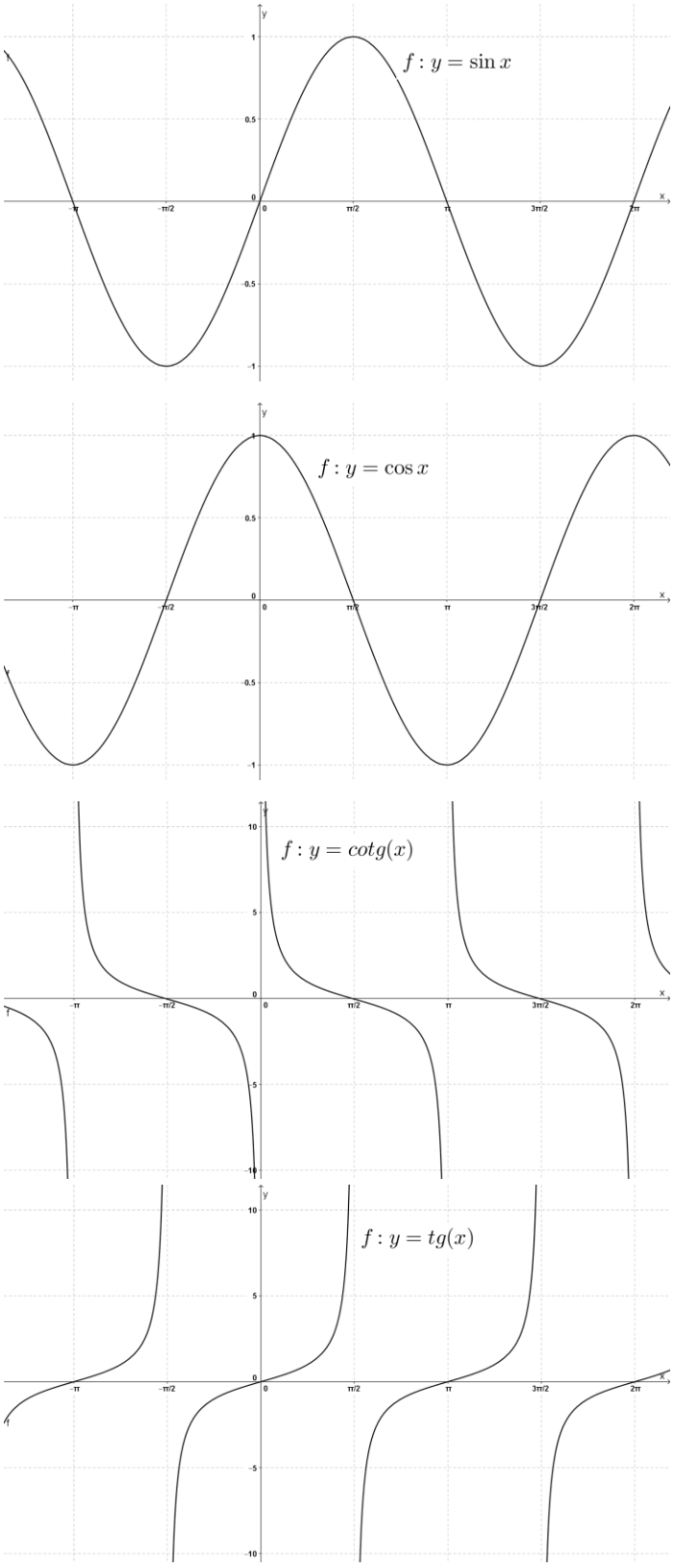
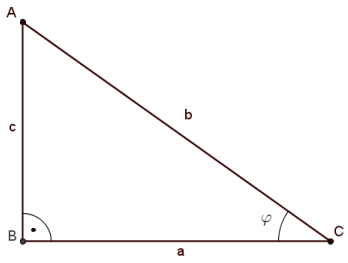
4. cvičení – Goniometrické a cyklometrické funkce. Základní goniometrické rovnice a nerovnice.

4.1 Goniometrické funkce



4.2 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku



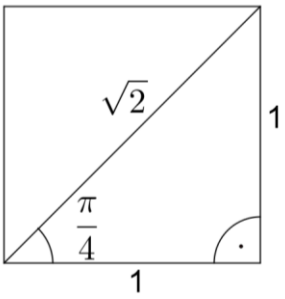
$$\sin\varphi = \frac{c}{b}$$

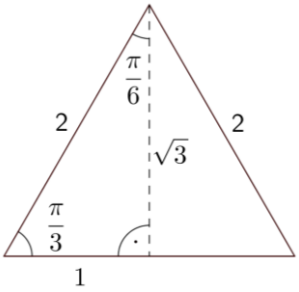
$$\cos\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}\ pro\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

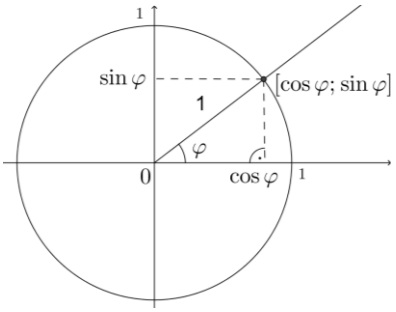
$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{tg\ \varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a}{c}\ pro\ \varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

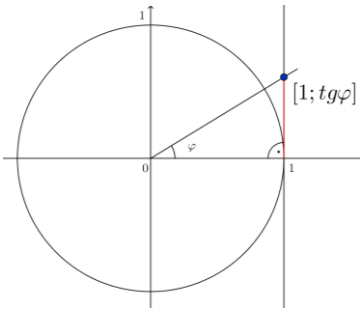
Goniometrické funkce – základní tabulkové hodnoty

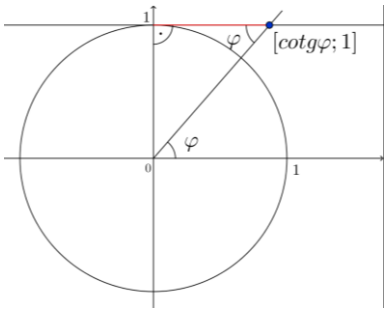




Pomocné obrázky pro určení goniometrických funkcí úhlů: $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$







Jak pracovat s jednotkovou kružnicí při určování hodnot goniometrických funkcí?

	0	$\boldsymbol{\pi/6}$	$\boldsymbol{\pi/4}$	$\boldsymbol{\pi/3}$	$\boldsymbol{\pi/2}$
$\boldsymbol{\sin\varphi}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\boldsymbol{\cos\varphi}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\boldsymbol{\operatorname{tg}\varphi}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---
$\boldsymbol{\operatorname{cotg}\varphi}$	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tabulka základních hodnot goniometrických funkcí

Příklad 4.1

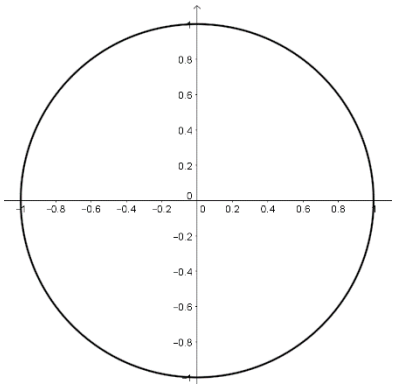
Pomocí jednotkové kružnice určete:

a) $sin\frac{3\pi}{4}$

b) $cos\frac{3\pi}{4}$

c) $tg\frac{3\pi}{4}$

d) $cotg\frac{3\pi}{4}$

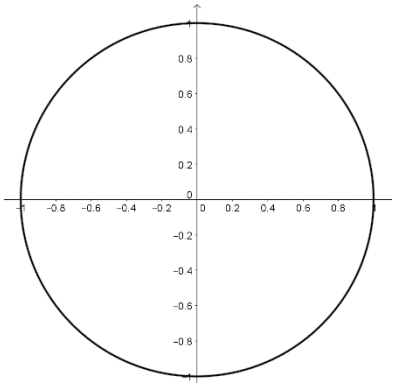


e) $sin\frac{7\pi}{6}$

f) $cos\frac{7\pi}{6}$

g) $tg\frac{7\pi}{6}$

h) $cotg\frac{7\pi}{6}$

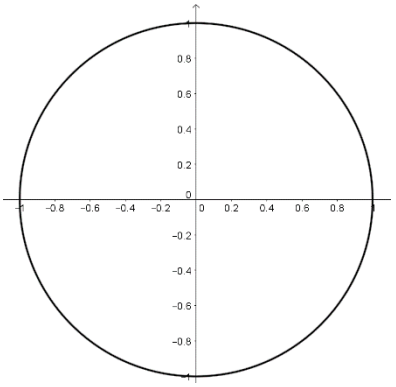


i) $sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

j) $cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

k) $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

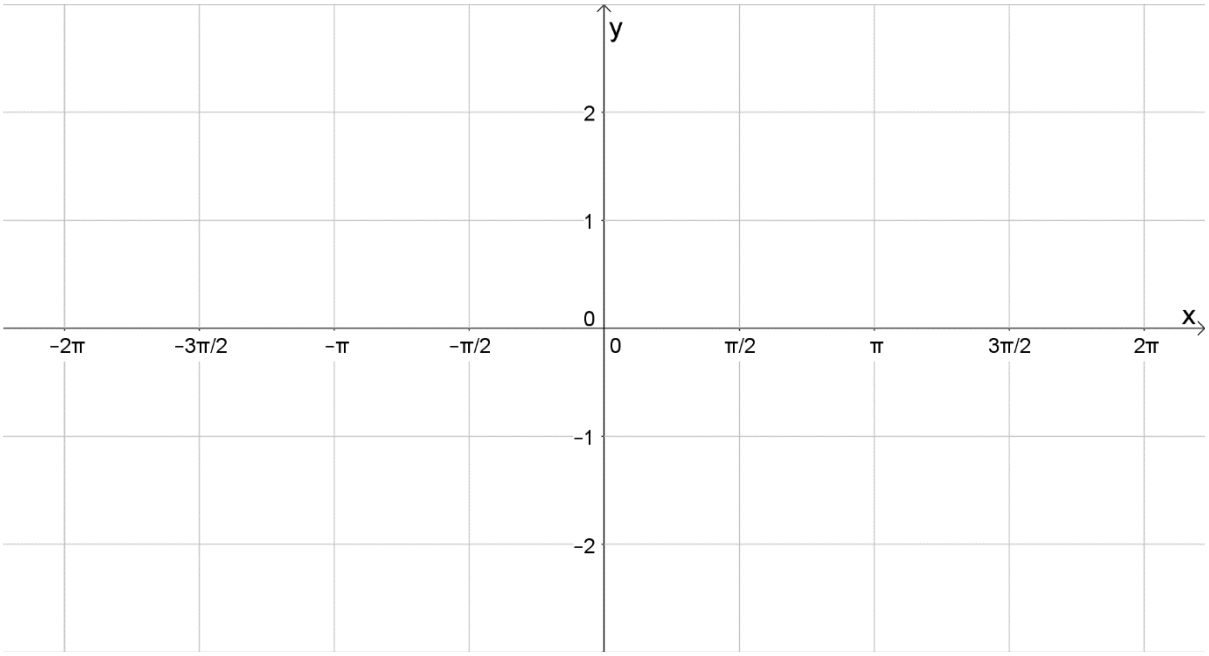
l) $cotg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$



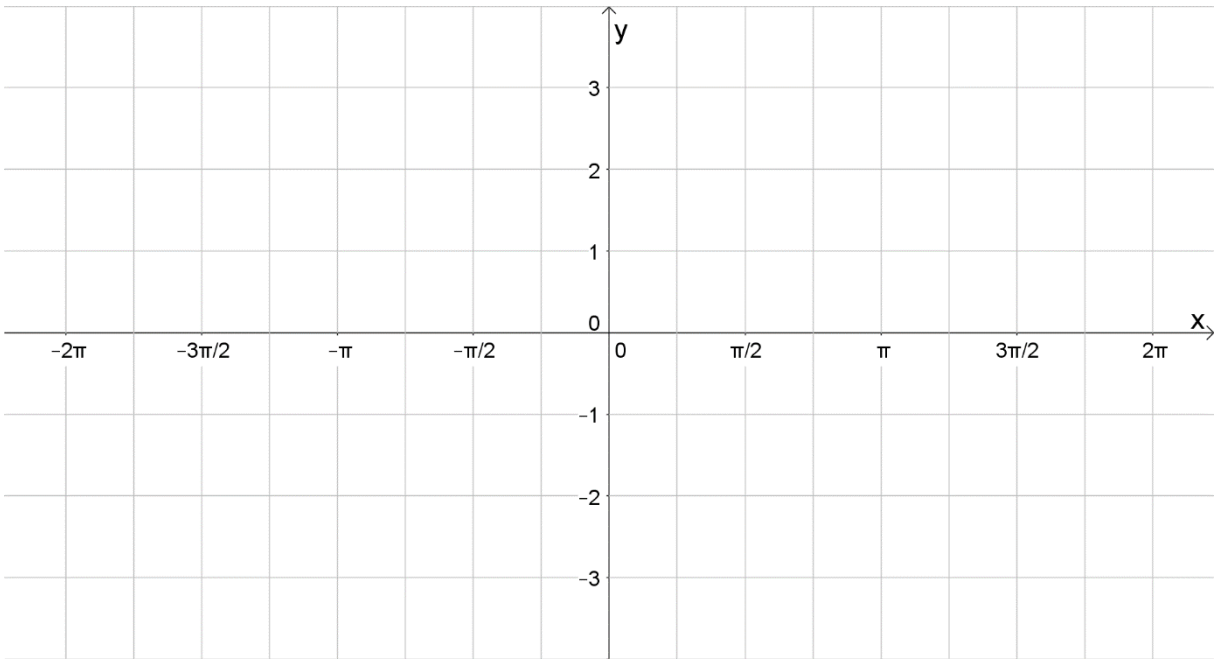
Příklad 4.2

Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $f_1: y = 1 - sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,



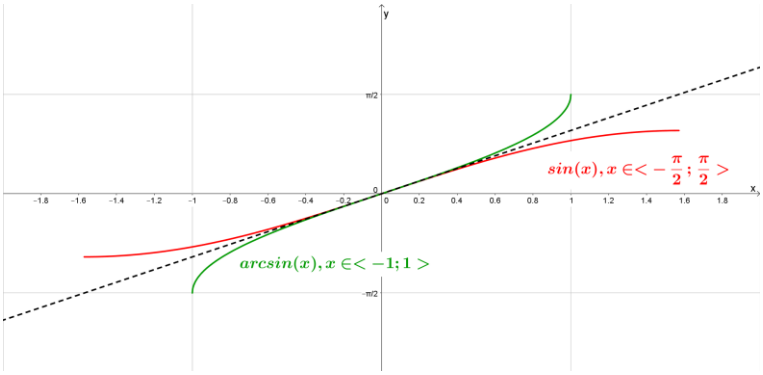
b) $f_2: y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$,



4.3 Cyklometrické funkce

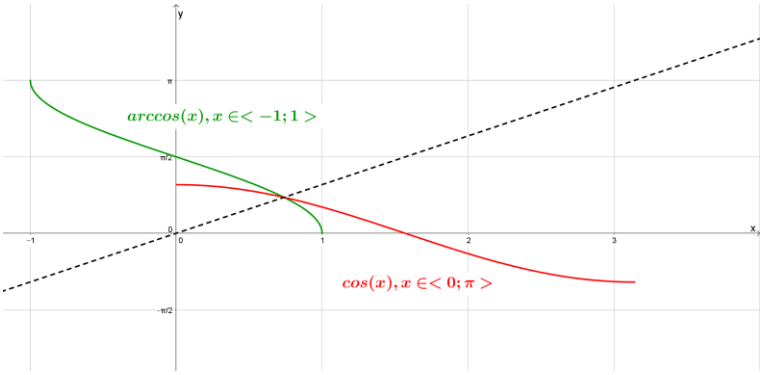
Cyklometrické funkce definujeme jako inverzní funkce k **restrikcím** funkcí goniometrických.

Arkussinus



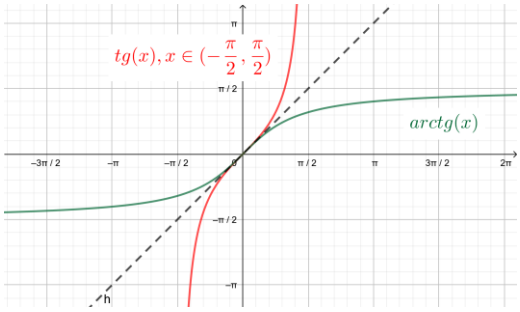
$$f: y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \arcsin x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

Arkuskosinus



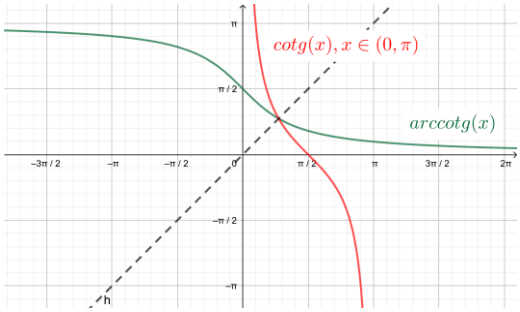
$$f: y = \cos x, x \in \langle 0; \pi \rangle, \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \arccos x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

Arkustangens



$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}}$$

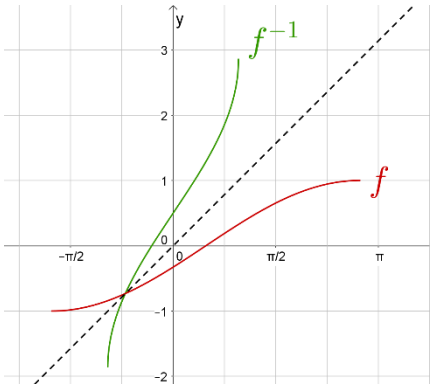
Arkuskotangens



$$f: y = \operatorname{cotg} x, x \in (0; \pi), \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R}}$$

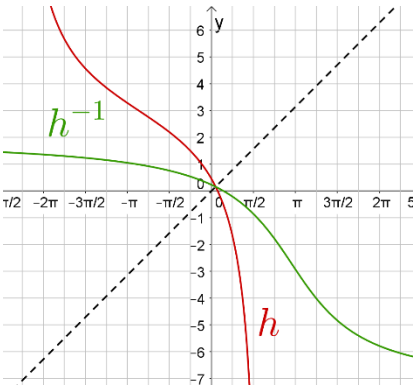
Příklad 4.3

Je dána funkce $f: y = sin\frac{2x-1}{3}, x \in \langle -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \rangle$. Určete funkci f^{-1} inverzní k funkci f.



Příklad 4.4

Je dána funkce $h: y = 3 - 2cotg(x + 2)$, $x \in (-2; \pi - 2)$. Určete funkci h^{-1} inverzní k funkci h.



4.4 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.

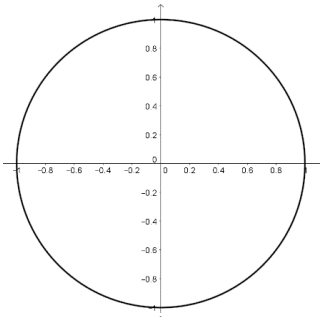
Základní goniometrická rovnice je každá rovnice zapsaná ve tvaru $g(x) = a$, kde $g(x)$ je jedna z goniometrických funkcí $(\sin x, \cos x, tg\, x, cotg\, x)$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. (Uvědomte si, že při definici goniometrické rovnice uvažujeme, že $x \in \mathbb{R}$, tzn. že hodnoty neznámé x uvádíme v obloukové míře!!!)

Řešení základních goniometrických rovnic je přímo viditelné z grafů příslušných goniometrických funkcí nebo z jednotkové kružnice.

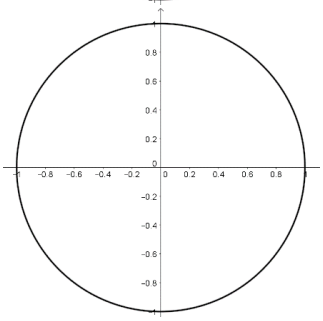
***Příklad 4.5**:*

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

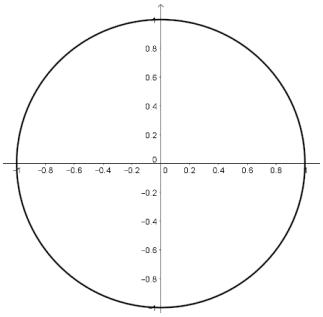
a) $\sin x = \frac{1}{2}$



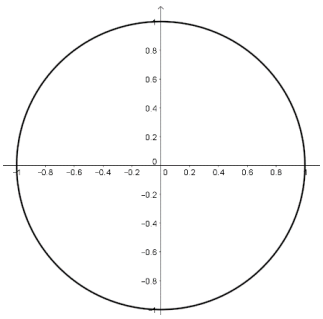
b) $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



c) $cotg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



d) $\sin x = -0{,}374\,1$ *(výsledek zapište s přesností na 2 des. místa)*



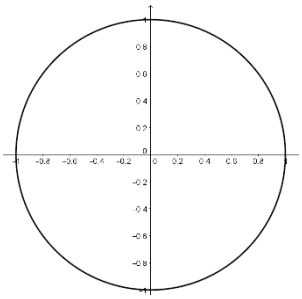
Složitější goniometrické rovnice

Substituce na základní typ: Pomocí jednoduché substituce $y = x + l$ nebo $y = x \cdot l$ převedeme složitější gon. rovnici typu $g(x + l) = k$ nebo $g(x \cdot l) = k$, kde g je gon. funkce s neznámou x a l, k jsou reálná čísla, na základní typ gon. rovnic $g(x) = k$.

Příklad 4.6:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$sin\, 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

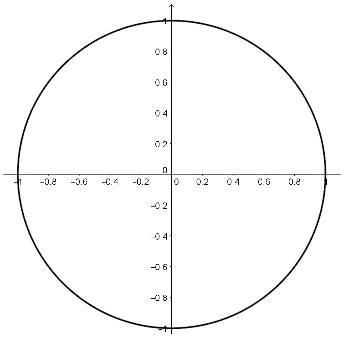


Substituce na kvadratickou rovnici

Příklad 4.7:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$$2sin^2 x - 3 = 3\, cos\, x$$



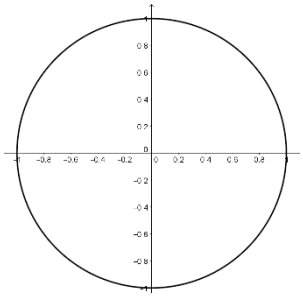
Dvojnásobný argument – při řešení tohoto typu úloh se využívají vzorce pro dvojnásobný argument gon. funkcí:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\cos(2x) = cos^2x - sin^2x$$

Příklad 4.8:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$cos\, x + sin\, 2x = 0$



Goniometrické funkce součtů a rozdílů, součet a rozdíl gon. funkcí – při řešení tohoto typu úloh se používají následující vzorce:

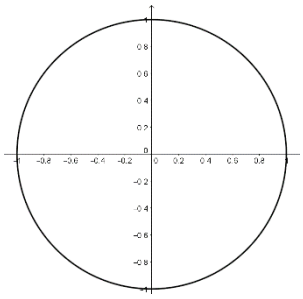
$$\sin(x+y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Příklad 4.9:

Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

$-\cos 3x = \cos 7x$



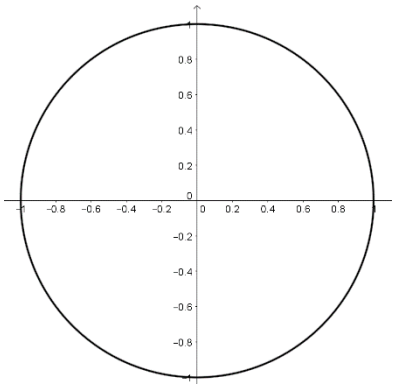
4.5 Goniometrické nerovnice

Základní goniometrické nerovnice

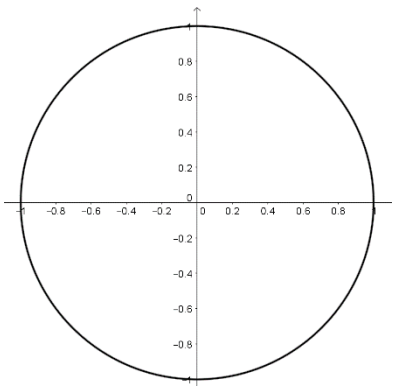
Příklad 4.10:

Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

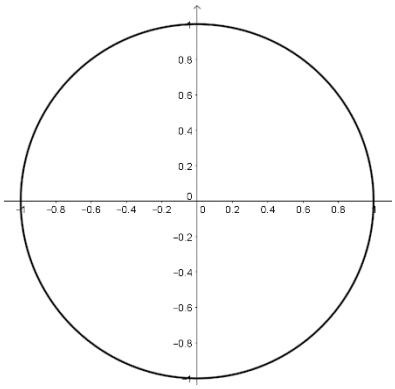
a) $\sin x > 0{,}5$



b) $\cos x < -0{,}5$



c) $tg\,x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

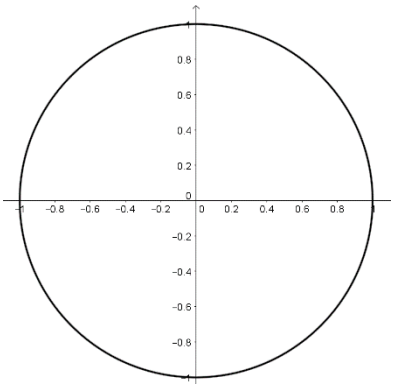


Složitější goniometrické nerovnice

Příklad 4.11:

Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

a) $sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0{,}5$



4.6 Slovní úlohy vedoucí na gon. rovnice

***Příklad 4.12**:*

Silnice má stoupání 3°30‘. O kolik metrů se liší nadmořská výška dvou míst, která jsou od sebe po silnici vzdálená 2km? (Výsledek zaokrouhlete na celé metry.)

***Příklad 4.13**:*

Na těleso působí v jednom bodě dvě síly: síla F_1 o velikosti $760\ N$ působí ve vodorovném směru (zleva doprava) a síla F_2 o velikosti $28{,}8\ N$ působí ve směru svislém (shora dolů). Těleso se vlivem těchto dvou sil dá do pohybu. Určete odchylku trajektorie tělesa od vodorovného směru. (Výsledek zaokrouhlete na celé stupně a minuty.)

4.7 Definiční obory - opakování

Příklad 4.14:

Určete definiční obor funkce f dané předpisem.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \sin(x^2+4) + \ln(1-|x-3|)$

b) $g(x) = 2\arccos\left(\frac{1}{x+3}\right)$

c) $h(x) = e^{\sin(x)+x} - \log_2(x+3) + \frac{4x-7}{\sqrt{x^2+x-2}}$