12. cvičení - Úlohy týkající se rozkladu rac. lomené funkce na parc. zlomky

12.1 Polynomy

Definice 12.1
Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Funkci

$$P: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$$

Nazýváme **reálný polynom (mnohočlen)**. Čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty polynomu** P a n **stupeň polynomu** P.

Příklady polynomů:

- $P_1: y = 3x^3 - 1$ … polynom stupně 3,
- $P_2: y = 7x^4 + 3x^2 - 1$ … polynom stupně 4,
- $P_3: y = 4$ … polynom stupně 0.

Definice 12.2
Funkce R daná předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P je polynom a Q je nenulový polynom se nazývá **racionální lomenná funkce**.

Říkáme, že funkce R je **ryze lomenná**, jestliže stupeň polynomu P je nižší než stupeň polynomu Q. Je-li stupeň polynomu P stejný nebo vyšší než stupeň polynomu Q, mluvíme o **neryze lomenné** funkci.

Příklady racionálně lomenných funkcí:

- $R_1: y = \frac{3x^3-1}{7x^4+3x^2-1}$ … ryze lomenná racionální funkce
- $R_2: y = \frac{3x^5-1}{7x^4+3x^2-1}$ … neryze lomenná racionální funkce

Příklad 12.1

Vyjádřete neryze lomenou racionální funkci f jako součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce.

$$f: y = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

12.2 Rozklad polynomu na součin

Definice 12.3
Kořenem polynomu P rozumíme libovolnou komplexní číslo α takové, že $P(\alpha) = 0$.

Definice 12.4
Jsou-li $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ navzájem různé kořeny polynomu P_n a $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$, pak tvar polynomu

$$P_n: y = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-\beta_s)^{k_s}$$

Nazýváme **rozklad polynomu P_n na součin kořenových činitelů v komplexním oboru**. Číslům $k_1, k_2, \dots, k_s$ říkáme **násobnosti kořenů** $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Platí $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Věta 12.1
Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

- Polynom stupně 1 má právě jeden kořen.
  $P: y = 2$ … kořen 2

- Polynom stupně 2 má právě dva komplexní kořeny, přičemž každý počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost.
  $P: y = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ … kořeny: 1, -2
  $P: y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ … dvojnásobný kořen 1
  $P: y = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ … kořeny: $i, -i$

- Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.
  - $P: y = x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$ … kořeny: $0, i, -i$
  - $P: y = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$ … kořeny: $0, 1, -1$

- Má-li polynom komplexní kořen $x = \alpha + \beta i$, má i komplexně sdružený kořen $x = \alpha - \beta i$, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

  Roznásobíme-li kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům $\alpha \pm \beta i$, dostáváme

  $$[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)] = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

  To je kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$.

Věta 12.2
Je-li polynom $P_n(x)$ stupně $n, n \geq 1$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ všechny jeho kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \ldots, k_s$ a označíme-li $x^2 + p_1x + q_1$, …, $x^2 + p_rx + q_r$ všechny kvadratické trojčleny odpovídající všem různým dvojicím komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $l_1, l_2, \ldots, l_r$, dostaneme

$$P_n(x) = a_n(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (x-\beta_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (x^2+p_rx+q_r)^{l_r}.$$

Tento tvar polynomu nazýváme **rozklad polynomu na součin ireducibilních (nerozložitelných) kořenových činitelů v reálném oboru**.

Příklad 12.2
Rozložte polynom $P_5(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních kořenových činitelů v reálném oboru, víte-li, že jeden kořen je $x = -\frac{1}{2}$.

12.3 Rozklad na parciální zlomky

Věta 12.3
Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomenná funkce s reálnými koeficienty a nechť
$Q(x) = \cdots \cdot (x-\alpha)^k \cdot \cdots \cdot (x^2+px+q)^j \cdot \cdots$, pak

$$R(x) = \cdots \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j} + \cdots,$$

Kde $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_j, C_1, \cdots, C_j \in \mathbb{R}$.

Postup nalezení koeficientů rozkladu [2]

1. Nejprve se přesvědčíme, že zadaná funkce je ryze lomenná. Pokud tomu tak není, převedeme ji dělením na součet polynomu a racionální ryze lomenné funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
2. Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.
3. Podle tohoto rozkladu napíšeme předpokládaný tvar rozkladu na parciální zlomky s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomenné funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu získaného v bodě 2.
4. Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů. Na jedné straně rovnice je mnohočlen se známými koeficienty, na druhé straně mnohočlen s neznámými koeficienty.
5. Dva mnohočleny jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají stejné koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, která má vzhledem k jednoznačnosti rozkladu právě jedno řešení.
6. Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice a tím dostat hned některé koeficienty. Pak stačí porovnat koeficienty jen u některých mocnin neznámé (tak, abychom dostali potřebný počet rovnic pro ty koeficienty, jejichž hodnoty ještě nemáme).

Příkad 12.3

Rozložte na parciální zlomky:

a) $R(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$

b) $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4-1}$

c) $R(x) = \frac{x^4 - x + 1}{x^3 - 1}$

d) $R(x) = \frac{-3x^3+25x^2-32x-2}{(x-1)^2(x-2)(x+3)}$

12.4 Integrace racionální lomenné funkce

Každou racionální lomenou funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \underbrace{R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_s(x)}_{\text{parciální zlomky}}$$

Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$ jsou tyto funkce spojité, takže k nim existuje primitivní funkce a platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)\,dx + \int R_1(x)dx + \cdots + \int R_s(x)dx.$$

Integraci základních typů parciálních zlomků si vyzkoušíme v následujícím příkladu.

Příklad 12.4

a) $\int \frac{3}{x-7}dx$

b) $\int \frac{5}{(x-1)^2}dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

d) $\int \frac{3x+7}{x^2+2}dx$

e) $\int \frac{1}{x^2+2x+10}dx$

f) $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1}\,dx$

Příklad 12.5

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+4x-5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$$