1 – Množiny a výroky (opakování ze SŠ)

1.1 Množiny

Definice 1.1
Množinou rozumějme soubor (souhrn) navzájem různých (rozlišitelných) matematických či jiných objektů. Jednotlivé objekty, které patří do dané množiny, se nazývají **prvky** množiny.

Zápis $a \in A$ znamená, že a je prvkem množiny A.
Zápis $a \notin A$ znamená, že a není prvkem množiny A.

Množiny zadáváme

- **výčtem prvků** (tj. do složených závorek; obsahuje-li množina A prvky a, b, c, píšeme $A = \{a, b, c\}$),
- **pomocí charakteristické vlastnosti** – zápis $B = \{x \in E: V(x)\}$ znamená, že množina B je tvořena prvky z množiny E a to pouze těmi, které mají vlastnost $V(x)$.

Množina, která neobsahuje žádný prvek se nazývá **prázdná množina** a označuje se $\emptyset$ nebo $\{\quad\}$.

Definice 1.2
Nechť A, B jsou množiny. Říkáme, že množiny A, B **jsou si rovny** a píšeme $A = B$, jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B a každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A.

Příklad 1.1
Rozhodněte, zda $A = B$.

a) Nechť $A = \{2,4,5\}$, $B = \{5,4,2\}$. $A = B$ ~ na pořadí nezáleží

b) Nechť $A = \{2,2\}$, $B = \{2\}$. $A = B$ ~ prvky se mohou opakovat a nic to nemění

Definice 1.3
Nechť A, B jsou množiny. Říkáme, že množina A **je podmnožinou** množiny B a píšeme $A \subset B$, jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.

Příklad 1.2
Najděte všechny podmnožiny množiny $A = \{1,2,3\}$.

$\emptyset$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}$

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

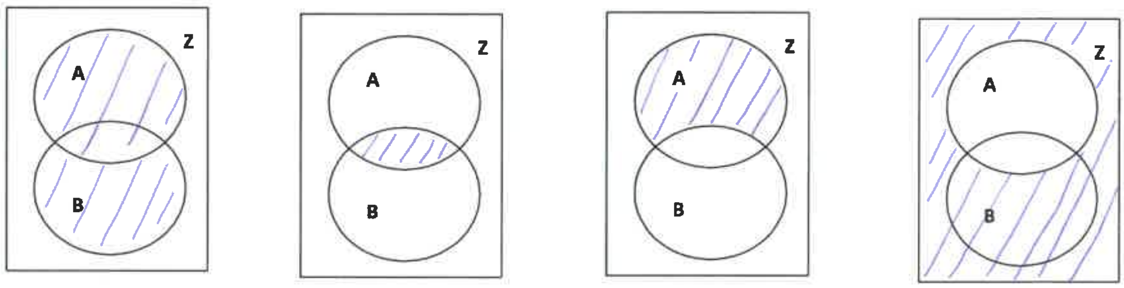
$\{1,2,3\}$

Základní množinové operace

název operace	**označení**
sjednocení	$A \cup B$
průnik	$A \cap B$
rozdíl	$A \setminus B$
doplněk	A'

Příklad 1.3

Vyšrafujte dané množiny ve Vennových diagramech.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ A'

Příklad 1.4

Nechť $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5\}$. *Určete* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 3\}$

$B \setminus A = \{5\}$

Početní pravidla pro operace s množinami

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ — komutativní zákony
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — asociativní zákon
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — asociativní zákon
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ — distributivní zákon
5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — distributivní zákon
6. $(A \cap B)' = A' \cup B', (A \cup B)' = A' \cap B'$ — de Morganovy zákony
7. $(A')' = A$
8. $A \setminus B = A \cap B'$

Číselné množiny

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$	přirozená čísla
$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0 - 1; 2; \dots\}$	celá čísla
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}\right\}$	racionální čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla
$\mathbb{R}^-$	záporná reálná čísla
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina reál. čísel, tj. $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	iracionální čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla

Příklad 1.5

Nechť $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \mathbb{N}$. *Určete* $A \cup B$, $A \cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

$A \cup B = \mathbb{N}$

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \setminus B = \emptyset$

$B \setminus A = \{x \in \mathbb{N} : x > 4\}$

1.2 Výroková logika

Definice 1.4

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé.

Mějme výrok A. Je-li A pravdivý, zapisujeme tuto skutečnost $p(A) = 1$, je-li A nepravdivý, píšeme $p(A) = 0$. Symboly $0, 1$ se nazývají **pravdivostní hodnoty**.

Definice 1.5

Negací výroku budeme rozumět takový výrok, který popírá pravdivost výroku původního. Negaci výroku A budeme značit $\neg \boldsymbol{A}$.

Definice 1.6

Obměna výroku A je výrok, který říká totéž co výrok A, ale jinými slovy.

říklad 1.6

Určete, zda lze dané věty považovat za výrok. V případě, že jde o výrok, určete jeho pravdivostní hodnotu a výrok negujte.

a) $V1$: Hradcem Králové protéká řeka Labe.
$p(V1)=1$ $\neg V1$: HK neprotéká řeka LABE.

b) $V2$: V kolik hodin odjíždí rychlík Pendolino z Prahy?
×

c) $V3$: Rychlík Pendolino odjíždí z Prahy v 16:15h.
× nehodnotitelné

d) $V4$: Kočka je bílá.
× nehodnotitelné

e) $V5$: Tato sklenice je plná.
$p(V5)=?$ $\neg V5$: Tato sklenice není plná.

f) $V6$: Ve vesmíru existuje planeta „obydlena" živými organismy. (tj. alespoň jedna)
$p(V6)=?$ $\neg V6$: Ve vesmíru neexistuje žádná planeta „obydlená" živ. org.

g) $V7: x < 5$
× nehodnotitelné

h) $V8: 4 < 5$
$p(V8)=1$; $\neg V8$: $4 \geq 5$

i) $V9: 4+5=10$
$p(V9)=0$; $\neg V9$: $4+5 \neq 10$

Jednotlivé výroky lze spojovat pomocí logických spojek:

název spojky	**označení**	**slovní vyjádření**
konjunkce	$A \wedge B$	A a zároveň B
disjunkce	$A \vee B$	A nebo B
implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A pak B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy, když B

Výrok obsahující logické spojky nazýváme **výrokem složeným**. Neobsahuje-li výrok logické spojky, nazývá se **výrok elementární**.

Definice 1.7
Mějme výroky A, B. Logické spojky, které spojují dva výroky, definujeme tabulkou pravdivostních hodnot vypsáním všech existujících kombinací.

Příklad 1.7

Doplňte následující tabulku pravdivostních hodnot.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Příklady na implikaci:

Když budou padat trakaře, zrušíme výuku.
Když nebudete dávat pozor, budu naštvaná.

Příklad 1.8

Doplněním tabulky pravdivostních hodnot dokažte, že platí

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B).$$

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg A \vee B)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

tautologie

Příklad 1.9

Doplněním tabulky pravdivostních hodnot dokažte, že platí následující vztahy pro negace.

1. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
2. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
3. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg(A \wedge B))$	$p(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

(1)

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg(A \vee B))$	$p(\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

(2)

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

Definice 1.8
Výroková forma je tvrzení obsahující proměnné, z něhož se stane výrok po dosazení konstant za proměnné.

Z výrokové formy lze vytvořit výrok také tak, že všechny proměnné ve formě vážeme nějakou omezující podmínku, jednoznačně specifikující jejich hodnoty. Tato podmínka se nazývá kvantifikátor. V matematice se nejčastěji používají dva kvantifikátory:

- **obecný kvantifikátor**, který se označuje ∀ a čte se „pro každé,
- **existenční kvantifikátor**, který se označuje ∃ a čte se „existuje alespoň jeden",
- **kvantifikátor jednoznačné existence**, který se označuje ∃! A čte se „existuje právě jeden".

Jak negovat výroky s kvantifikátory?

Řekněme, že obecný a existenční kvantifikátor jsou navzájem opačné kvantifikátory.

Pokud je před výrokovým vzorcem více kvantifikátorů, změníme při negování všechny tyto kvantifikátory na opačné a potom provedeme negaci výrokového vzorce.

Například: $\neg(\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: V(x)) = \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: \neg V(x)$.

Příklad 1.10
Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků a určete jejich negace. (nepoužívejte „není pravda, že...") Předpokládejte, že „velmi chytrý" = má IQ vyšší než 140 bodů.
a) V1: Všichni studenti jsou velmi chytří.

$p(V1) = 0$

$\neg V1$: Existuje alespoň jeden student, který není velmi chytrý.

b) V2: Existuje alespoň jeden člověk, který je velmi chytrý.

$p(V2) = 1$

$\neg V2$: Všichni lidé mají IQ nejvýše 140.

Příklad 1.11

Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků a určete jejich negace.

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

V	$p(V)$	$\neg V$
$\exists x \in \mathbb{R}: (x \geq 0) \vee (x^2 \geq 0)$	1	$\forall x \in \mathbb{R}: (x < 0) \wedge (x^2 < 0)$
$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: x \geq y$	0	$\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: x < y$
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: x \geq y$	1	$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: x < y$
$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: x \geq y$	0	$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: x < y$
$\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: x \geq y$	1	$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: x < y$
$\forall x \in \mathbb{R}: (x > 0) \Rightarrow (x^3 \geq 0)$	1	$\exists x \in \mathbb{R}: (x > 0) \wedge (x^3 < 0)$
$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}: (x \geq y) \Rightarrow (x^3 \geq y^3)$	1	$\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: (x \geq y) \wedge (x^3 < y^3)$

Výroková forma, která při dosazení libovolné kombinace pravdivostních hodnot nabývá pravdivostní hodnoty 1 se nazývá **tautologie**.

Příklad 1.12

Pomocí tabulky pravdivostních hodnot dokažte, že se jedná o tautologii:

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (vztah pro nepřímý důkaz)

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (vztah pro důkaz sporem)

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(\neg(A \wedge \neg B))$
1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1

a) b)

$p(A)$	$p(B)$	$p((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A))$	$p((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B))$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

1.3 logické výstavbě matematiky

Jednotlivé části této kapitoly jsou převzaty z [2].

Jak budovat vědeckou teorii?

1. Na počátku uvedeme **axiomy**, tj. výroky, jejichž pravdivost se předpokládá. V axiomech se vyskytují tzv. primitivní pojmy, které nedefinujeme. Axiomy vypovídají o primitivních pojmech vše, co je možné říci.
2. Pak následují **věty**, tj. pravdivé výroky, které lze odvodit pomocí pravidel logiky z axiomů nebo z vět předcházejících. Nedílnou součástí vět je jejich **důkaz**.
3. Další pojmy zavádíme pomocí definic, přičemž **definice** je vymezením obsahu a rozsahu nového pojmu.

Matematické důkazy

Věty mají tvar implikace $(\alpha \Rightarrow \beta)$ nebo ekvivalence $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$. Protože však lze každou ekvivalenci převést na implikaci, stačí se v důkazech soustředit na věty ve tvaru implikace.

Mějme větu $\alpha \Rightarrow \beta$, pak α jsou **předpoklady věty** a β jsou **tvrzení věty**. Slovně lze takovou větu vyjádříme některým z následujících způsobů:

- Nechť platí α. Potom platí β.
- Jestliže platí α, potom platí β.
- Když platí α, pak platí β.

Nedílnou součástí věty je její důkaz. **Důkazem** rozumíme logické deduktivní odvození výroku z jiných pravdivých výroků. Používáme následující typy důkazů: přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí.

Princip matematických důkazů:

- **Přímý důkaz** vychází z pravdivosti předpokladů α a má tvar řetězce na sebe navazujících implikací, tj.

$$\alpha \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \dots \Rightarrow \gamma_n \Rightarrow \beta.$$

- **Nepřímý důkaz** využívá vztahu

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha).$$

(viz příklad 1.11)

Vyjdeme z $\neg\beta$ a přímým důkazem dokážeme $\neg\alpha$.

$$\neg\beta \Rightarrow \delta_1 \Rightarrow \delta_2 \dots \Rightarrow \delta_n \Rightarrow \neg\alpha.$$

- **Důkaz sporem** využívá vztahu

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta).$$

(viz příklad 1.11)

Chceme ukázat, že není pravda, že platí α a zároveň neplatí β. Předpokládáme tedy současnou platnost α a $\neg\beta$ a postupně dojdeme k tzv. sporu. Spor je stav, kdy pro nějakou formuli γ ukážeme, že současně platí γ a $\neg\gamma$.

Příklad 1.13

Dokažte přímo, nepřímo i sporem, že $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{n \geq 2}_{A} \Rightarrow \underbrace{6n + 3 > 13}_{B}$.

přímý důkaz:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{n \geq 2}_{A} \Rightarrow 6n \geq 12 \Rightarrow 6n+3 \geq 15 \Rightarrow \underbrace{6n+3 > 13}_{B}$$

nepřímý důkaz:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{6n+3 \leq 13}_{\neg B} \Rightarrow 6n \leq 10 \Rightarrow n \leq \frac{10}{6} \Rightarrow \underbrace{n < 2}_{\neg A}$$

důkaz sporem:

$$\underbrace{(n \geq 2) \quad \land \quad (6n+3 \leq 13)}_{\text{SPOR!}}$$

$$6n \leq 10$$

$$n \leq \frac{10}{6} \quad \left(1\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\cancel{n < 2}$$