2. cvičení – Matematická indukce; Supremum, Infimum; Kvadratické rovnice a nerovnice, Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

2.1 Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí je často používaná metoda dokazování v matematice, nejčastěji pokud pracujeme s přirozenými čísly nebo s nějakou jinou posloupností. Základním principem je, že dané tvrzení dokážeme pro nějaký první prvek, v přirozených číslech to nejčastěji je $n = 1$. To dokážeme prostým dosazením. V dalším, indukčním, kroku dokážeme implikaci „pokud tvrzení platí pro $n = a$, pak platí i pro $n = a + 1$". Z těchto dvou kroků můžeme odvodit, že daný výraz platí pro všechna n (z nějaké množiny, se kterou zrovna pracujeme).

Věta 2.1: Princip matematické indukce
Nechť je dána množina $M \subset \mathbb{N}$ taková, že platí:
a) $1 \in M$,
b) $\forall n \in M: n + 1 \in M$.
Pak $M = \mathbb{N}$.

Příklad 2.1
Pomocí matematické indukce dokažte, že:
a) $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,

- $n = 1 \Rightarrow L: 1 \quad P: 1^2 = 1 \Rightarrow L = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}: 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2 \Rightarrow \underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)}_{n^2} + [2(n+1)-1] = (n+1)^2$

$L: n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$P: (n+1)^2$

$L = P$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,

- $n = 1 \Rightarrow L: 1^3 = 1 \quad P: \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4 = 1 \Rightarrow L = P$

- $\forall n \in \mathbb{N}: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \Rightarrow \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\frac{1}{4}n^2 \cdot (n+1)^2} + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2$

$L: \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \cdot \left[\frac{1}{4}n^2 + n + 1\right] = \frac{1}{4}(n+1)^2 \left[n^2 + 4n + 4\right]$

$= \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2$

$P: \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2$

$L = P$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: n^2 \geq 2n + 1$,

- $n = 3 \Rightarrow L: 9 \quad P: 7 \Rightarrow L \geq P \quad (9 \geq 7)$

- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: n^2 \geq 2n + 1 \Rightarrow (n+1)^2 \geq 2(n+1) + 1$

$\underbrace{n^2}_{\geq 2n+1} + 2n + 1 \geq (2n+1) + (2n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)^2 \geq 4n + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)^2 \geq 2(n+1) + \underbrace{2n}_{\geq 6} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)^2 \geq 2(n+1) + 1$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: 2^n \geq n^2$,

- $m = 4 \Rightarrow 2^4 \geq 4^2 \Rightarrow 16 \geq 16$ ✓
- $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 4: 2^m \geq m^2 \Rightarrow 2^{m+1} \geq (m+1)^2$

$$2^m \cdot 2 \geq m^2 \cdot 2 \geq (m+1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2^{m+1} \geq (m+1)^2$$

$$2m^2 \geq m^2 + 2m + 1$$

$$m^2 - 2m - 1 \geq 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$m_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$1-\sqrt{2}$ $\quad$ $1+\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$m \geq 1+\sqrt{2}$; $m \geq 4$ ✓

e) Pro libovolné přirozené číslo n je číslo $n^3 + 2n$ dělitelné třemi.

- $m = 1 \Rightarrow 3 \,|\, (1^3 + 2 \cdot 1) \Rightarrow 3 \,|\, 3$ ✓

čti: 3 je dělitelem (dělí) $1^3 + 2.1$

- $\forall m \in \mathbb{N}: 3 \,|\, (m^3 + 2m) \Rightarrow 3 \,|\, [(m+1)^3 + 2(m+1)]$

$$3 \,|\, [m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 2m + 2]$$

$$3 \,|\, [(m^3 + 2m) + (3m^2 + 3m + 3)]$$

$$\underbrace{3 \,|\, (m^3 + 2m)}_{\text{předpoklad ✓}} \quad \wedge \quad 3 \,|\, [3(m^2 + m + 1)] \text{ ✓}$$

2.2 Supremum a infimum množiny

Definice 2.1
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Každé číslo $k \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall x \in M: x \leq k,$$

nazýváme **horním odhadem** množiny M.

Existuje-li horní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **maximem** množiny M a značíme $\max M$.

Definice 2.2
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Existuje-li horní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **maximem** množiny M a značíme $\max M$.

Definice 2.3
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Nejmenší horní odhad množiny M nazýváme **supremem** množiny M a značíme $\sup M$.

Definice 2.4
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Každé číslo $l \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall x \in M: x \geq l,$$

nazýváme **dolním odhadem** množiny M.

Existuje-li dolní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **minimem** množiny M a značíme $\min M$.

Definice 2.5
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Existuje-li dolní odhad množiny M, který je prvkem množiny M, nazýváme jej **minimem** množiny M a značíme $\min M$.

Definice 2.6
Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Největší dolní odhad množiny M nazýváme **infimem** množiny M a značíme $\inf M$.

Příklad 2.2
Určete $\inf M$, $\sup M$ a v případě existence i $\min M$ a $\max M$:
a) $M = (-5; 7\rangle$,

$\inf M = -5$ $\min M$ neex.
$\sup M = 7$ $\max M = 7$

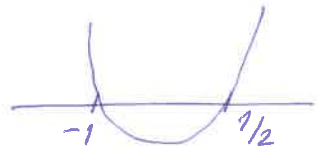
b) $M = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + x - 1 > 0\}$.

$2x^2 + x - 1 > 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \nearrow \frac{1}{2}, \searrow -1$



$x \in (-\infty; -1) \cup (1/2; \infty)$

$M = (-\infty; -1) \cup (1/2; \infty)$

min M neex. $\qquad$ inf $M = -\infty$

max M neex. $\qquad$ sup $M = \infty$

2.3 Rovnice a nerovnice - základní pojmy

Rovnice (nerovnice) je zápisem rovnosti (nerovnosti) hodnot dvou výrazů.

Hodnoty neznámých, po jejichž dosazení do rovnice (nerovnice) získáme pravdivý výrok, nazveme **kořeny** dané rovnice (nerovnice).

Množinu, ve které hledáme všechny kořeny rovnice, označíme O a nazveme ji **oborem řešení rovnice**. Množinu, která vznikne jako průnik množiny O a množin, ve kterých jsou definovány výrazy *na levé i pravé straně rovnice*, označíme D a nazveme ji **definiční obor rovnice**. **Množinu všech kořenů dané rovnice** označíme písmenem K. Obdobnou terminologii pak používáme i u nerovnic.

Ekvivalentní rovnice (nerovnice)
Dvě rovnice (nerovnice) nazveme ekvivalentní, právě když mají stejnou množinu kořenů.

Ekvivalentní úprava
Úpravu rovnice nazveme ekvivalentní úpravou, právě když tato úprava převede rovnici na rovnici jinou, s ní ekvivalentní. Obdobně definujeme ekvivalentní úpravy nerovnic.

Neekvivalentní (důsledková) úprava
Úpravu rovnice nazveme důsledkovou úpravou, právě když tato úprava převede rovnici na rovnici jinou, pro niž platí, že množina kořenu původní rovnice je podmnožinou množiny kořenů nové rovnice. (Při použití důsledkových úprav je nutné dělat zkoušku.)

Ekvivalentní úpravy rovnic jsou:

- přičtení téhož čísla, nebo výrazu obsahující neznámou, který je definovaný v celém O, k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definovaný a nenulový v celém O,
- umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné (nebo naopak záporné) v celém O.

Ekvivalentní úpravy nerovnic jsou:

- přičtení téhož čísla, nebo výrazu obsahující neznámou, který je definován na celém O, k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran nerovnice číslem, nebo výrazem s neznámou, který je definovaný a kladný, pro všechny hodnoty neznámé z O,
- vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem, nebo výrazem s neznámou, který je záporný a definovaný v celém O, přitom znak nerovnosti se mění v obrácený,
- umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nezáporné v celém oboru řešení nerovnice O,
- umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nekladné v celém O a současným otočením znaménka nerovnosti.

2.4 Kvadratické rovnice a nerovnice

Příklad 2.2

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$ ↗ $1/2$ ↘ -1

$\underline{\underline{K = \{-1; 1/2\}}}$

b) $2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1/2$

$|x| = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\underline{\underline{x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

c) $2x^2 + x = 0$

$x(2x+1) = 0$

$x_1 = 0; \; x_2 = -1/2 \implies \underline{\underline{K = \{-1/2; 0\}}}$

d) $9t^2 + 12t + 4 = 0$

$D = 144 - 144 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$

$\underline{\underline{K = \{-2/3\}}}$

e) $a^2 + a + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3$

$\underline{\underline{K = \emptyset}}$

Příklad 2.3

Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $a^2 + a + 1 = 0$.

$$D = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$K = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \, ; \, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}$$

Příklad 2.4

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{5}{x-2} - \frac{7}{x-1} = \frac{3}{3-x}$. $\quad x \neq 2; \; x \neq 1; \; x \neq 3$

$$5(x-1)(3-x) - 7(x-2)(3-x) = 3(x-2)(x-1)$$

$$5(3x - x^2 - 3 + x) - 7(3x - x^2 - 6 + 2x) = 3(x^2 - x - 2x + 2)$$

$$-5x^2 + 20x - 15 + 7x^2 - 35x + 42 = 3x^2 - 9x + 6$$

$$-x^2 - 6x + 21 = 0$$

$$D = 36 + 84 = 120$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{120}}{-2} = -3 \pm \sqrt{30}$$

$$K = \{ -3 - \sqrt{30} \, ; \, -3 + \sqrt{30} \}$$

Příklad 2.5

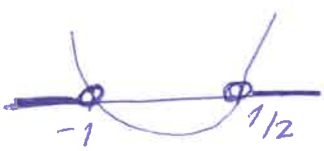
Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $2x^2 + x - 1 > 0$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{array}{l} \nearrow \ 1/2 \\ \searrow \ -1 \end{array}$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup (1/2; \infty)$$

b) $9t^2 + 12t + 4 \leq 0$

$D = 144 - 144 = 0$

$t = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$

$K = \{-2/3\}$

c) $9t^2 + 12t + 4 > 0$

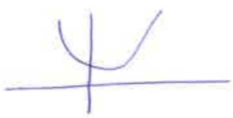
$K = (-\infty; -2/3) \cup (-2/3; \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$

d) $9t^2 + 12t + 4 < 0$

$K = \emptyset$

e) $a^2 + a + 1 > 0$

$D = 1 - 4 = -3$



$K = \mathbb{R}$

2.5 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Zápis $|a - b|$ můžeme interpretovat jako vzdálenost obrazu čísla a od obrazu čísla b.

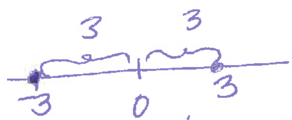
Příklad 2.6

Řešte v $\mathbb{R}$ dané rovnice a nerovnice.

a) $|x| = 3$

$|x - 0| = 3$

$x = \pm 3$



vzdálenost x od 0 je 3

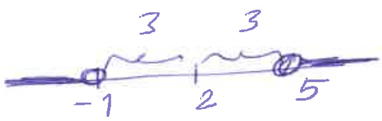
b) $|x| < 3$

$|x - 0| < 3$ vzdálenost x od 0 je menší než 3

$x \in (-3; 3)$

c) $|x - 2| > 3$

$x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$

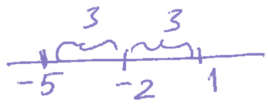


vzdálenost x od 2 je větší než 3

d) $|x+2| = 3$

$|x-(-2)| = 3$

$\underline{x \in \{-5; 1\}}$



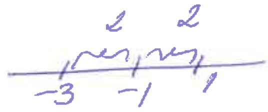
e) $|2x+2| = 4$

$2|x+1| = 4$

$|x+1| = 2$

$|x-(-1)| = 2$

$\underline{x \in \{-3; 1\}}$



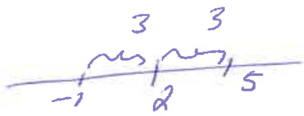
f) $|2-x| \geq 3$

$|-1 \cdot (x-2)| \geq 3$

$|-1| \cdot |x-2| \geq 3$

$|x-2| \geq 3$

$\underline{x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; \infty)}$



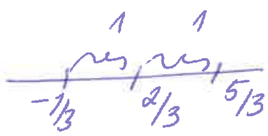
g) $|2-3x| \geq 3$

$|-3 \cdot (x-2/3)| \geq 3$

$|-3| \cdot |x-2/3| \geq 3$

$|x-2/3| \geq 1$

$\underline{x \in (-\infty; -1/3\rangle \cup \langle 5/3; \infty)}$



Příklad 2.7

Řešte v $\mathbb{R}$ dané rovnice a nerovnice.

a) $2x + |x| = 1 + |1 - x|$

nulové body: $(-\infty;0\rangle$, $(0;1\rangle$, $(1;\infty)$; body 0, 1

	$(-\infty;0\rangle$	$(0;1\rangle$	$(1;\infty)$
$\|x\|$	$-$	$+$	$+$
$\|1-x\|$	$+$	$+$	$-$

- $x \in (-\infty;0\rangle$

$2x - (x) = 1 + (1-x)$

$x = 2 - x$

$2x = 2$

$x = 1 \notin (-\infty;0\rangle \Rightarrow \underline{K_1 = \emptyset}$

- $x \in (0;1\rangle$

$2x + (x) = 1 + (1-x)$

$3x = 2 - x$

$4x = 2$

$x = 1/2 \in (0;1\rangle \Rightarrow \underline{K_2 = \{1/2\}}$

- $2x + (x) = 1 - (1-x)$

$3x = x$

$2x = 0$

$x = 0 \notin (0;1\rangle \Rightarrow \underline{K_3 = \emptyset}$

$\underline{\underline{K}} = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \underline{\underline{\{1/2\}}}$

b) $|x^2 - 2x| < x$

nulové body: $(-\infty;0\rangle$, $(0;2\rangle$, $(2;\infty)$; body 0, 2

	$(-\infty;0\rangle$	$(0;2\rangle$	$(2;\infty)$
$\|x^2-2x\|$	$+$	$-$	$+$

$x \in (-\infty;0\rangle \cup (2;\infty)$

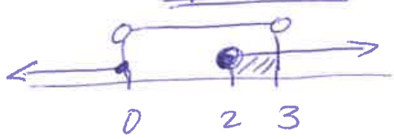
$(x^2 - 2x) < x$

$x^2 - 3x < 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$\underline{K_1 = (2;3)}$



$x \in (0;3) \wedge x \in (-\infty;0\rangle \cup (2;\infty)$

- $x \in (0;2\rangle$

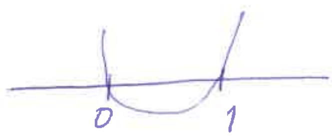
$-(x^2-2x) < x$

$x^2-2x > -x$

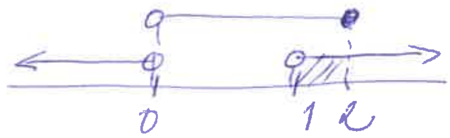
$x^2-x > 0$

$x^2-x = 0$

$x(x-1) = 0$



$x \in (-\infty;0) \cup (1;\infty) \ \cap \ x \in (0;2\rangle$



$K_2 = (1;2\rangle$

$K = K_1 \cup K_2 = (1;3)$