3. cvičení

Reálné funkce jedné reálné proměnné – vybrané vlastnosti a grafy funkcí, Funkce inverzní, Funkce mocninné a n-tá odmocnina, Funkce exponenciální a logaritmické

3.1 Funkce - Základní pojmy

Definice 3.1

Nechť $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$ ($f: A \to \mathbb{R}$) nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné (dále jen **funkcí**). Množina A se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se $D(f)$

Ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in \mathbb{R}$ takový, že $y = f(x)$. Množinu všech takových $y \in \mathbb{R}$, k nimž existuje $x \in D(f)$, pak nazýváme **obor hodnot** funkce f a označujeme $H(f)$.

Zadání funkce

K zadání funkce f je nutné uvést jednak definiční obor $D(f)$ a jednak pravidlo (předpis), pomocí něhož je každému $x \in D(f)$ přiřazen právě jeden prvek $y \in H(f)$. Je-li funkce zadána pouze předpisem a definiční obor není výslovně uveden, pak za definiční obor pokládáme množinu takových $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis „smysl".

Graf funkce

Definice 3.2

Grafem funkce $f: D(f) \to \mathbb{R}$ rozumíme množinu bodů

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f) \wedge y = f(x)\},$$

kde (x, y) značí bod roviny o souřadnicích x a y.

3.2 Vybrané vlastnosti funkcí

Monotónní funkce

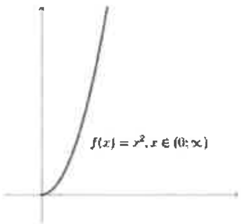
Definice 3.3

Řekneme, že funkce je

a) **rostoucí (resp. klesající) na množině $M \subset D(f)$**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$),
b) **nerostoucí (resp. neklesající) na množině $M \subset D(f)$**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$),
c) **rostoucí (resp. klesající, nerostoucí, neklesající)**, je-li rostoucí resp. klesající, nerostoucí, neklesající) na celém svém definičním oboru.

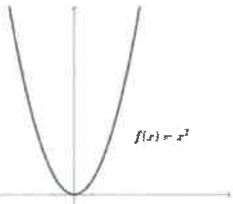
Příklad 3.1

Vyšetřete monotónii následujících funkcí.



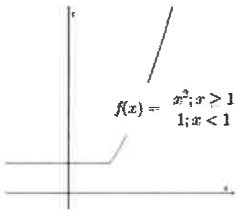
a)

restrikce f-ce $f(x) = x^2$ rostoucí



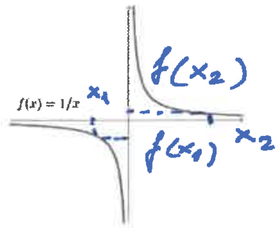
b)

není monotónní



c)

neklesající

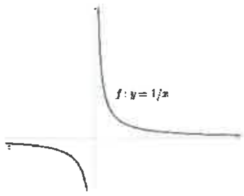


d)

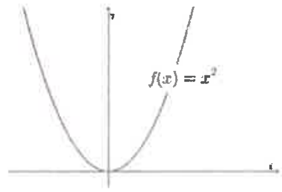
není monotónní

Sudá a lichá funkce

Definice 3.3
Funkce f **se nazývá sudá (resp. lichá)**, pokud platí:
a) Je-li $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$.
b) $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pro všechna $x \in D(f)$.



funkce lichá (graf souměrný podle počátku)



funkce sudá (graf souměrný podle osy y)

Příklad 3.2

Určete, zda jsou následující funkce sudé nebo liché.

a) $f: y = \frac{x}{x^2+1}$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$

$D(f) = \mathbb{R}$)

f je lichá

b) $g: y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $g(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} = g(x)$

$D(g) = \mathbb{R}$

g je sudá

POZOR! Většina f-cí není ani sudá ani lichá.

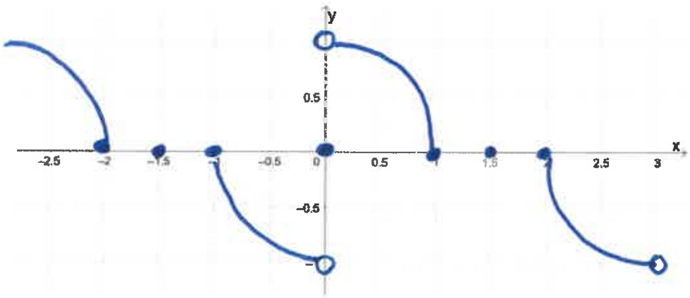
Periodická funkce

Definice 3.4
Řekneme, že funkce f je periodická s periodou $p, p \in \mathbb{R}^+$, jestliže platí:
a) Je-li $x \in D(f)$, pak $x + p \in D(f)$.
b) $f(x) = f(x + p)$ pro všechna $x \in D(f)$.

Příklad 3.3
Sestrojte graf funkce f, víte-li:
- $D(f) = \mathbb{R}$,
- *f je lichá,*
- $f(0) = 0 = f(\frac{3}{2})$,
- *f je periodická s periodou 3,*
- $\forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right): f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1; \quad x \in \langle -1; 1 \rangle$

Vypočtěte $f(1\,000), f(\pi), f(-\sqrt{2})$.

$f(-\sqrt{2})$ ... není def.



$f(1000) = f(999 + 1) = f(1) = 0$

$f(\pi) = f(\underbrace{\pi - 3}_{\in (0;1)}) = \sqrt{1 - (\pi - 3)^2}$

3.3 Operace s funkcemi

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí

Definice 3.5
Nechť f a g jsou funkce. **Součtem $f + g$, rozdílem $f - g$, součinem $f \cdot g$ a podílem f/g funkcí f a g** nazveme funkce, které jsou dány předpisem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad pro\ x \in D(f) \cap D(g)\ \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}.$$

Absolutní hodnotou funkce f *nazýváme funkci definovanou předpisem*
$$|f|(x) = |f(x)| \qquad pro\ x \in D(f).$$

Skládání funkcí

Definice 3.6
Nechť f a g jsou funkce. **Složenou funkcí $f \circ g$** nazveme funkci definovanou předpisem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad pro\ x \in D(g) \wedge g(x) \in f(x).$$

Funkci f nazýváme **vnější složka** a funkci g nazýváme **vnitřní složka** složené funkce $f \circ g$.

Příklad 3.4
Jsou dány funkce $f: y = 3 - 2x$ a $g: y = \ln x$.
a) Určete složenou funkci $f \circ g$ a její definiční obor.

$(f \circ g)(x) = 3 - 2 \cdot \ln x$; $D(f \circ g) = (0; \infty)$

$\ln x$

$x > 0$

b) Určete složenou funkci $g \circ f$ a její definiční obor.

$(g \circ f)(x) = \ln(3 - 2x) \Rightarrow D(g \circ f) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

$3 - 2x > 0$

$3 > 2x$

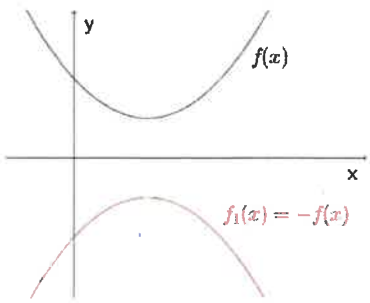
$\frac{3}{2} > x$

3.4 Transformace grafu funkce

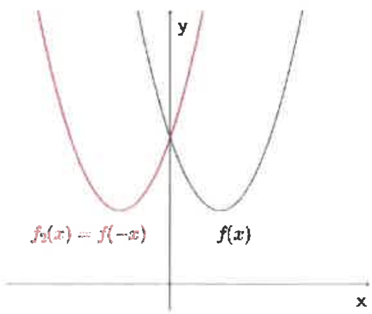
Nechť je dána funkce $f: y = f(x), x \in D(f)$. Připomeňme si, jak lze pomocí grafu funkce f sestrojit grafy následujících funkcí:

a) $f_1: y = -f(x)$,	b) $f_2: y = f(-x)$,	c) $f_3: y = f(x) + b$,
d) $f_4: y = f(x - a)$,	e) $f_5: y = k \cdot f(x)$,	f) $f_6: y = f(mx)$,

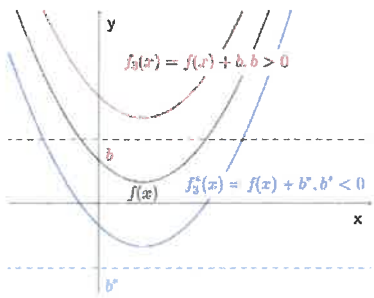
kde $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, k \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+$ jsou konstanty.



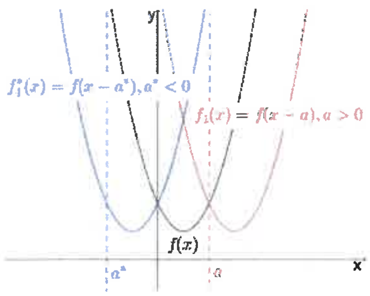
a) grafy funkcí f a f_1 jsou souměrné podle osy x



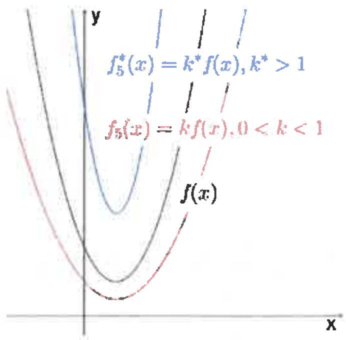
b) grafy funkcí f a f_2 jsou souměrné podle osy y



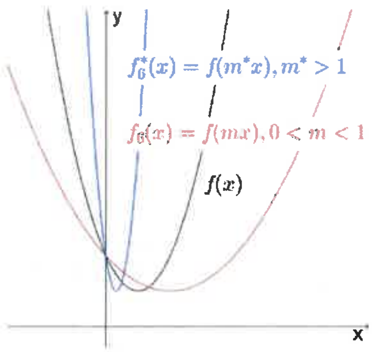
c) graf funkce f_3 je posunutím grafu funkce f o $|b|$ ve směru osy y (je-li $b > 0$, jde o posunutí „nahoru"; (je-li $b < 0$, jde o posunutí „dolů")



d) graf funkce f_4 je posunutím grafu funkce f o $|a|$ ve směru osy x (je-li $a > 0$, jde o posunutí „doprava"; je-li $b < 0$, jde o posunutí „doleva")



e) graf funkce f_5 je deformací grafu funkce f ve směru osy y (je-li $k > 1$, jde o k násobné „zvětšení" ve směru osy y; je-li $0 < k < 1$, jde o k násobné „zmenšení" ve směru osy y)



f) graf funkce f_6 je deformací grafu funkce f ve směru osy x (je-li $m > 1$, jde o m násobné „zúžení" ve směru osy y; je-li $0 < m < 1$, jde o m násobné „rozšíření" ve směru osy y)

Příklad 3.5

Nakreslete v jednom souřadnicovém systému grafy funkcí $f: y = x^2$ a $f_1, f_2, \dots, f_4$. Využijte úpravy předpisu funkcí doplněním na čtverec.

a) $f_1: y = x^2 + 4x - 3$

b) $f_2: y = x^2 - 6x - 7$

c) $f_3: y = 2x^2 - 8x + 10$

d) $f_4: y = -3x^2 - 2x + 1$

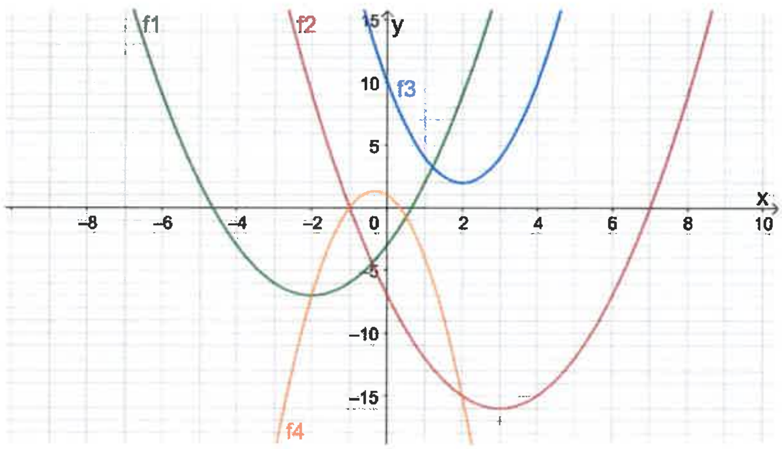
Poznámka:

Rozklad kvadratického trojčlenu **doplněním na čtverec** – „přinutíme fungovat" druhou mocninu trojčlenu a následně rozdíl čtverců.

Například:

$$\underbrace{x^2 + 8x + 7 = x^2 + 8x + ??}_{x^2 + 2Bx + B^2} - ?? + 7 = \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{x^2 + 2Bx + B^2} - 16 + 7 = \underbrace{(x+4)^2}_{(x+B)^2} - 9 =$$

$$= [(x+4) - 3][(x+4) + 3] = (x+1)(x+7)$$



$f_1: y = x^2 + 4x - 3 = \underbrace{x^2 + 4x + 4} - 4 - 3 = (x+2)^2 - 7$

$f_2: y = x^2 - 6x - 7 = \underbrace{x^2 - 6x + 9} - 9 - 7 = (x-3)^2 - 16$

$f_3: y = 2x^2 - 8x + 10 = 2(x^2 - 4x) + 10 = 2(\underbrace{x^2 - 4x + 4} - 4) + 10 =$

$= 2(x-2)^2 - 8 + 10 = 2(x-2)^2 + 2$

$f_4: y = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x^2 + \frac{2}{3}x) + 1 = -3(\underbrace{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}} - \frac{4}{9}) + 1 =$

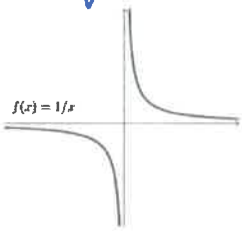
$= -3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{3}{9} + 1 = -3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{4}{3}$

3.5 Inverzní funkce

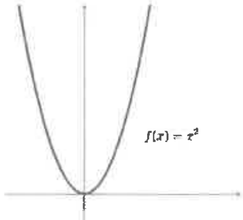
Prostá funkce

Definice 3.7
Řekneme, že funkce $\boldsymbol{f}$ **je prostá**, právě když pro každé $x_1, x_2 \in D(f)$ takové, že $x_1 \neq x_2$ platí, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$\forall x_1, x_2 \in D(f): \ (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$



funkce je prostá



funkce není prostá

nebo $\forall x_1, x_2 \in D(f): \ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$

Poznámka: Složením dvou prostých funkcí vznikne funkce prostá.

Příklad 3.6
Dokažte, že $f: y = \frac{x+2}{x-3}$ *je prostá.*

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}: \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

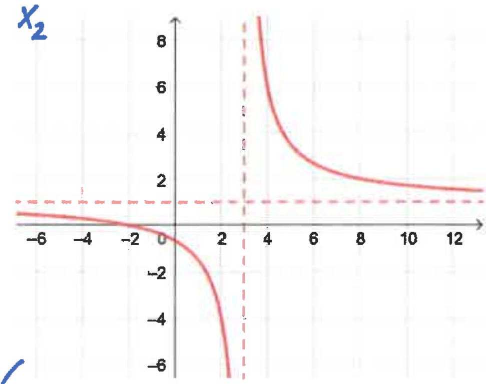
$$\frac{x_1 + 2}{x_1 - 3} = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 + 2)(x_2 - 3) = (x_1 - 3)(x_2 + 2)$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 - 3x_1 + 2x_2 - 6 = x_1 x_2 - 3x_2 + 2x_1 - 6$$

$$\Rightarrow 5x_2 = 5x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ je prostá}$$



- z grafu: $f: y = \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$ viz graf

- $f = g \circ h \circ j$

$g(x) = 1 + x$; $h(x) = \frac{5}{x}$; $j(x) = x - 3$

g, h, j ... prosté f-ce $\Rightarrow f$ je prostá f-ce

Inverzní funkce

Definice 2.13

Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} se nazývá funkce inverzní k funkci f, jestliže platí:

a) $D(f^{-1}) = H(f)$.

b) $\forall y \in D(f^{-1}): f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Věta 2.1

Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} existuje právě tehdy, když f je funkce prostá.

Věta 2.2

Nechť f je prostá funkce a f^{-1} funkce k ní inverzní. Potom platí:

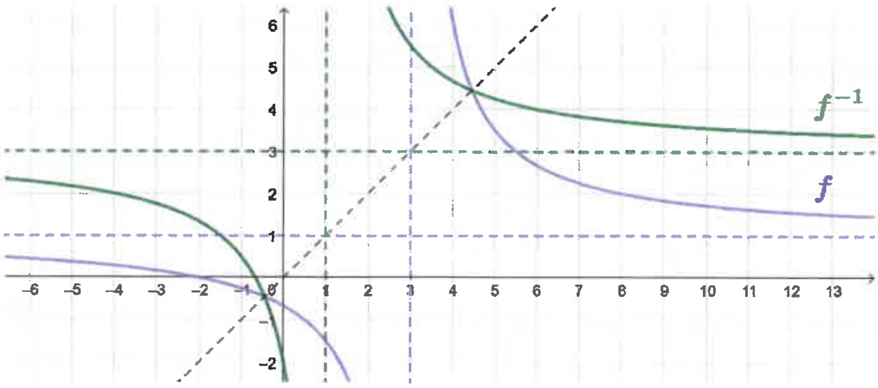
1. f^{-1} je prostá funkce.
2. Je-li f rostoucí, resp. klesající, potom f^{-1} je rostoucí, resp. klesající.
3. $\forall x \in D(f): (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.
   $\forall x \in D(f^{-1}): (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$.
4. Inverzní funkce k f^{-1} je f, tj. $(f^{-1})^{-1} = f$.
5. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle přímky $p: y = x$.

Jak postupujeme, chceme-li najít funkci inverzní k funkci f?

1) Ověříme, že funkce f je prostá.
2) Určíme definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$ funkce f.
3) Určíme $D(f^{-1})$ a určíme předpis f^{-1}.

Příklad 3.7

Ověřte, že k funkci $f: y = \frac{x+2}{x-3}$ existuje funkce inverzní, najděte ji a načrtněte její graf.



ad 1) viz př. 3.6 – f je prostá

ad 2) viz graf: $y = \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

ad 3) $D(f^{-1}) = H(f) = \underline{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$

$\underline{H(f^{-1})} = D(f) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}: \; y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$, tj.:

$$y = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow \begin{aligned} y(x-3) &= x+2 \\ yx - 3y &= x+2 \\ yx - x &= 2+3y \\ x(y-1) &= 2+3y \\ x &= \frac{2+3y}{y-1} = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(y) = \frac{2+3y}{y-1}}} \quad \text{neboli} \quad \underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{2+3x}{x-1}}}$$

graf: $y = \dfrac{3x+2}{x-1} = 3 \cdot \dfrac{x+\frac{2}{3}}{x-1} = 3 \cdot \dfrac{x-1+1+\frac{2}{3}}{x-1} =$

$= 3 \cdot \dfrac{x-1+\frac{5}{3}}{x-1} = 3 + \dfrac{5}{x-1}$ (viz graf str. 28)

3.6 Základní elementární funkce

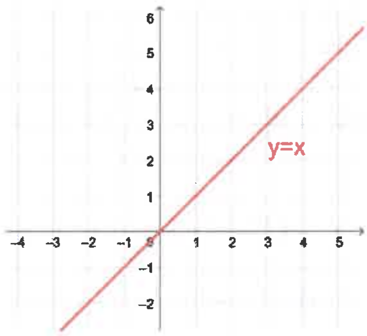
Základní elementární funkce (nutno znát definice a grafy – zopakujte si například dle *Čepička a kol., Herbář funkcí*, dostupné online z http://mi21.vsb.cz/modul/herbar-funkci)

- Exponenciální funkce
- Logaritmická funkce
- Konstantní funkce
- Mocninné funkce
- Goniometrické funkce
- Cyklometrické funkce
- Hyperbolické funkce
- Hyperbelometrické funkce

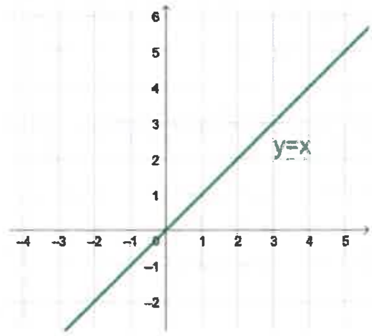
Definice 3.1
Elementárními funkcemi nazýváme funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu algebraických operací (tj. operací +, −, · , :) a skládání funkcí.

3.7 Mocninné funkce a funkce n-tá odmocnina

$$f: y = x^n; n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$$

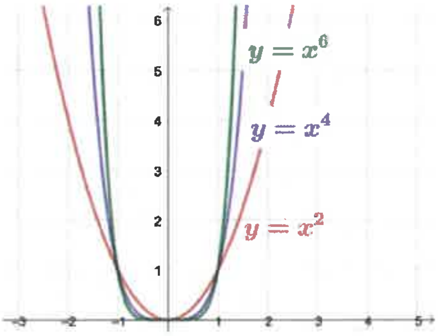


$n = 1$: f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

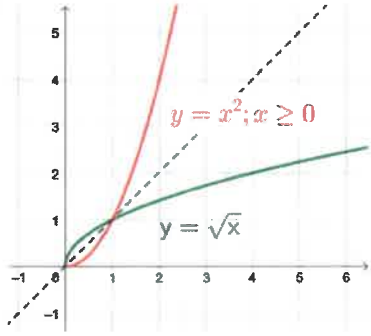


$f: y = x \;\Rightarrow f^{-1}: y = x$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R}, H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

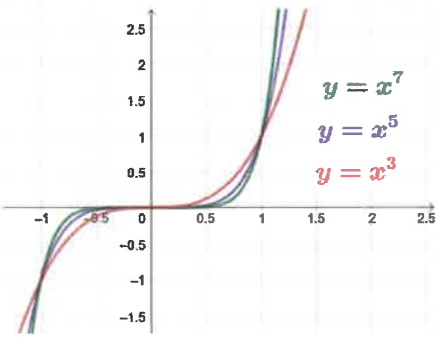


n sudé: f není prostá $\Rightarrow \nexists f^{-1}$

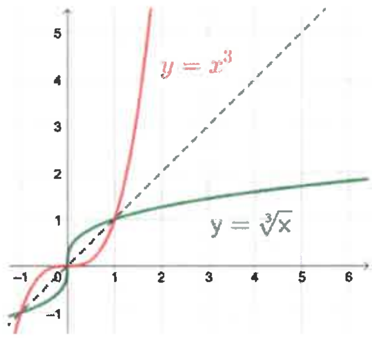


$f: y = x^n; n\ je\ sudé; x \in \langle 0; \infty) \;\Rightarrow f^{-1}: y = \sqrt[n]{x}$

$D(f^{-1}) = \langle 0; \infty),\ H(f^{-1}) = \langle 0; \infty)$



n liché: f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$



$f: y = x^n; n\ je\ liché \;\Rightarrow f^{-1}: y = \sqrt[n]{x}$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R}, H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

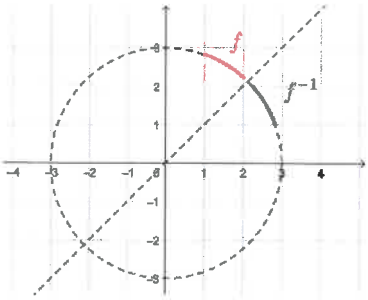
POZOR!

- $\sqrt{4} = 2, \sqrt{4} \neq -2$ (viz graf $f: y = \sqrt{x}$)
- $\sqrt{x^2} = x$ platí pouze pro $x \in \langle 0; \infty)$
- $x \in (-\infty; 0) \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ platí pouze pro $x \in \langle 0; \infty)$

$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2} = x \text{ pro } x \in \langle 0;\infty) \\ \sqrt{x^2} = -x \text{ pro } x \in (-\infty;0) \end{array}\right\} \sqrt{x^2} = |x|$

Příklad 3.8

Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci $f: y = \sqrt{9-x^2}, D(f) = \langle 1; 2\rangle$.



ad1) je f prostá?

$\forall x_1, x_2 \in \langle 1; 2\rangle: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\underbrace{\sqrt{9-x_1^2}}_{\in \mathbb{R}^+} = \underbrace{\sqrt{9-x_2^2}}_{\in \mathbb{R}^+}$$

$$9-x_1^2 = 9-x_2^2$$

$$\underbrace{x_1^2}_{\in\langle 1;2\rangle} = \underbrace{x_2^2}_{\in\langle 1;2\rangle}$$

$$x_1 = x_2$$

ad2) $D(f) = \langle 1; 2\rangle$

$H(f) = \langle \sqrt{5}; \sqrt{8}\rangle$

ad3) $D(f^{-1}) = \langle\sqrt{5}; \sqrt{8}\rangle$; $H(f^{-1}) = \langle 1; 2\rangle$

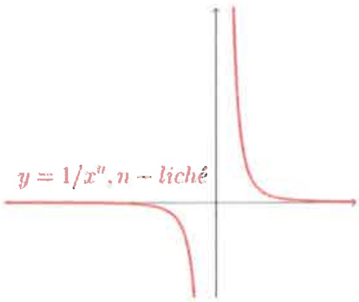
$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$y \in \langle \sqrt{5}; \sqrt{8}\rangle: y = \underbrace{\sqrt{9-x^2}}_{\in \mathbb{R}_0^+} \Rightarrow y^2 = 9-x^2 \Rightarrow x^2 = 9-y^2 \Rightarrow$

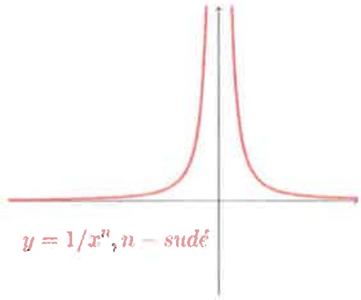
$\Rightarrow x = \sqrt{9-y^2} = f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(x): y = \sqrt{9-x^2}$$

$$f: y = x^{-n}; n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad kde\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$



$f: y = x^{-n}; n$ *je liché*
$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}, H(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



$f: y = x^{-n}; n$ *je sudé*
$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}, H(f) = (0; \infty)$

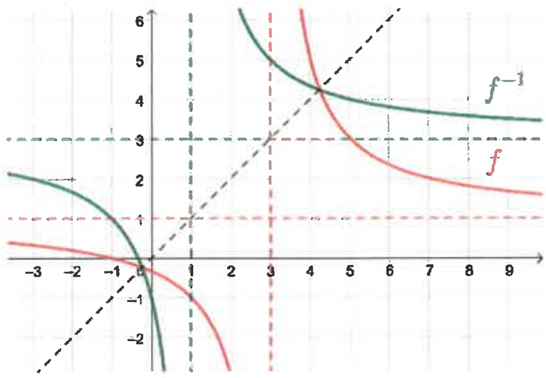
Příklad 3.9

Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci $f: y = \frac{x+1}{x-3}$.

ad1) Je f- prostá ?

$$f: y = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x-3+4}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3}$$

f je prostá - viz graf



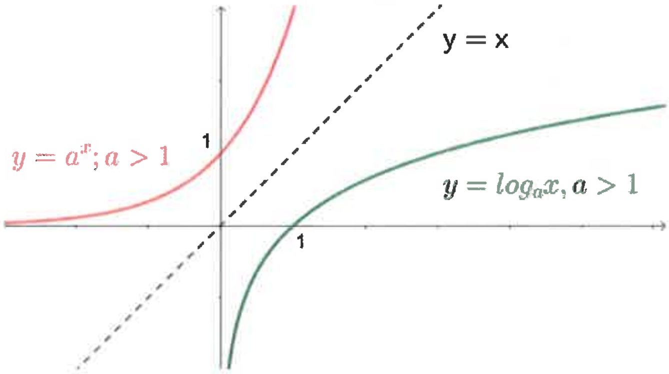
ad2) $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$
$H(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

ad3) $\underline{D(f^{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$; $H(f^{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

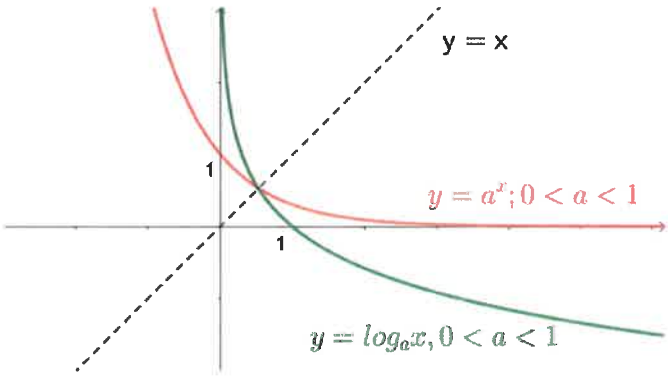
$$y = \frac{x+1}{x-3} \Rightarrow y(x-3) = x+1$$
$$yx - 3y = x + 1$$
$$yx - x = 1 + 3y$$
$$x(y-1) = 1 + 3y$$
$$x = \frac{1+3y}{y-1} \Rightarrow \underline{f^{-1}(x): y = \frac{1+3x}{x-1}}$$

3.8 Exponenciální a logaritmické funkce



$f: y = a^x; a > 1$
$D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (0; \infty)$
f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$f^{-1}: y = \log_a x; a > 1$
$D(f^{-1}) = (0; \infty); H(f^{-1}) = \mathbb{R}$



$f: y = a^x; 0 < a < 1$
$D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (0; \infty)$
f je prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$f^{-1}: y = \log_a x; 0 < a < 1$
$D(f^{-1}) = (0; \infty); H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

POZOR!

- $\log_a a^x = x$ platí $\forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a x} = x$ platí pouze pro $x \in (0; \infty)$

Příklad 3.10

Určete pravdivostní hodnotu daných výroků. (z grafu)

a) $V1: 3^{0{,}375} > 0$ $p(V_1) = 1$

b) $V2: 3^{-0{,}375} > 0$ $p(V_2) = 1$

c) $V3: 3^{0{,}375} > 1$ $p(V_3) = 1$

d) $V4: 3^{-0{,}375} > 1$ $p(V_4) = 0$

e) $V5: (-3)^{0{,}375} > 0$ V_5 není výrok, protože $(-3)^x$ není def.

f) $V6: 3^{0{,}375} > 0{,}3^{0{,}375}$ $p(V_6) = 1$

g) $V7: 3^{-0{,}375} > 0{,}3^{-0{,}375}$ $p(V_7) = 0$

Příklad 3.11

Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$: (k grafu)

a) $3^x > 0$ $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{R}$

b) $0{,}3^x > 0$ $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{R}$

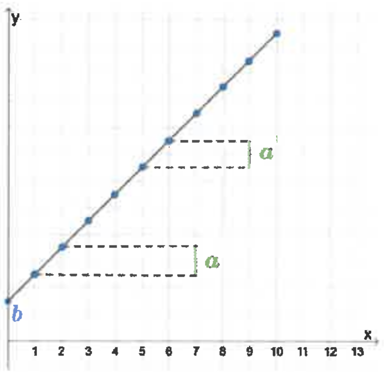
c) $3^x > 1$ $\Rightarrow$ $x \in (0; \infty)$

d) $0{,}3^x > 1$ $\Rightarrow$ $x \in (-\infty; 0)$

Lineární růst vs. Exponenciální růst

Lineární růst

$f: y = ax + b; kde\ a > 0, b \in \mathbb{R}\ (v\ praxi\ většinou\ b > 0), x\ (čas) \geq 0$



$f(0) = b$, tj. b označuje počáteční stav

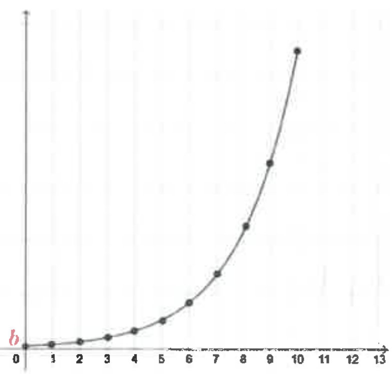
$f(x) = ax + b$

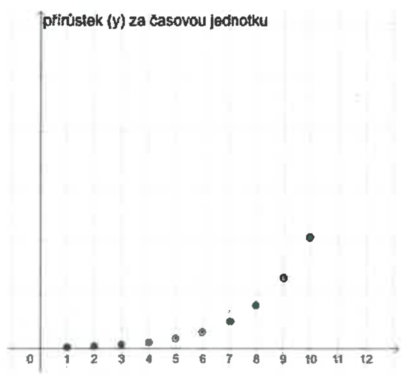
$f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b$

přírůstek za časovou jednotku: $f(x) - f(x-1) = a$

Exponenciální růst

$f: y = b \cdot a^x; kde\ a > 1, b > 0, x\ (čas) \geq 0$





$f(0) = b$, tj. b označuje počáteční stav

$f(x) = b \cdot a^x$

$f(x-1) = b \cdot a^{x-1} = b \cdot a^x \cdot \frac{1}{a}$

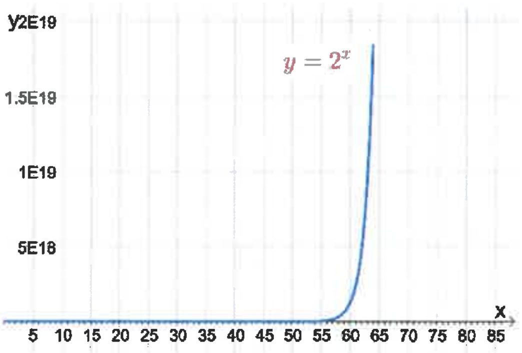
přírůstek za časovou jednotku: $f(x) - f(x-1) = a^x \cdot b \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)$

koeficient růstu za časovou jednotku: $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$

Dokážete předvídat důsledky exponenciálního růstu?

Příklad 3.12:

Velkovezír Sissa ben Dahir, jenž je považován za vynálezce šachů. Hru daroval indickému králi, který velkovezírovi nabídl, aby si sám řekl, co chce za odměnu. Dahir odpověděl, že by rád rýži, a to tak, že za první políčko šachovnice dostane jedno zrnko, za druhé dvě zrnka, za třetí čtyři, za čtvrté osm zrnek a tak dále až po poslední čtyřiašedesáté políčko. S každým dalším políčkem žádal jen dvojnásobek rýže, která byla na políčku předešlém. Král ocenil jeho skromnost, ale odměna se mu zdála malá. Avšak učenec trval na svém. Sběrači pšenice proto odešli na čtyři strany prostorné indické země, načež králi došla nečekaná zpráva: V celé Indii není tolik pšeničných zrn, abyste mohl uspokojit přání Sissy ben Dahira. Kolik zrn měl velkovezír dostat za 64. políčko? Tipněte si a následně exaktně vypočtěte.



$f: y = 1 \cdot 2^x$

↑ poč. stav

$f(64) = 2^{64} =$

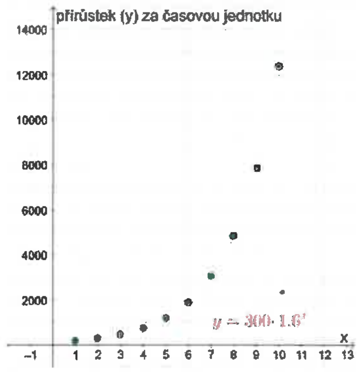
$18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 >$

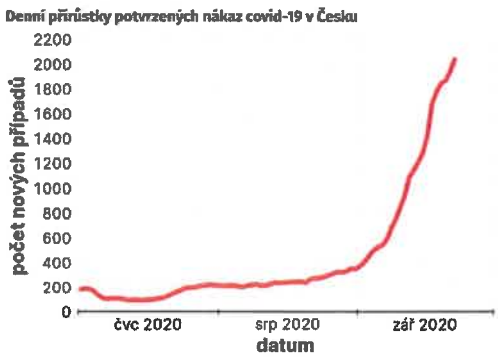
$> 18 \cdot 10^{18}$

$1{,}8 \cdot 10^{19}$

Pro dosažení odměny se potřebná rýže vyprodukuje cca za 260 let..

Šíření covid-19: exponenciální růst?





Demonstrace exponenciálního růstu – časová jednotka 5 dní, 25. 8. 2020 – bylo registrováno 302 nakažených, 15. září statistikové odhadli reprodukční číslo na 1,6 (**Pozor!** Epidemiologický model šíření nemoci nelze vytvořit jen pomocí tohoto jednoduchého exponenciálního modelu!!! Zamyslete se proč...)

Zdroj: *Lázňovský,Kasík: Exponenciální růst mate i experty. Vyzkoušejte si, čím je tak nebezpečný. online:* https://www.idnes.cz/technet/veda/jak-vypada-exponencialni-rust-covid-19-koronavirus.A200915_130739_veda_mla

Zpětnovazební jev (promoření populace)

Logaritmus čísla $x > 0$ o základu $a > 0$, $a \neq 1$ je takové číslo y, pro které platí $a^y = x$, tj.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Příklad 3.13

Určete:

a) $log_2 8 =$ $\log_2 2^3 = 3 \iff 2^x = 2^3$

b) $log_{10} 100 = log\,100 =$ $\log 10^2 = 2$

c) $log_{\frac{2}{7}} \frac{7}{2} =$ $= \log_{\frac{2}{7}} (\frac{2}{7})^{-1} = -1$

d) $log_e e^3 = ln\, e^3 =$ 3

Příklad 3.14

Určete pravdivost daných výroků: (z grafu)

a) $V1: log_3 5 > 0$ $\quad p(V_1) = 1$

b) $V2: log_3 0{,}2 > 0$ $\quad p(V_2) = 0$

c) $V3: log_{0,1} 5 > 0$ $\quad p(V_3) = 0$

d) $V4: log_{0,1} 0{,}25 > 0$ $\quad p(V_4) = 1$

e) $V5: log_3(-5) > 0$ $\quad V_5$ není výrok

f) $V6: log_3 1 > 0$ $\quad p(V_5) = 0$

Věty o logaritmech

$\forall a, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+, c, n \in \mathbb{R}$:

1. Vztah mocniny a logaritmu: $a^{\log_a x} = x$ (např.: $e^{\ln x} = x, 10^{\log x} = x;\ 2^{\log_2 x} = x$)
2. Logaritmus součinu: $\log_a x\,y = \log_a x + \log_a y$
3. Logaritmus podílu: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. Logaritmus mocniny: $\log_a x^n = n \log_a x$
5. Podíl dvou logaritmů: $\frac{\log_a x}{\log_a z} = \log_z x$ (např.: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$)
6. Převod reálného čísla na logaritmus: $c = \log_a a^c$ (např.: $3 = \log_2 2^3 = \log 10^3 = \ln e^3$)

Příklad 3.15

Vypočtěte:

a) $log_3(81 \cdot 27)$ $= \log_3 81 + \log_3 27 = \log_3 3^4 + \log_3 3^3 = 4 + 3 = 7$

b) $log_6 9 + log_6 4$ $= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

c) $log_3 18 - log_3 2$ $= \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

d) $log_3 9^4$ $= \log_3 (3^2)^4 = \log_3 3^8 = 8$

e) $3\, log_8 2$ $= \log_8 2^3 = \log_8 8 = 1$

Logaritmování

Rovnice $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je pro $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ ekvivalentní s rovnicí
$$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b \text{ pro } c \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}.$$
Tuto ekvivalentní úpravu nazýváme **logaritmování**.

Příklad 3.16

Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

a) $2^x = 10$

$$\ln 2^x = \ln 10$$
$$x \cdot \ln 2 = \ln 10 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{\ln 10}{\ln 2} = \underline{\underline{\log_2 10}}$$

b) $3^x = 13^{x-1}$

$$\ln 3^x = \ln 13^{x-1}$$
$$x \cdot \ln 3 = (x-1) \cdot \ln 13$$
$$x \cdot \ln 3 - x \cdot \ln 13 = -\ln 13 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{-\ln 13}{\ln 3 - \ln 13} = \frac{\ln 13}{\ln 13 - \ln 3} = \underline{\underline{\log_{\frac{13}{3}} 13}}$$

c) $2^x \cdot 3^{x-1} = 4^{x+1}$

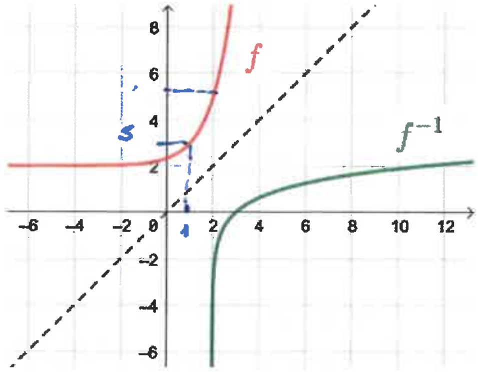
$$2^x \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 4^x \cdot 4$$
$$6^x = 4^x \cdot 12$$
$$\left(\frac{6}{4}\right)^x = 12 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 12 \Rightarrow x \cdot \ln \frac{3}{2} = \ln 12 \rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{\ln 12}{\ln \frac{3}{2}} = \underline{\underline{\log_{3/2} 12}}$$

d) $3 \cdot 7^x - 7^{x-1} = 60$

$$3 \cdot 7^x - 7^x \cdot \frac{1}{7} = 60 \quad / \cdot 7$$
$$21 \cdot 7^x - 7^x = 420$$
$$20 \cdot 7^x = 420$$
$$7^x = 21$$
$$x \cdot \ln 7 = \ln 21$$
$$\underline{\underline{x}} = \frac{\ln 21}{\ln 7} = \underline{\underline{\log_7 21}}$$

Příklad 3.17

Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci $f: y = 2 + 3^{x-1}$.



ad1) je f prostá ?

viz graf - f je prostá

ad2) $D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = (2;\infty)$

ad3) $\underline{D(f^{-1})} = \underline{(2;\infty)}$

$H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

$\forall\, y \in (2;\infty): \quad y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$y = 2 + 3^{x-1} \Rightarrow \cancel{x = 2 + 3^{y-1}}$

$\Rightarrow y - 2 = 3^{x-1}$

$\ln(y-2) = \ln 3^{x-1}$

$\ln(y-2) = (x-1)\cdot \ln 3$

$\ln(y-2) = x \cdot \ln 3 - \ln 3$

$\ln(y-2) + \ln(3) = x \cdot \ln 3$

$$\frac{\ln(y-2) + \ln(3)}{\ln(3)} = x$$

$\log_3(y-2) + 1 = x \Rightarrow \underline{f^{-1}(x)}: \underline{y = 1 + \log_3(x-2}$