14. cvičení - Výpočet určitého integrálu (+ aplikace)

Určitý integral přiřazuje funkci číslo. Podle toho, co daná funkce znázorňuje, může mít výsledné číslo různý význam. Například:

- obsah rovinného obrazce,
- délka křivky,
- objem tělesa,
- celkový elektrický náboj rozložený na rovinném obrazci, …

Definice 14.1
Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$.
Řekneme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná neboli že má určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle a; b\rangle$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $|S(f, D, \Xi) - I| < \varepsilon$.

Číslo I pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme $\int_a^b f(x)dx = I$.

Číslo a se nazývá dolní mez, číslo b horní mez, interval $\langle a; b\rangle$ integrační obor a funkce f integrand. Horní a dolní mez nazýváme společně integrační meze.

Věta 14.1
Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$. Nechť je na tomto intervalu splněna kterákoliv z následujících podmínek:

1) $f(x)$ je monotónní,
2) $f(x)$ je spojitá,
3) $f(x)$ je ohraničená a má konečný počet bodů nespojitosti.

Pak existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$.

Věta 14.2
Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak také funkce $f(x) \pm g(x)$ a $cf(x)$, kde c je libovolná konstanta, jsou na tomto intervalu integrovatelné a platí:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

První vlastnost se nazývá **aditivita vzhledem k integrandu**, druhá **homogenita**.

Věta 14.3
Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a; b\rangle$ a $a < c < b$. Pak je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ právě když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a; c\rangle$ a $\langle c; b\rangle$. Přitom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx.$$

Této vlastnosti se říká **aditivita vzhledem k integračnímu oboru**.

Příklad 14.1

Vypočtěte $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$, kde

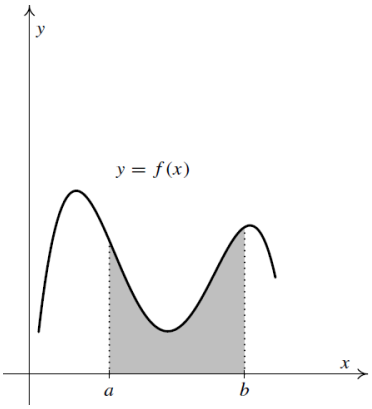
$$f(x) = \begin{cases} 2 & pro\ x\ \in \langle -2; 1\rangle, \\ -1 & pro\ x\ \in (1; 3), \\ 1 & pro\ x\ \in \langle 3; 4\rangle. \end{cases}$$

Věta 14.4 (Newtonova-Leibnitzova formule)
Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce. Pak platí, že:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Poznámka: Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžilo označení $[F(x)]_a^b$, proto obvykle píšeme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$



Geometrická interpretace Newtonova-Leibnitzova vzorce (převzato z [2])

Příklad 14.2

S využitím Newtonova-Leibnitzova vztahu určete:

a) $\int_1^2 x^4 dx$

b) $\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx$

c) $\int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x^2+2} + \frac{x}{x^2+2} \right) dx$

14.1 Metoda per partes pro určitý integrál

Věta 14.5

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Příklad 14.3

a) $\int_1^2 (x^2+1)\,ln\,x\,dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2\,sin\,x\,dx$

c) $\int_0^1 V^2 e^{-\frac{V}{2}}\,dV$

14.2 Substituční metoda pro určitý integrál

Věta 14.6
Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, $a<b$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu $\langle \alpha;\beta\rangle$, $\alpha<\beta$, derivaci $\varphi'(x)$, která je na intervalu $\langle \alpha;\beta\rangle$ integrovatelná. Dále nechť platí $a\le\varphi(x)\le b$ pro $x\in\langle \alpha;\beta\rangle$. Pak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Příklad 14.4

a) $\int_\pi^{2\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$

b) $\int_0^1 x(x^2-1)^3\,dx$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

14.3 Geometrické aplikace určitého integrálu

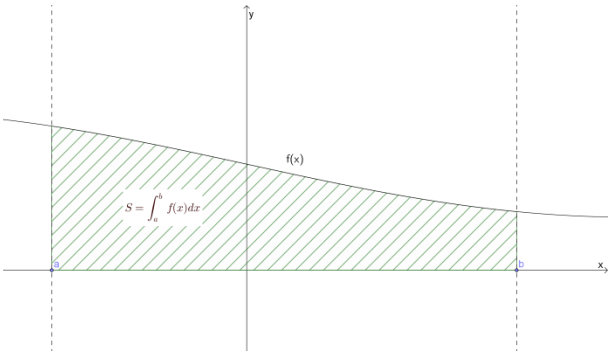
Věta 14.7
Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, integrovatelná a **nezáporná**. Pak pro obsah množiny $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$S(A) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta 14.8
Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$. Pak pro obsah množiny $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$S(B) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

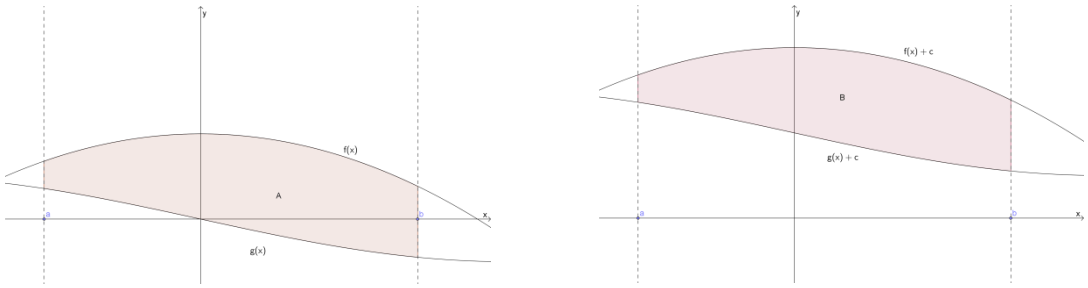
Je-li funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)dx$ udává obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.



Geometrická interpretace určitého integrálu

Naším úkolem je určit obsah množiny A (části roviny), která je ohraničena přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g.

Předpokládejme, že funkce f a g jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ integrovatelné a platí, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a; b\rangle$. Pak si množinu A lze představit jako plochu na obrázku (a).



(a) (b)

Mnnožiny A a množina B

Je zřejmé, že pokud grafy funkcí f a g posuneme o konstantu *c* ve směru osy y, pak se obsah množiny B, která je ohraničená grafy funkcí $f + c$, $g + c$ a přímkami $x = a$ a $x = b$ bude stejný jako obsah původní množiny A, tj. $S(A) = S(B)$ – viz obr. (a), (b).

Příklad 14.5

Vypočtěte obsah množiny K ohraničené grafy funkcí $g: y = x^2 + x - 3$ a $f: y = -x^2 - 2x + 2$.

Věta 14.9 (O délce křivky)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro délku jejího grafu G platí

$$l(G) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad 14.6

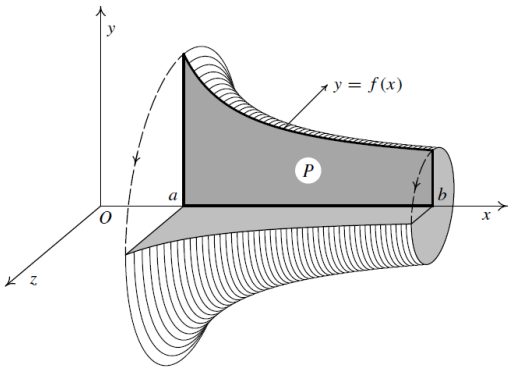
Určete délku grafu G funkce $f: y = \ln x, x \in \langle\sqrt{3}; \sqrt{15}\rangle$.

Věta 14.10 (O objemu rotačního tělesa)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro objem rotačního tělesa V, které vzniklo rotací křivočarého obdelníku $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Věta 14.11 (O obsahu pláště rotačního tělesa)
Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b\rangle$, $a < b$, a je na tomto intervalu spojitá. Pak pro obsah pláště rotačního tělesa V, které vzniklo rotací křivočarého obdelníku $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ platí

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Rotační těleso (převzato z [2])

Příklad 14.7

Odvoďte vztahy pro objem koule a obsah kulové plochy o poloměru $r > 0$.