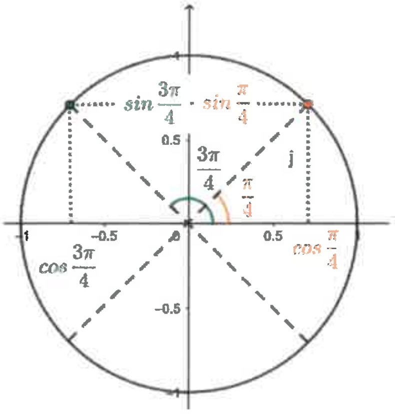
Pomocí jednotkové kružnice určete:

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = -1$

d) $\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} = -1$

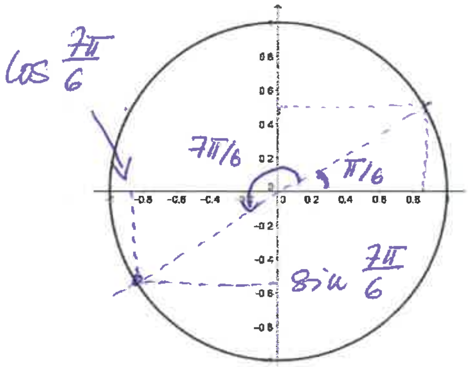


e) $\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

f) $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\operatorname{cotg}\frac{7\pi}{6} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{3}$

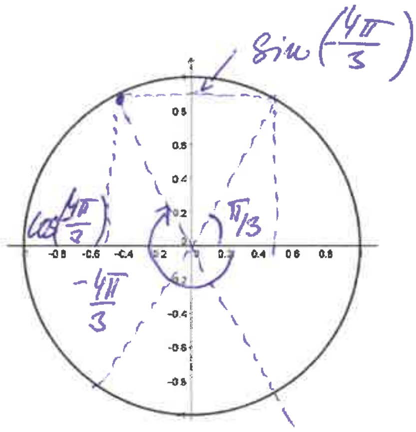


i) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

k) $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}$

l) $\operatorname{cotg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



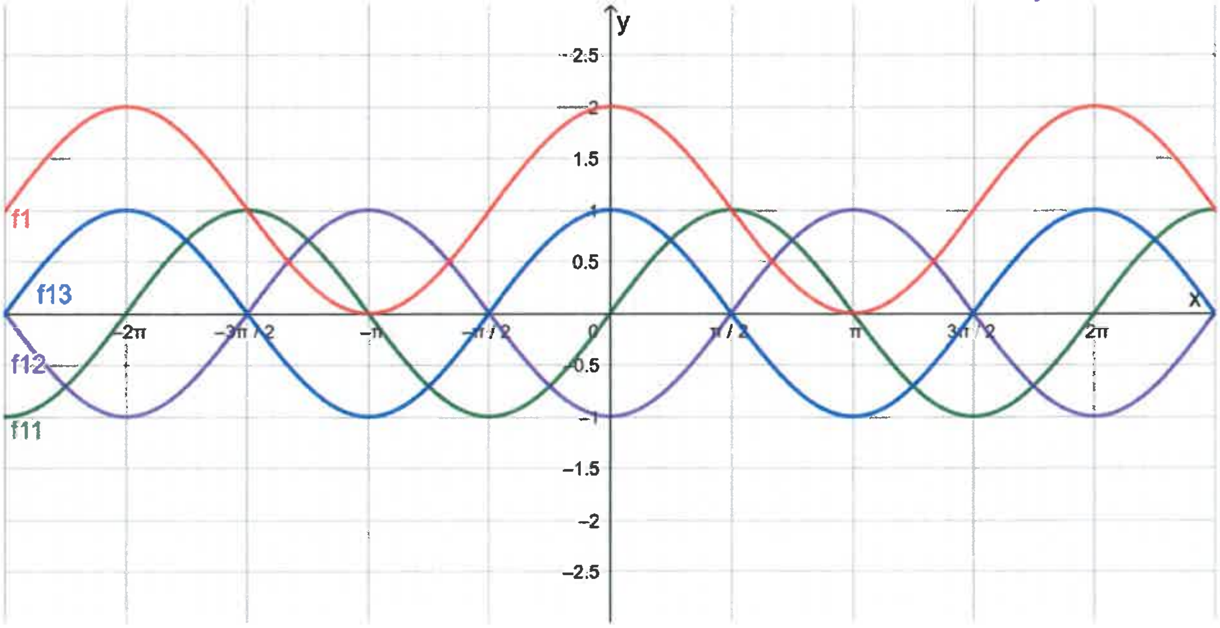
Příklad 4.2

Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $f_1: y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, ↙ posun o 1 ↗

$f_{11}: y = \sin x$, $f_{12}: y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $f_{13}: y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

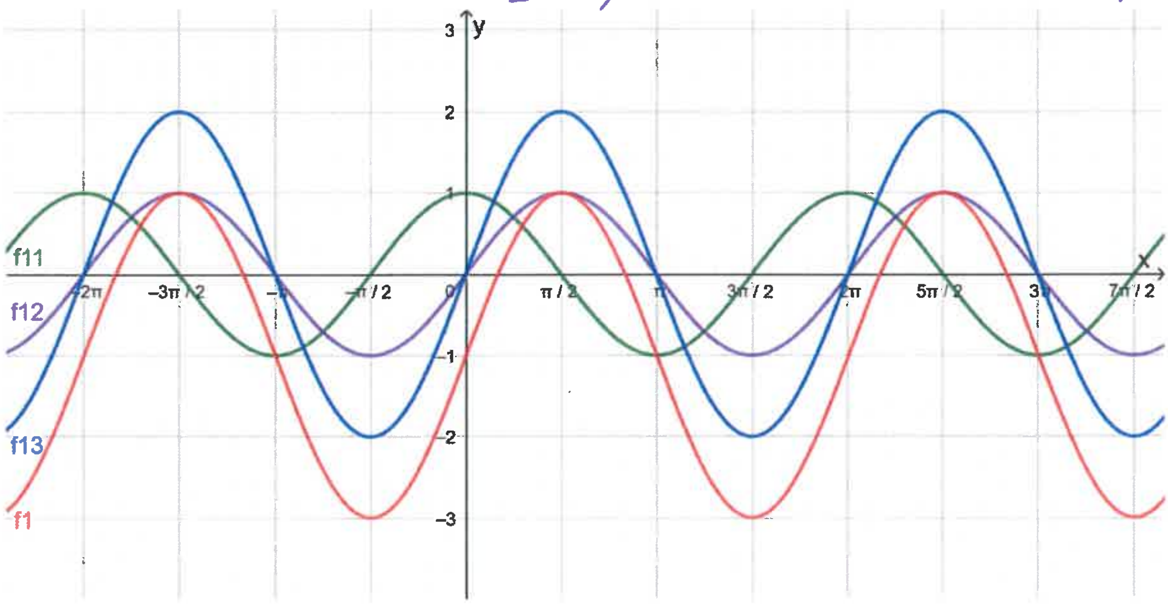
posun o $\frac{\pi}{2}$ doprava   symetrie dle osy x



b) $f_2: y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$, ← o 1 ↓

$f_{21}: y = \cos x$, $f_{22}: y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $f_{23}: y = 2\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

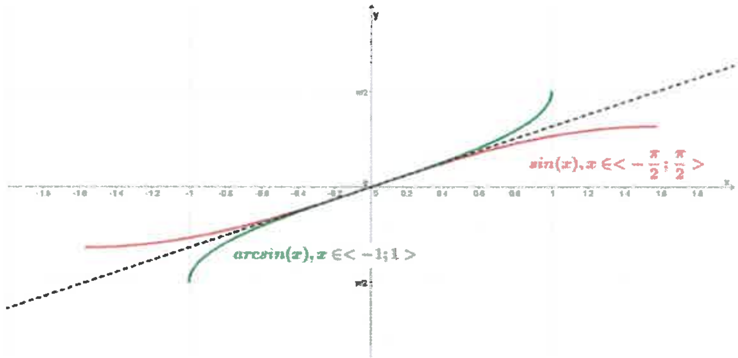
o $\frac{\pi}{2}$ doprava   2x větší amplituda



4.3 Cyklometrické funkce

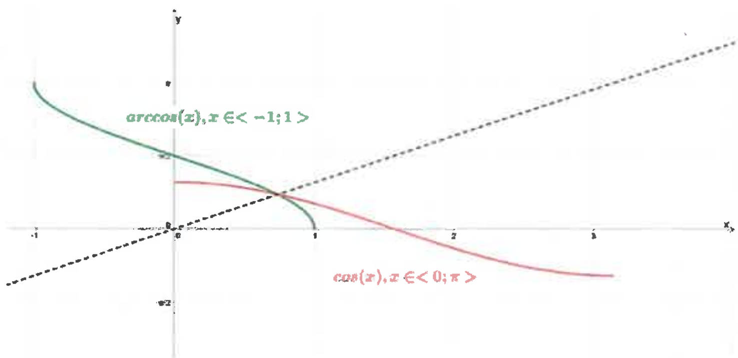
Cyklometrické funkce definujeme jako inverzní funkce k **restrikcím** funkcí goniometrických.

Arkussinus



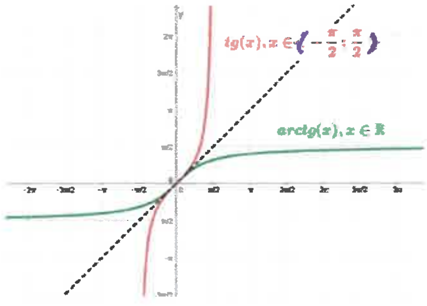
$$f\colon y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, \qquad f^{-1}\colon \boldsymbol{y = \arcsin x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

Arkuskosinus



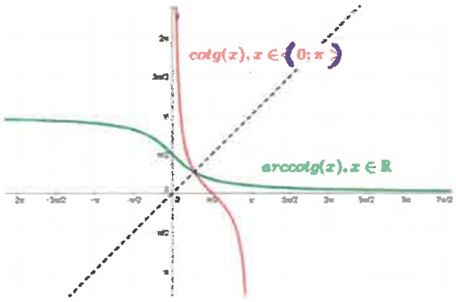
$$f\colon y = \cos x, x \in \langle 0; \pi \rangle, \qquad f^{-1}\colon \boldsymbol{y = \arccos x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

Arkustangens



$$f\colon y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}\colon y = \mathbf{arctg}\, x, x \in \mathbb{R}$$

Arkuskotangens



$$f\colon y = \operatorname{cotg} x, x \in (0;\pi), \quad f^{-1}\colon y = \mathbf{arccotg}\, x, x \in \mathbb{R}$$

Příklad 4.3

Je dána funkce $f\colon y = \sin\frac{2x-1}{3}, x \in \left\langle -\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\rangle$. *Určete funkci* f^{-1} *inverzní k funkci* f.

$x \in \underbrace{\left\langle -\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\rangle}_{\mathcal{D}(f)} \Rightarrow y \in \underbrace{\langle -1; 1\rangle}_{\mathcal{H}(f)}$

- f je prostá
- $\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle -1, 1\rangle$; $\mathcal{H}(f^{-1}) = \left\langle -\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\rangle$
- $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

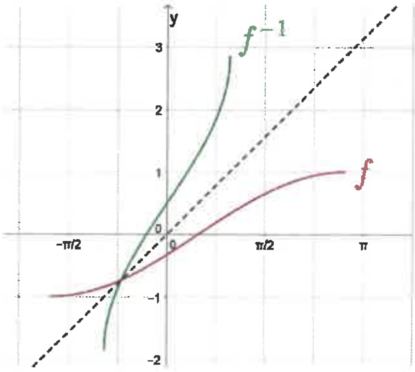
$y = \sin \frac{2x-1}{3}$

$\arcsin y = \frac{2x-1}{3}$

$3 \cdot \arcsin y + 1 = 2x$

$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \arcsin y$

$\underline{f^{-1}: y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \arcsin x}$



Příklad 4.4

Je dána funkce h: $y = 3 - 2\mathrm{cotg}(x+2)$, $x \in (-2; \pi - 2)$. Určete funkci h^{-1} inverzní k funkci h.

$x = -2 \Rightarrow y = {}"3 - 2 \cdot \underbrace{\mathrm{cotg}\, 0}_{\to +\infty}"$ (viz graf) $h: \to \infty$

$x = \pi - 2 \Rightarrow y = {}"3 - 2 \cdot \underbrace{\mathrm{cotg}\, \pi}_{\to \infty}"$ (viz graf) $h: \to -\infty$

$\mathcal{D}(h) = (-2; \pi - 2)$; $\mathcal{H}(h) = (-\infty; \infty)$

- h je prosté
- $\mathcal{D}(h^{-1}) = (-\infty; \infty)$; $\mathcal{H}(h^{-1}) = (-2; \pi - 2)$
- $y = h(x) \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$

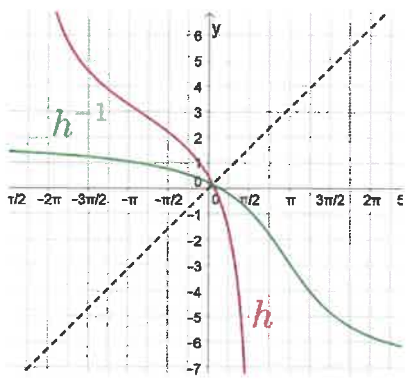
$y = 3 - 2 \cdot \mathrm{cotg}(x+2)$

$\mathrm{cotg}(x+2) = \frac{3-y}{2}$

$x + 2 = \mathrm{arccotg}\left(\frac{3-y}{2}\right)$

$x = \mathrm{arccotg}\left(\frac{3-y}{2}\right) - 2$

$\underline{f^{-1}: y = \mathrm{arccotg}\left(\frac{3-x}{2}\right) - 2}$



4.4 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.

Základní goniometrická rovnice je každá rovnice zapsaná ve tvaru $g(x) = a$, kde $g(x)$ je jedna z goniometrických funkcí $(\sin x, \cos x, tg\, x, cotg\, x)$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. (Uvědomte si, že při definici goniometrické rovnice uvažujeme, že $x \in \mathbb{R}$, tzn. že hodnoty neznámé x uvádíme v obloukové míře!!!)

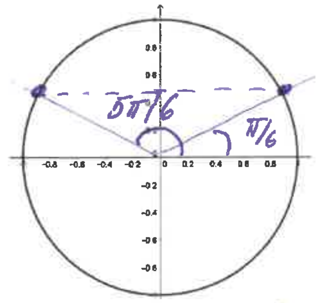
Řešení základních goniometrických rovnic je přímo viditelné z grafů příslušných goniometrických funkcí nebo z jednotkové kružnice.

Příklad 4.5:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

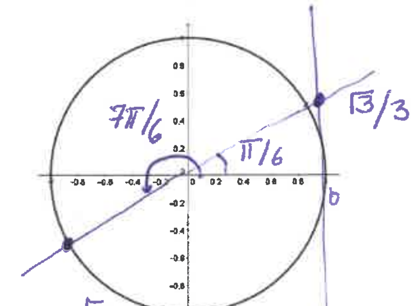
a) $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} k \in Z$$



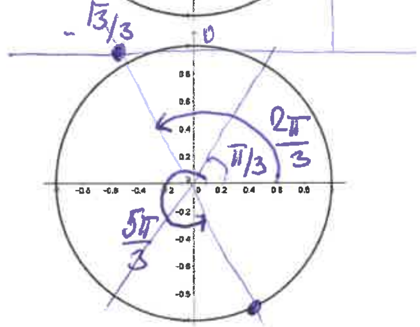
b) $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi; \quad k \in Z$$



c) $cotg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi; \quad k \in Z$$

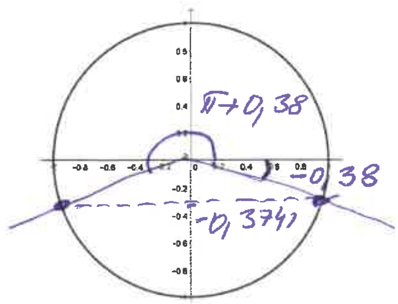


d) $\sin x = -0{,}374\,1$ *(výsledek zapište s přesností na 2 des. místa)*

$$x_1 = \arcsin(-0{,}3741) \doteq -0{,}38 + 2k\pi$$

$$x_2 \doteq \pi + 0{,}38 + 2k\pi = 0{,}38 + (2k+1)\pi$$

$$k \in Z$$



Složitější goniometrické rovnice

Substituce na základní typ: Pomocí jednoduché substituce $y = x + l$ nebo $y = x \cdot l$ převedeme složitější gon. rovnici typu $g(x + l) = k$ nebo $g(x \cdot l) = k$, kde g je gon. funkce s neznámou x a l, k jsou reálná čísla, na základní typ gon. rovnic $g(x) = k$.

Příklad 4.6:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

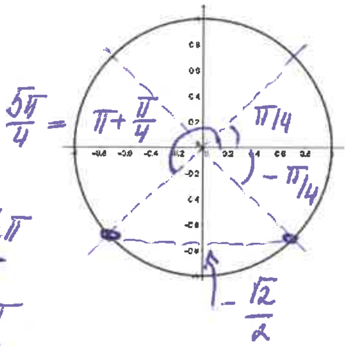
$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$y = 2x$

$\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow 2x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{8} + k\pi$

$y_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow 2x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{8} + k\pi$



$k \in \mathbb{Z}$

Substituce na kvadratickou rovnici

Příklad 4.7:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sin^2 x - 3 = 3\cos x$$

$2(1 - \cos^2 x) - 3 = 3 \cdot \cos x$

$-2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$

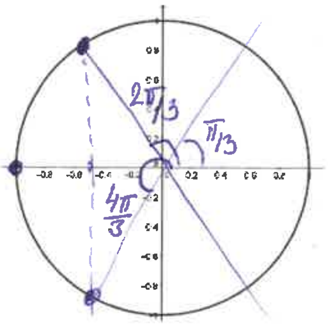
$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$y = \cos x$

$2y^2 + 3y + 1 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$y_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$ ↗ $y_1 = -\frac{1}{2}$, ↘ $y_2 = -1$



$\cos x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{11} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_{12} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\cos x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = \pi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

Dvojnásobný argument – při řešení tohoto typu úloh se využívají vzorce pro dvojnásobný argument gon. funkcí:

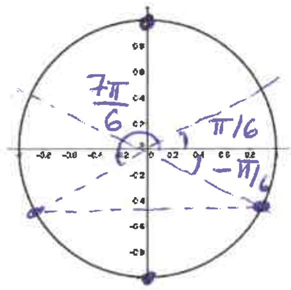
$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\cos(2x) = cos^2 x - sin^2 x$$

Příklad 4.8:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$cos\, x + sin\, 2x = 0$

$$\cos x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$
$$\cos x\,(1 + 2 \cdot \sin x) = 0$$
$$(\cos x_1 = 0) \vee (1 + 2 \cdot \sin x = 0)$$
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$$
$$x_{21} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_{22} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$



$k \in \mathbb{Z}$

Goniometrické funkce součtů a rozdílů, součet a rozdíl gon. funkcí – při řešení tohoto typu úloh se používají následující vzorce:

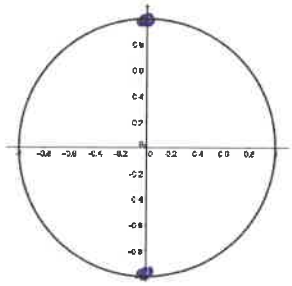
$$\sin(x+y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Příklad 4.9:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$-\cos 3x = \cos 7x$$



$$\cos 7x + \cos 3x = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{10x}{2} \cdot \cos \frac{4x}{2} = 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos 2x = 0$$

$$(\cos 5x = 0) \vee (\cos 2x) = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{\pi}{5}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}}} \qquad \underline{\underline{k \in \mathbb{Z}}}$$

4.5 Goniometrické nerovnice

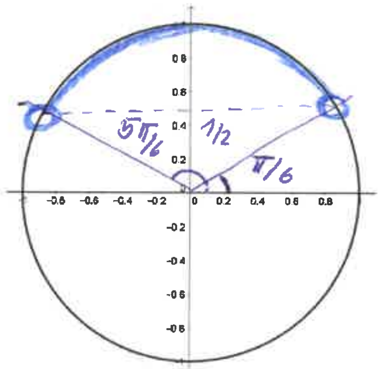
Základní goniometrické nerovnice

Příklad 4.10:

Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

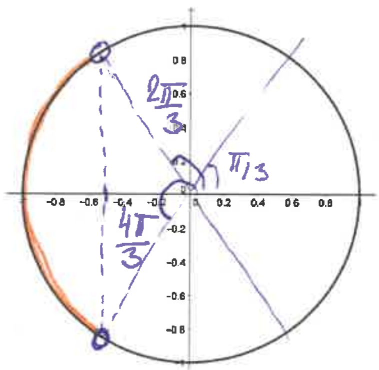
a) $\sin x > 0{,}5$

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right); \quad k \in \mathbb{Z}$$

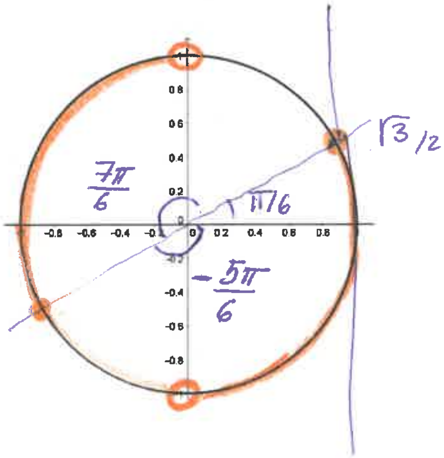


b) $\cos x < -0{,}5$

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right); \quad k \in \mathbb{Z}$$



c) $tg\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$



$\cancel{x \in \langle -\frac{8\pi}{6} +}$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$

h:

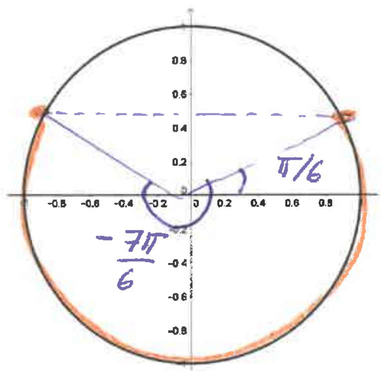
$x \in \left(\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{7\pi}{6}+k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$

Složitější goniometrické nerovnice

Příklad 4.11:

Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 0{,}5$



$y = 2x - \frac{\pi}{4}$

$\sin y \leq 0{,}5$

$y \in \left\langle -\frac{7\pi}{6}+2k\pi; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$

$2x-\frac{\pi}{4} \in \left\langle -\frac{7\pi}{6}+2k\pi; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$

$2x \in \left\langle -\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$

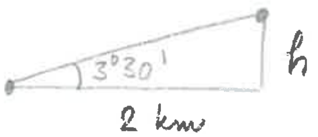
$2x \in \left\langle \frac{-11\pi}{12}+2k\pi; \frac{5\pi}{12}+2k\pi\right\rangle$

$x \in \left\langle -\frac{11\pi}{24}+k\pi; \frac{5\pi}{24}+k\pi\right\rangle \qquad k \in \mathbb{Z}$

4.6 Slovní úlohy vedoucí na gon. rovnice

Příklad 4.12:

Silnice má stoupání 3°30′. O kolik metrů se liší nadmořská výška dvou míst, která jsou od sebe po silnici vzdálená $2km$? (Výsledek zaokrouhlete na celé metry.)



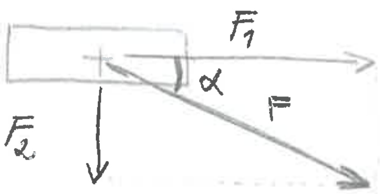
$$tg\,(3°30') = \frac{h}{2\,000}$$

$$h = 2000 \cdot \underbrace{tg\,(3°30')}_{0,0611}$$

$$\underline{\underline{h}} \doteq \underline{\underline{122\ m}}$$

Příklad 4.13:

Na těleso působí v jednom bodě dvě síly: síla F_1 o velikosti $760\ N$ působí ve vodorovném směru (zleva doprava) a síla F_2 o velikosti $28,8\ N$ působí ve směru svislém (shora dolů). Těleso se vlivem těchto dvou sil dá do pohybu. Určete odchylku trajektorie tělesa od vodorovného směru. (Výsledek zaokrouhlete na celé stupně a minuty.)



$$tg\,\alpha = \frac{|F_2|}{|F_1|}$$

$$tg\,\alpha = \frac{28,8}{760} \doteq 0,0379$$

$$\underline{\underline{\alpha}} \doteq 2,412° \doteq \underline{\underline{2°\underbrace{25'}_{0,412\cdot 60}}}$$

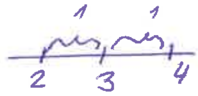
4.7 Definiční obory - opakování

Příklad 4.14:

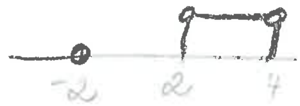
Určete definiční obor funkce f dané předpisem.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \sin(x^2+4) + \ln(1-|x-3|)$

- $x+2 \neq 0$ ($\sqrt[3]{x}$ je def. pro $x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow x \neq -2$
- $1-|x-3| > 0$ ($\ln x$ je def. pro $x>0$) $\Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow x \in (2;4)$



$\Rightarrow$ $\underline{x \in (2;4)}$



b) $g(x) = 2\arccos\left(\frac{1}{x+3}\right)$

- $-1 \leq \frac{1}{x+3} \leq 1$ ($\arccos x$ je def. pro $x \in \langle -1;1 \rangle$)

$\Rightarrow x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

POZOR! Nelze násobit $(x+3)$!!! Neznáme znaménko!

$-1 \leq \frac{1}{x+3} \quad /+1$

$0 \leq \frac{x+4}{x+3}$

	$(-\infty;-4\rangle$	$\langle -4;-3)$	$(-3;\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

(1) $[x \in (-\infty;-4\rangle \cup (-3;\infty)]$

$\frac{1}{x+3} \leq 1 \quad /-1$

$\frac{x+2}{x+3} \leq 0$

	$(-\infty;-3)$	$(-3;-2\rangle$	$\langle -2;\infty)$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

(2) $[x \in (-3;-2\rangle]$

$\Rightarrow$ (1) $\cap$ (2): $\underline{(-3;-2\rangle} = \underline{D(g)}$

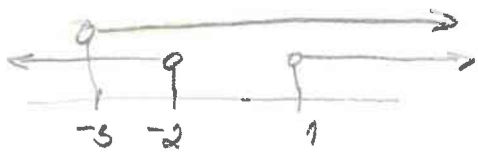
c) $h(x) = e^{\sin(x)+x} - \log_2(x+3) + \frac{4x-7}{\sqrt{x^2+x-2}}$

- $x+3 > 0$ ($\log x$ je def. pro $x>0$) $\Rightarrow [x > -3]$ (1)
- $x^2+x-2 > 0$ ($\sqrt{x}$ je def. pro $x \geq 0$ + ve jmenovateli nesmí být 0)

$D = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \nearrow 1, \searrow -2$

$[x \in (-\infty;-2) \cup (1;\infty)]$ (2)



$\Rightarrow$ $\underline{x \in (-3;-2) \cup (1;\infty)}$