11. cvičení - Úvod do integrálního počtu

11.1 Několik poznámek na úvod

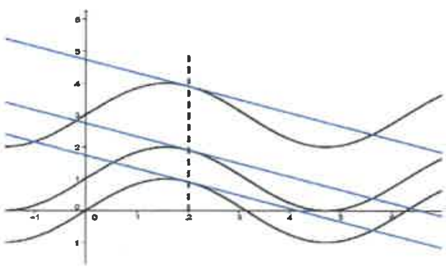
funkce f	derivování → ← **integrování**	$f'(x)$ ... směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x; f(x)]$
$f(x)$ ... poloha bodu pohybujícího se po přímce v čase x	derivování → ← **integrování**	$f'(x)$ ... okamžitá rychlost bodu v čase x
$f(x)$ ... okamžitá rychlost bodu v čase x	derivování → ← **integrování**	$f'(x)$ ... okamžité zrychlení bodu v čase x

Integrální počet – Jakou funkci musíme derivovat, abychom získali danou funkci $f(x)$?

Hledáme $F(x)$	derivování → ← **integrování**	Známe $f(x) = F'(x)$

Například:

$F(x)$	$f(x) = F'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + 1$	$\cos x$
$\sin x - 3$	$\cos x$
$\vdots$	$\vdots$
$\sin x + c, c \in \mathbb{R}$	$\cos x$



Geometrická interpretace: Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x; F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ rovnoběžné, tj. mají stejnou směrnici.

Definice 11.1
Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I.
Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkce k funkci f**, jestliže pro všechna $x \in I$ platí
$$f(x) = F'(x).$$

Věta 11.1 (O existenci primitivní funkce)
Je-li funkce f spojitá na otevřeném intervalu I, má v I primitivní funkci.

Poznámka: Spojitost je postačující, nikoliv nutnou podmínkou existence primitivní funkce.

Věta 11.2
Je-li F primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, pak funkce $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, jsou právě všechny primitivní funkce k f na I.

Označení: Je-li F primitivní funkce k f, píšeme $\int f(x)dx = F(x)$ a mluvíme o neurčitém integrálu.

Úmluva: Symbol $\int f(x)dx$ pro nás bude znamenat některou z primitivních funkcí k f. Každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty.

Věta 11.3
Na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru příslušné integrované funkce platí:
[1] $\int c\,dx = cx \quad (c \in \mathbb{R})$,
[2] $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$,
[3] $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = ln|x|$,
[4] $\int \sin x\ dx = -\cos x$,
[5] $\int \cos x\ dx = \sin x$,
[6] $\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\ x$,
[7] $\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -cotg\ x$,
[8] $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$,
[9] $\int e^x\,dx = e^x$,
[10] $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctg\ x = -arccotg\ x$,
[11] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsin\ x = -arccos\ x$,
[12] $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$.

Platnost vzorců plyne ze vzorců pro derivování.

Věta 11.4 (O linearitě neurčitého integrálu)
Nechť f a g jsou funkce spojité na otevřeném intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak v I platí
$$\int\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Příklad 11.1

a) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ (dle dohody není nutno psát "$+c,\ c \in \mathbb{R}$")

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

c) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}$

d) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{5}{4}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} = \frac{-4}{\sqrt[4]{x}}$

e) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx = \int\left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + x^{-1}\right)dx = \frac{x^{-3/2}}{-3/2} - e^x + \ln|x| = \frac{-2}{3\sqrt{x^3}} - e^x + \ln|x|$

f) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg}(x)$

$$
\begin{aligned}
&x^4 : (x^2+1) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\\
&-(x^4+x^2)\\
&\quad -x^2\\
&-(-x^2-1)\\
&\quad 1
\end{aligned}
$$

g) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$

$= -\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$

i) $\int\left(2x^3 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{\sin x}{3}\right)dx = \frac{2x^4}{4} - 5\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\cos x = \frac{1}{2}x^4 - 5\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\cos x$

j) $\int \frac{x^2-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} - 2x\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{2x^2}{2} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5} - x^2$

k) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$

$= -\operatorname{cotg} x - x$

l) $\int (x-1)^3 dx = \int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$

m) $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

11.2 Základní integrační metody

Metoda Per Partes

Věta 11.5
Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v I. Pak v I platí

$$\int \big(u(x)\cdot v'(x)\big)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int \big(u'(x)\cdot v(x)\big)\, dx.$$

Nejčastější integrály řešené metodou per partes:

Označme $P(x)$ libovolný polynom.

	$u(x)$	$v'(x)$
$\int (P(x)\cdot e^{ax})\, dx$	$P(x)$	e^{ax}
$\int (P(x)\cdot \sin(ax))\, dx$	$P(x)$	$\sin(ax)$
$\int (P(x)\cdot \cos(ax))\, dx$	$P(x)$	$\cos(ax)$
$\int (P(x)\cdot \ln x)\, dx$	$\ln x$	$P(x)$
$\int (P(x)\cdot \arcsin x)\, dx$	$\arcsin x$	$P(x)$
$\int (P(x)\cdot \arccos x)\, dx$	$\arccos x$	$P(x)$
$\int (P(x)\cdot \operatorname{arctg} x)\, dx$	$\operatorname{arctg} x$	$P(x)$
$\int (P(x)\cdot \operatorname{arccotg} x)\, dx$	$\operatorname{arccotg} x$	$P(x)$

Příklad 11.2

a) $\int (x^2+1)e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1 & v' = e^x \\ u' = 2x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x^2+1) - \int 2x e^x dx =$

$= \left| \begin{matrix} u = 2x & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x^2+1) - \left[2x\cdot e^x - \int 2e^x dx\right] =$

$= e^x\cdot x^2 + e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 3)$

b) $\int x\cdot \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx =$

$= \frac{1}{2}x^2\cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)$

c) $\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int 1\,dx =$

$= x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1)$

d) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx^{*}$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x\right)$

$^{*} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \operatorname{arctg} x$

e) $\int (x^2 - 3x + 2)e^x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 - 3x + 2 & v' = e^x \\ u' = 2x - 3 & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x^2 - 3x + 2) - \int e^x(2x-3)\,dx$

$= \left| \begin{matrix} u = 2x - 3 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x^2 - 3x + 2) -$

$- \left[e^x(2x-3) - \int 2e^x\,dx\right] = e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 3x + 2e^x - e^x \cdot 2x + 3e^x -$

$- (-2e^x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$

f) $\int \ln(x^2 + 1)\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x^2+1) & v' = 1 \\ u' = \frac{2x}{x^2+1} & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln(x^2+1) - 2 \cdot \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx =$

viz d)

$= x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x$

g) $\int (x^2-2x)\cdot arctg\, x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctg\, x & v' = x^2-2x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \end{array} \right| =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) arctg\, x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3-3x^2}{x^2+1}\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) arctg\, x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx^{*)} + \underbrace{\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx}_{\text{viz d)}} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\cdot arctg\, x - x^2\cdot arctg\, x \underbrace{- \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2+1)}_{-\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}dx} + \underbrace{x - arctg\, x}_{\int \frac{x^2}{x^2+1}dx}$$

*) $\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$$x^3 : (x^2+1) = x - \frac{x}{x^2+1}$$
$$\underline{-(x^3+x)}$$
$$-x$$

Příklad 11.3

a) $\underbrace{\int \cos x \cdot e^x dx}_{I} = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & v' = e^x \\ u' = -\sin x & v = e^x \end{array} \right| = e^x\cdot \cos x + \int e^x \sin x\, dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = e^x \\ u' = \cos x & v = e^x \end{array} \right| = e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$I = e^x\cdot\cos x + e^x\cdot \sin x - I$$
$$2I = e^x(\cos x + \sin x)$$
$$I = \int \cos x\cdot e^x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)$$

b) $\underbrace{\int \cos^2 x\, dx}_{I} = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & v' = \cos x \\ u' = -\sin x & v = \sin x \end{array} \right| = \sin x\cdot\cos x + \int \sin^2 x\, dx =$

$$= \sin x\cdot \cos x + \int (1-\cos^2 x)dx = \sin x\cdot\cos x + x - \int \cos^2 x\, dx$$

$$I = x + \sin x\cdot\cos x - I$$
$$2I = x + \sin x\cdot \cos x$$
$$I = \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cdot\cos x)$$

c) $\underbrace{\int \sin 3x \cdot e^x dx}_{I} = \left| \begin{matrix} u = \sin 3x & v' = e^x \\ u' = 3 \cdot \cos 3x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cdot \sin 3x - 3\int e^x \cdot \cos 3x \, dx$

$= \left| \begin{matrix} u = \cos 3x & v' = e^x \\ u' = -3 \sin 3x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cdot \sin 3x - 3\left[e^x \cdot \cos 3x \; \cancel{3e^x \cdot \sin 3x} + 3\int e^x \cdot \sin 3x \, dx \right]$

$I = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9I$

$10I = e^x (\sin 3x - 3\cos 3x)$

$I = \int \sin 3x \cdot e^x dx = \frac{1}{10} e^x (\sin 3x - 3\cos 3x)$

První substituční metoda

Věta 11.6

Nechť

- funkce φ má na intervalu $(a; b)$ konečnou derivaci a pro všechna $x \in (a; b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha; \beta)$,
- funkce f je spojitá v $(\alpha; \beta)$.

Buď F libovolná primitivní funkce k f na $(\alpha; \beta)$. Pak v $(a; b)$ platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)).$$

Píšeme: $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{matrix} \right| = \int f(t) \, dt = F(t) = F(\varphi(x))$

Příklad 11.4

a) $\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix} \right| = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \sin^5 x$

b) $\int \frac{1}{x}(\ln^3 x - \ln x) \, dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right| = \int (t^3 - t) \, dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} =$

$= \frac{1}{4}(t^4 - 2t^2) = \frac{1}{4} t^2 (t^2 - 2) =$

$= \frac{1}{4} \ln^2 x \, (\ln^2 x - 2)$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\cdot dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2-1}$

d) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \\ \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^3+1}{t+1}\,dt = \int \frac{t^3+1}{t^2+t}\,dt =$

$= \int \left(t - 1 + \frac{1}{t\cancel{+1}}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t\cancel{+1}| =$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(e^x\cancel{+1}) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$

$(t^3+1):(t^2+t) = t - 1 + \frac{t}{t^2+t} = t - 1 + \frac{\cancel{t+1}}{t(\cancel{t+1})} = t - 1 + \frac{1}{t\cancel{+1}}$

$-(t^3+t^2)$

$\quad -t^2+1$

$-(-t^2-t)$

$\quad t+1$

e) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+\ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3} =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$

f) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt = \int t^{1/3}\,dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} =$

$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{t^4} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^4}$

g) $\int \cos(5x-1)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x-1 \\ dt = 5dx \\ \frac{1}{5}dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \cos t\,dt = +\frac{1}{5}\sin t =$

$= \frac{1}{5}\cdot\sin(5x-1)$

h) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} =$

$= -\frac{1}{\arcsin x}$

i) $\int (1-\pi x)^{2000}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-\pi x \\ dt = -\pi dx \\ -\frac{1}{\pi} dt = dx \end{array} \right| = \int \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cdot t^{2000}\,dt = \frac{-1}{2001\pi}\, t^{2001} =$

$= \dfrac{-(1-\pi x)^{2001}}{2001\,\pi}$

j) $\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ \frac{1}{3} dt = x^2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{7}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{7}{3} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} = \frac{14}{3} \sqrt{t} =$

$= \frac{14}{3} \cdot \sqrt{1+x^3}$

k) $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+3x^2 \\ dt = 6x\,dx \\ \frac{1}{6} dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{t^3} =$

$= \frac{1}{9} \sqrt{(1+3x^2)^3}$

l) $\int \frac{x^9}{(x^5+1)^3}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^5+1 \\ dt = 5x^4 dx \\ \frac{1}{5} dt = x^4 dx \\ t-1 = x^5 \end{array} \right| = \int \frac{x^5 \cdot x^4}{(x^5+1)^3}\,dx = \int \frac{(t-1)\cdot \frac{1}{5}}{t^3}\,dt =$

$= \frac{1}{5} \int \frac{t-1}{t^3}\,dt = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt =$

$= \frac{1}{5} \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-2}}{(-2)} \right) = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) =$

$= \frac{1}{10t} \left(\frac{1}{t} - 2 \right) = \frac{1}{10(x^5+1)} \cdot \left(\frac{1}{x^5+1} - 2 \right)$