12. cvičení - Úlohy týkající se rozkladu rac. lomené funkce na parc. zlomky

12.1 Polynomy

Definice 12.1

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Funkci

$$P: y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$$

Nazýváme **reálný polynom (mnohočlen)**. Čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty polynomu** P a n **stupeň polynomu** P.

Příklady polynomů:

- $P_1: y = 3x^3 - 1$ ... polynom stupně 3,
- $P_2: y = 7x^4 + 3x^2 - 1$ ... polynom stupně 4,
- $P_3: y = 4$ ... polynom stupně 0.

Definice 12.2

Funkce R daná předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P je polynom a Q je nenulový polynom se nazývá **racionální lomenná funkce**.

Říkáme, že funkce R je **ryze lomenná**, jestliže stupeň polynomu P je nižší než stupeň polynomu Q. Je-li stupeň polynomu P stejný nebo vyšší než stupeň polynomu Q, mluvíme o **neryze lomenné** funkci.

Příklady racionálně lomenných funkcí:

- $R_1: y = \frac{3x^3-1}{7x^4+3x^2-1}$ ... ryze lomenná racionální funkce
- $R_2: y = \frac{3x^5-1}{7x^4+3x^2-1}$ ... neryze lomenná racionální funkce

Příklad 12.1

Vyjádřete neryze lomenou racionální funkci f jako součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce.

$$f: y = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

$$(2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4) : (x^4 - 3x^2 + 2x - 1) = 2x^2 - 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

$$-(2x^6 - 6x^4 + 4x^3 - 2x^2)$$

$$-3x^4 + 10x^2 - 7x + 4$$

$$-(-3x^4 + 9x^2 - 6x + 3)$$

$$x^2 - x + 1$$

POZOR! Dělenec i dělitele nutno seřadit dle mocnin x.

12.2 Rozklad polynomu na součin

Definice 12.3
Kořenem polynomu P rozumíme libovolnou komplexní číslo α takové, že $P(\alpha) = 0$.

Definice 12.4
Jsou-li $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ navzájem různé kořeny polynomu P_n a $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$, pak tvar polynomu

$$P_n\colon y = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2}\cdot \dots \cdot (x-\beta_s)^{k_s}$$

Nazýváme **rozklad polynomu P_n na součin kořenových činitelů v komplexním oboru**. Číslům $k_1, k_2, \dots, k_s$ říkáme **násobnosti kořenů** $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Platí $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Věta 12.1
Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

- Polynom stupně 1 má právě jeden kořen.
  $P\colon y = 2$ ... kořen 2

- Polynom stupně 2 má právě dva komplexní kořeny, přičemž každý počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost.
  $P\colon y = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ ... kořeny: 1, -2
  $P\colon y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ... dvojnásobný kořen 1
  $P\colon y = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ ... kořeny: $i, -i$

- Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.
  - $P\colon y = x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$ ... kořeny: $0, i, -i$
  - $P\colon y = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$ ... kořeny: $0, 1, -1$

- Má-li polynom komplexní kořen $x = \alpha + \beta i$, má i komplexně sdružený kořen $x = \alpha - \beta i$, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

  Roznásobíme-li kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům $\alpha \pm \beta i$, dostáváme

  $$[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

  To je kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$.

Věta 12.2

Je-li polynom $P_n(x)$ stupně $n, n \geq 1$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ všechny jeho kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_s$ a označíme-li $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_rx + q_r$ všechny kvadratické trojčleny odpovídající všem různým dvojicím komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $l_1, l_2, \dots, l_r$, dostaneme

$$P_n(x) = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-\beta_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_rx+q_r)^{l_r}.$$

Tento tvar polynomu nazýváme **rozklad polynomu na součin ireducibilních (nerozložitelných) kořenových činitelů v reálném oboru.**

Příklad 12.2

Rozložte polynom $P_5(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních kořenových činitelů v reálném oboru, víte-li, že jeden kořen je $x = -\frac{1}{2}$.

$x = -\frac{1}{2}$ ... kořen $\Rightarrow P_5(x) = (x+\frac{1}{2}) \cdot \underline{\quad ? \quad} = (x+\frac{1}{2})(2x^4+4x^2+2) = *$

$$(2x^5+x^4+4x^3+2x^2+2x+1) : (x+\tfrac{1}{2}) = 2x^4+4x^2+2$$
$$-(2x^5+x^4)$$
$$4x^3+2x^2+2x+1$$
$$-(4x^3+2x^2)$$
$$2x+1$$
$$-(2x+1)$$
$$0$$

$*)\; P_5(x) = (x+\frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot (x^4+2x^2+1) = \underline{\underline{2 \cdot (x+\frac{1}{2})(x^2+1)^2}}$

12.3 Rozklad na parciální zlomky

Věta 12.3

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomenná funkce s reálnými koeficienty a nechť $Q(x) = \dots \cdot (x-\alpha)^k \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^j \cdot \dots$, pak

$$R(x) = \dots \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j} + \dots,$$

Kde $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_j, C_1, \cdots, C_j \in \mathbb{R}$.

Postup nalezení koeficientů rozkladu [2]

1. Nejprve se přesvědčíme, že zadaná funkce je ryze lomenná. Pokud tomu tak není, převedeme ji dělením na součet polynomu a racionální ryze lomenné funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
2. Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.
3. Podle tohoto rozkladu napíšeme předpokládaný tvar rozkladu na parciální zlomky s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomenné funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu získaného v bodě 2.
4. Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů. Na jedné straně rovnice je mnohočlen se známými koeficienty, na druhé straně mnohočlen s neznámými koeficienty.
5. Dva mnohočleny jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají stejné koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, která má vzhledem k jednoznačnosti rozkladu právě jedno řešení.
6. Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice a tím dostat hned některé koeficienty. Pak stačí porovnat koeficienty jen u některých mocnin neznámé (tak, abychom dostali potřebný počet rovnic pro ty koeficienty, jejichž hodnoty ještě nemáme).

Příkad 12.3

Rozložte na parciální zlomky:

a) $R(x)=\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \quad x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)\cancel{(x^2+1)}\,x = A(x^2+1) + \underbrace{Bx^2 + Cx}\cancel{B(x^3+x)+C(x^2+1)}$$

• 1 reálný kořen $\Rightarrow$ 1 koeficient lze získat dosazením

dosadíme $x=0$: $1 = A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 0 \Rightarrow \underline{1=A}$

• potřebujeme 2 rovnice

x^2: $0 = A + B \Rightarrow \underline{B} = -A = \underline{-1}$ (srovnáme koef. u x^2)

x^1: $\underline{1 = C}$ (srovnáme koef. u x)

$$\underline{\underline{R(x)}} = \frac{x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{(-1)x+1}{x^2+1} = \underline{\underline{\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}}}$$

b) $R(x)=\frac{x^2+x+1}{x^4-1} = \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$$x^2+x+1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) =$$

$$= A(x^3+x+x^2+1) + B(x^3+x-x^2-1) + C(x^3-x) + D(x^2-1) =$$

$$= A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + C(x^3-x) + D(x^2-1)$$

• 2 reálné kořeny jmenovatele ⇒ dosadíme:

$x = 1 \Rightarrow 1^2 + 1 + 1 = A \cdot 4 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 \Rightarrow 3 = 4A \Rightarrow \underline{A = 3/4}$

$x = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 1 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot (-4) + C \cdot 0 + D \cdot 0 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow \underline{B = -1/4}$

• Chybí nám 2 koeficienty ⇒ potřebujeme 2 rovnice

$x^3:\ 0 = A + B + C \Rightarrow \underline{C} = -A - B = -3/4 + 1/4 = -2/4 = \underline{-1/2}$

$x^2:\ 1 = A - B + D \Rightarrow \underline{D} = 1 - A + B = 1 - 3/4 - 1/4 \ \underline{= 0}$

$$\underline{\underline{R(x)}} = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{3/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/2 \cdot x}{x^2 + 1}}}$$

c) $R(x) = \frac{x^4 - x + 1}{x^3 - 1}$

• Převod na ryze lomenou f-ci

$$(x^4 - x + 1) : (x^3 - 1) = x + \frac{1}{x^3 - 1}$$
$$\underline{-(x^4 - x)}$$
$$1$$

$$\Rightarrow R(x) = x + \frac{1}{x^3 - 1} = x + \frac{1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = x + \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

• $\cancel{x^4 - x}$ $1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = A(x^2 + x + 1) + B(x^2 - x) + C(x - 1)$

• 1 reálný kořen ⇒ dosadíme

$x = 1 \Rightarrow 1 = A + B \cdot 0 + C \cdot 0 \Rightarrow \underline{A = 1}$

• Chybí 2 koeficienty ⇒ potřebujeme 2 rovnice

$x^2:\ 0 = A + B \Rightarrow \underline{B} = -A = \underline{-1}$

$x:\ 0 = -A - B + C \Rightarrow \underline{C} = A + B = 1 - 1 \underline{= 0}$

$$\underline{\underline{R(x)}} = \underline{\underline{x + \frac{1}{x - 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1}}}$$

d) $R(x) = \frac{-3x^3+25x^2-32x-2}{(x-1)^2(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x+3)}$

- Jmenovatel $R(x)$ má reálné kořeny $\Rightarrow$ dosadíme

$$-3x^3+25x^2-32x-2 = A(x-1)(x-2)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) +$$
$$+ D(x-1)^2\cdot(x-2)$$

$x=1$: $-3+25-32-2 = A\cdot 0 + B\cdot(-4) + C\cdot 0 + D\cdot 0 \Rightarrow$

$$-12 = -4B$$
$$\underline{B = 3}$$

$x=+2$: ~~3+25+32-2 =~~

$$3\cdot(-8)+100-64-2 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 5 + D\cdot 0$$
$$10 = 5C$$
$$\underline{C = 2}$$

$x=-3$: $(-3)\cdot(-27)+25\cdot 9+96-2 = A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0 + D\cdot(-80)$

$$81 + 225 + 96 - 2 = -80D$$
$$400 = -80D$$
$$\underline{D = -5}$$

- Chybí nám 1 koef. $\Rightarrow$ stačí 1 rovnice

x^3: $-3 = A + C + D \Rightarrow \underline{A} = -3 - D - C =$
$$= -3+5-2 = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{R(x)}} = \underline{\underline{\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2} - \frac{5}{x+3}}}$$

12.4 Integrace racionální lomenné funkce

Každou racionální lomenou funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \underbrace{R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_s(x)}_{\text{parciální zlomky}}$$

Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$ jsou tyto funkce spojité, takže k nim existuje primitivní funkce a platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)\,dx + \int R_1(x)dx + \cdots + \int R_s(x)dx.$$

Integraci základních typů parciálních zlomků si vyzkoušíme v následujícím příkladu.

Příklad 12.4

a) $\int \frac{3}{x-7}dx = 3\cdot \ln|x-7|$ $\quad$ (dle $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$)

nebo

$$\int \frac{3}{x-7}dx = \left| \begin{array}{l} t = x-7 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{3}{t}dt = 3\cdot \ln|t| = 3\cdot \ln|x-7|$$

b) $\int \frac{5}{(x-1)^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{5}{t^2}dt = -5t^{-1} = \frac{-5}{t} = -\frac{5}{x-1}$

c) $\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2}dx \\ 2dt = dx \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{4}\cdot \int \frac{1}{t^2+1}\cdot 2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, t =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

d) $\int \frac{3x+7}{x^2+2}dx$ $= \underbrace{\int \frac{3x}{x^2+2}\,dx}_{(*)} + \underbrace{\int \frac{7}{x^2+2}\,dx}_{(**)} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$

$$(*)\ \int \frac{3x}{x^2+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{t}\,dt = \frac{3}{2}\cdot\ln|t| = \frac{3}{2}\ln(x^2+2)$$

$$(**)\ \int \frac{7}{x^2+2}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}}dx \\ \sqrt{2}\,dt = dx \end{array} \right| = \frac{7}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$$

e) $\int \frac{1}{x^2+2x+10}dx$

$x^2+2x+10=0$ nemá reálné kořeny $(D<0)$ $\Rightarrow$ doplníme na čtverec

$$\underbrace{x^2+2x}_{B=1}+10 = \underbrace{x^2+2x+1-1}_{+B^2-B^2}+10 = (x+1)^2+9$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\cdot\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{9}+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x+1}{3} \\ dt = \frac{1}{3}dx \\ 3\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\int \frac{3}{t^2+1}\,dt = \frac{3}{9}\cdot\operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

f) $\int \frac{5x+1}{\underbrace{x^2+x+1}} dx$

nemá reálné kořeny

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x+1} dx = \underbrace{\int \frac{5x}{x^2+x+1} dx}_{(*)} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1} dx}_{(**)} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(*)\ \int \frac{5x}{x^2+x+1} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+x+1 \\ dt = 2x+1 \end{matrix} \right| = 5\cdot\int \frac{x}{x^2+x+1} dx =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{5}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1} dx}_{(**)}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{2}\int \frac{1}{t} dt}_{\frac{5}{2}\ln|t| = \frac{5}{2}\cdot\ln(x^2+x+1)} - \underbrace{\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} dx}_{-\frac{5}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$(**)\ \int \frac{1}{x^2+x-1} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\int \frac{1}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{3/4}+1} dx =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1} dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{matrix} \right| = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg} t = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{3}\right)$$

Doplnění na čtverec: $x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

Příklad 12.5

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+4x-5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx = \int \left(x+3+\frac{2x^2+1}{x^3-x^2+2x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+3x+\underbrace{\int \frac{2x^2+1}{x^3-x^2+2x-2}\,dx}_{(*)}$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x+\ln|x-1|+\frac{1}{2}(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)$$

- Nejde o ryze lomenou f-ci, proto nejdříve upravíme.

$$(x^4+2x^3+x^2+4x-5):(x^3-x^2+2x-2) = x+3+\frac{2x^2+1}{x^3-x^2+2x-2}$$
$$\underline{-(x^4-x^3+2x^2-2x)}$$
$$3x^3-x^2+6x-5$$
$$\underline{-(3x^3-3x^2+6x-6)}$$
$$2x^2 \quad +1$$

- (*) 1 kořen jmenovatele tipneme: $x=1$

$$(x^3-x^2+2x-2):(x-1) = x^2+2$$
$$\underline{-(x^3-x^2)}$$
$$2x-2$$
$$\underline{-(2x-2)}$$
$$0$$

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$2x^2+1 = A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1) = A(x^2+2)+B(x^2-x)+C(x-1)$$

- 1 reálný kořen $\Rightarrow$ dosadíme:

$$x=1:\quad 3 = A\cdot 3+B\cdot 0+C\cdot 0 \Rightarrow 3=3A \Rightarrow \underline{A=1}$$

• Chybí nám 2 koeficienty ⇒ potřebujeme 2 rovnice

x^2: $2 = A + B \Rightarrow \underline{B} = 2 - A = 2 - 1 \underline{= 1}$

x^1: $0 = -B + C \Rightarrow \underline{C} = B = \underline{1}$

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2}$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3-x^2+2x-2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2}\right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x-1}\,dx}_{\ln|x-1|} + \underbrace{\int \frac{x}{x^2+2}\,dx}_{\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln(x^2+2)}} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+2}\,dx}_{(**)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)}$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$$

(**) $$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}}dx \Rightarrow \sqrt{2}\,dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$$