14. cvičení - Výpočet určitého integrálu (+ aplikace)

Určitý integral přiřazuje funkci číslo. Podle toho, co daná funkce znázorňuje, může mít výsledné číslo různý význam. Například:

- obsah rovinného obrazce,
- délka křivky,
- objem tělesa,
- celkový elektrický náboj rozložený na rovinném obrazci, ...

Definice 14.1

Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$.

Řekneme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná neboli že má určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle a; b\rangle$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $|S(f, D, \Xi) - I| < \varepsilon$.

Číslo I pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme $\int_a^b f(x)dx = I$.

Číslo a se nazývá dolní mez, číslo b horní mez, interval $\langle a; b\rangle$ integrační obor a funkce f integrand. Horní a dolní mez nazýváme společně integrační meze.

Věta 14.1

Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$. Nechť je na tomto intervalu splněna kterákoliv z následujících podmínek:

1) $f(x)$ je monotónní,
2) $f(x)$ je spojitá,
3) $f(x)$ je ohraničená a má konečný počet bodů nespojitosti.

Pak existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$.

Věta 14.2

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak také funkce $f(x) \pm g(x)$ a $cf(x)$, kde c je libovolná konstanta, jsou na tomto intervalu integrovatelné a platí:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

První vlastnost se nazývá **aditivita vzhledem k integrandu**, druhá **homogenita**.

Věta 14.3
Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a; b\rangle$ a $a < c < b$. Pak je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ právě když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a; c\rangle$ a $\langle c; b\rangle$. Přitom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx.$$

Této vlastnosti se říká **aditivita vzhledem k integračnímu oboru**.

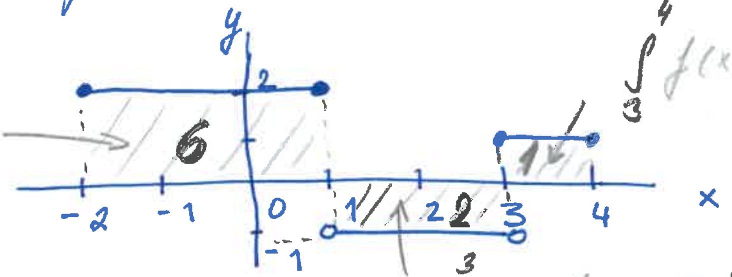
Příklad 14.1

Vypočtěte $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & pro\ x \in \langle -2; 1\rangle, \\ -1 & pro\ x \in (1; 3), \\ 1 & pro\ x \in \langle 3; 4\rangle. \end{cases}$$

Geometrický význam integrálu určitého: "plocha pod křivkou"

$$S_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$



$$\int_3^4 f(x)\,dx = S_3$$

$$-\int_1^3 f(x)\,dx = S_2$$

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{4} f(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-2}^{1} 2\,dx}_{S_1} + \underbrace{\int_{1}^{3} (-1)\,dx}_{-S_2} + \underbrace{\int_{3}^{4} 1\,dx}_{S_3} =$$

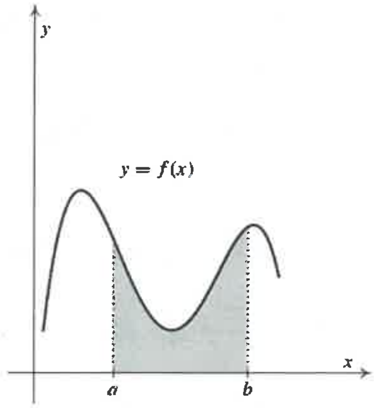
$$= 6 - 2 + 1 = \underline{\underline{5}}$$

Věta 14.4 (Newtonova-Leibnitzova formule)
Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce. Pak platí, že:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Poznámka: Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžilo označení $[F(x)]_a^b$, proto obvykle píšeme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$



Geometrická interpretace Newtonova-Leibnitzova vzorce (převzato z [2])

Příklad 14.2

S využitím Newtonova-Leibnitzova vztahu určete:

a) $\int_1^2 x^4 dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{5}\left[x^5\right]_1^2 = \frac{1}{5}\left(2^5 - 1^5\right) = \underline{\underline{\frac{31}{5}}}$

(*) $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5$

b) $\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\left[(1+x^2)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3}\right) = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{5} - \sqrt{8}}{3}}}$

(*) $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} =$

$= \frac{1}{3}t^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$

c) $\int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2+2} + \frac{x}{x^2+2}\right) dx$ $= \left[\sqrt{x^2+3} - 2\cdot\ln|x+1| + 2\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\ln(x^2+2)\right]_1^2 =$

$$= \left(\sqrt{7} - 2\cdot\ln 3 + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln 6\right) -$$

$$- \left(\sqrt{4} - 2\cdot\ln 2 + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln 3\right) =$$

$$= \sqrt{7} - 2 + 2\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 9 +$$

$$+ \ln\sqrt{6} + \ln 4 - \ln\sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{7} - 2 + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \underbrace{\frac{4\sqrt{6}}{9\sqrt{3}}}_{\frac{4\cdot\sqrt{2}}{9}}$$

- $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+3 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2+3}$$

- $$\int \frac{2}{x+1}\,dx = 2\cdot\int\frac{1}{x+1}\,dx = 2\cdot\ln|x+1|$$

- $$\int \frac{4}{x^2+2}\,dx = \frac{4}{2}\cdot\int\frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx = 2\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \\ \sqrt{2}\,dt = dx \end{array} \right| =$$
$$= 2\cdot\sqrt{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg} t =$$
$$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

- $$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$$

14.1 Metoda per partes pro určitý integrál

Věta 14.5
Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Příklad 14.3

a) $\int_1^2 (x^2+1)\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^2+1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^3}{3}+x \end{array} \right| = \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot \ln x\right]_1^2 -$

$- \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}+1\right) dx = \frac{14}{3}\cdot \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}+1\right) dx =$

$= \frac{14}{3}\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}+x\right]_1^2 = \frac{14}{3}\ln 2 - \left(\frac{26}{9} - \frac{10}{9}\right) =$

$= \underline{\underline{\frac{14}{3}\ln 2 - \frac{16}{9}}}$

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{array} \right| =$

$= \left[-x^2\cdot \cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cdot \cos x\,dx = \left(-\pi^2\cdot(-1) + 0^2\cdot 1\right) + 2\int_0^\pi x\cdot\cos x\,dx =$

$= \pi^2 + 2\cdot\int_0^\pi x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| =$

$= \pi^2 + 2\left[x\cdot \sin x\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x\,dx =$

$= \pi^2 + 2\underbrace{(\pi\cdot 0 - 0\cdot 0)}_{0} - 2\left[-\cos x\right]_0^\pi = \pi^2 - 2(1+1) =$

$= \underline{\underline{\pi^2 - 4}}$

c) $\int_0^1 V^2 e^{-\frac{V}{2}}\,dV = \left| \begin{array}{ll} u = \cancel{e^{-V/2}}\, V^2 & v' = \cancel{V}\, e^{-V/2} \\ u' = 2V & v = -2e^{-V/2} \end{array} \right| =$ $\swarrow du^{(*)}$

$$= \underbrace{\left[-2V^2 e^{-V/2}\right]_0^1}_{-2e^{-1/2}} + 4\int_0^1 V\cdot e^{-V/2}\,dV = \left| \begin{array}{ll} u = V & v' = e^{-V/2} \\ u' = 1 & v = -2e^{-V/2} \end{array} \right| =$$

$$= -2e^{-1/2} + 4\underbrace{\left[-2Ve^{-V/2}\right]_0^1}_{-8e^{-1/2}} + 8\int_0^1 e^{-V/2}\,dV =$$

$$= -10e^{-1/2} - 8\cdot 2\left[e^{-V/2}\right]_0^1 = -10e^{-1/2} - 16\left(e^{-1/2} - 1\right) =$$

$$= \underline{\underline{16 - 26e^{-1/2}}}$$

$$(*)\ \int e^{-V/2}\,dV = \left| \begin{array}{l} t = -V/2 \\ dt = -1/2\,dV \\ -2dt = dV \end{array} \right| = -2\int e^t\,dt = -2e^t = -2e^{-V/2}$$

14.2 Substituční metoda pro určitý integrál

Věta 14.6

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$, $\alpha < \beta$, derivaci $\varphi'(x)$, která je na intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$ integrovatelná. Dále nechť platí $a \le \varphi(x) \le b$ pro $x \in \langle \alpha; \beta\rangle$. Pak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Příklad 14.4

a) $\int_\pi^{2\pi} e^{\sin x} \cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int_0^0 e^t\,dt = \underline{\underline{0}}$

x	π	2π
t	$\sin\pi = 0$	$\sin 2\pi = 0$

b) $\int_0^1 x(x^2-1)^3\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array}\right| = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} t^3\,dt =$

x	0	1
t	-1	0

$$= \frac{1}{8}\left[t^4\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{8}(0-1) = -\frac{1}{8}$$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{t-1}{t+1}\cdot 2t\,dt =$

x	1	4
t	1	2

$$= 2\int_1^2 \frac{t^2-t}{t+1}\,dt = 2\int_1^2 \left(t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} - 2t + 2\cdot \ln|t+1|\right]_1^2 = \left[t^2 - 4t + 4\ln|t+1|\right]_1^2 =$$

$$= 4-8+4\cdot\ln 3 - (1-4+4\ln 2) = -1+4\cdot\ln\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{l} (t^2-t):(t+1) = t-2+\frac{2}{t+1} \\ \underline{-(t^2+t)} \\ \quad -2t \\ \underline{-(-2t-2)} \\ \qquad 2 \end{array}$$

14.3 Geometrické aplikace určitého integrálu

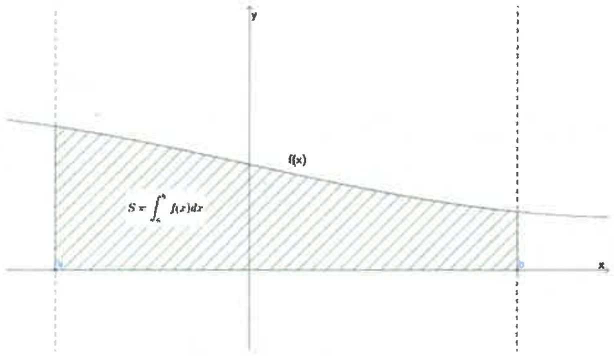
Věta 14.7
Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, integrovatelná a **nezáporná**. Pak pro obsah množiny $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$S(A) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta 14.8
Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$. Pak pro obsah množiny $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$S(B) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

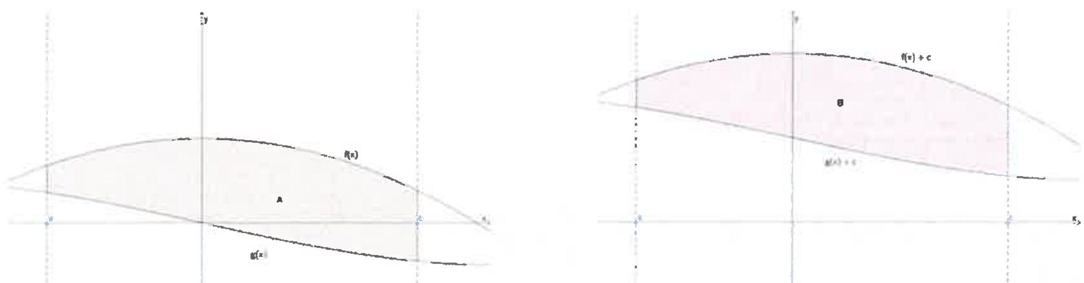
Je-li funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)dx$ udává obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.



Geometrická interpretace určitého integrálu

Naším úkolem je určit obsah množiny A (části roviny), která je ohraničena přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g.

Předpokládejme, že funkce f a g jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ integrovatelné a platí, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a; b\rangle$. Pak si množinu A lze představit jako plochu na obrázku (a).



(a) (b)

Množiny A a množina B

Je zřejmé, že pokud grafy funkcí f a g posuneme o konstantu c ve směru osy y, pak se obsah množiny B, která je ohraničená grafy funkcí $f + c$, $g + c$ a přímkami $x = a$ a $x = b$ bude stejný jako obsah původní množiny A, tj. $S(A) = S(B)$ – viz obr. (a), (b).

Příklad 14.5

Vypočtěte obsah množiny K ohraničené grafy funkcí $g: y = x^2 + x - 3$ a $f: y = -x^2 - 2x + 2$.

$g: y = x^2 + x - 3 \sim$ parabola $\cup$

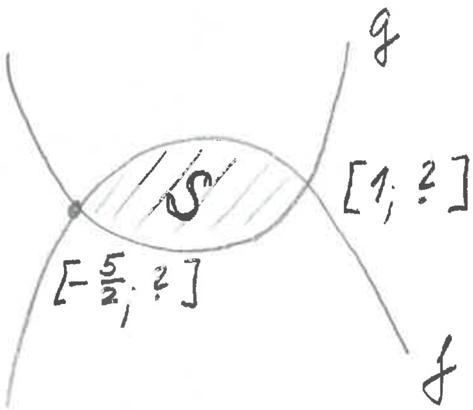
$f: y = -x^2 - 2x + 2 \sim$ parabola $\cap$

<u>průsečíky</u>: $x^2 + x - 3 = -x^2 - 2x + 2$

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$D = 9 + 40 = 49$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4}$ $\nearrow x_1 = 1$, $\searrow x_2 = -\frac{5}{2}$



$$S = \int_{-5/2}^{1} \Big(\underbrace{(-x^2 - 2x + 2)}_{f(x)} - \underbrace{(x^2 + x - 3)}_{g(x)} \Big)\, dx =$$

$$= \int_{-5/2}^{1} (-2x^2 - 3x + 5)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \right]_{-5/2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5 \right) - \left(+ \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{125}{\cancel{8}_4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{4} - \frac{25}{2} \right) =$$

$$= \frac{-4 - 9 + 30}{6} - \frac{250 - 225 - 300}{24} = \frac{17}{6} + \frac{\overset{275}{\cancel{325}}}{24} = \underline{\underline{\frac{343}{24}}}$$

Věta 14.9 (O délce křivky)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro délku jejího grafu G platí

$$l(G) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad 14.6

Určete délku grafu G funkce $f: y = \ln x, x \in \langle\sqrt{3}; \sqrt{15}\rangle$.

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, x\, dx = \left/ \begin{array}{l} t^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t^2-1 \\ 2t\,dt = 2x\,dx \\ t\,dt = x\,dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & \sqrt{3} & \sqrt{15} \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right/ =$$

$$= \int_2^4 \frac{t}{t^2-1}\cdot t\, dt = \int_2^4 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\, dt = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= [t]_2^4 + \int_2^4 \frac{1}{(t-1)(t+1)}\, dt = 2 + \int_2^4 \left(\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2 + \left[\tfrac{1}{2}\cdot \ln|t-1| - \tfrac{1}{2}\ln|t+1|\right]_2^4 =$$

$$= 2 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot \ln 3 - \tfrac{1}{2}\cdot\ln 5\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot\underbrace{\ln 1}_{0} - \tfrac{1}{2}\cdot \ln 3\right) =$$

$$= \cancel{2 + \ln \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \quad \underline{\underline{2 + \ln 3 - \tfrac{1}{2}\ln 5}}$$

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

dosadíme: $t = -1:\quad 1 = A\cdot 0 + B\cdot(-2) \Rightarrow B = -1/2$

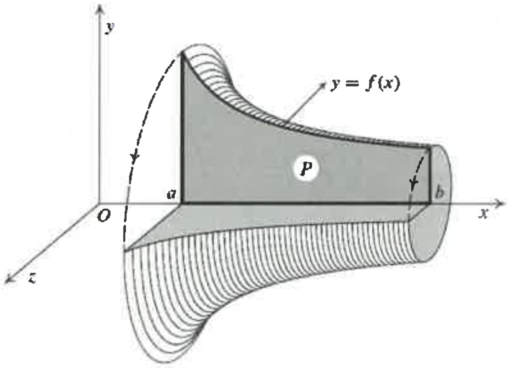
$t = 1:\quad 1 = A\cdot 2 + B\cdot 0 \Rightarrow A = 1/2$

Věta 14.10 (O objemu rotačního tělesa)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a;b\rangle$, $a<b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro objem rotačního tělesa V, které vzniklo rotací křivočarého obdelníku $P=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ platí

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

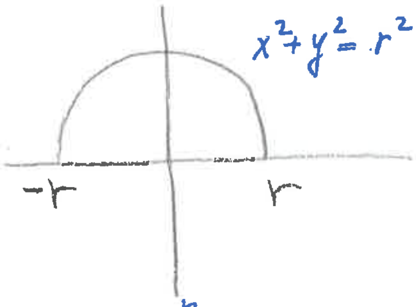
Věta 14.11 (O obsahu pláště rotačního tělesa)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a;b\rangle$, $a<b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro obsah pláště rotačního tělesa V, které vzniklo rotací křivočarého obdelníku $P=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ platí

$$Q=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$



Rotační těleso (převzato z [2])

Příklad 14.7
Odvoďte vztahy pro objem koule a obsah kulové plochy o poloměru $r>0$.



$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y=\sqrt{r^2-x^2}$$

$$V=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$

$$=\pi\cdot\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right]=\pi\left(2r^3-\frac{2}{3}r^3\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$1+(f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2}$$

$$\underline{\underline{S}} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} r\, dx =$$

$$= 2\pi r \,[x]_{-r}^{r} = 2\pi r \cdot (r-(-r)) = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

POZOR! $f'(x)$ není def. v $\pm r$

• Správně bychom měli řešit na $\langle -r+\delta; r+\delta \rangle$, kde $\delta > 0$.