# 11. cvičení - Úvod do integrálního počtu

## 11.1 Několik poznámek na úvod

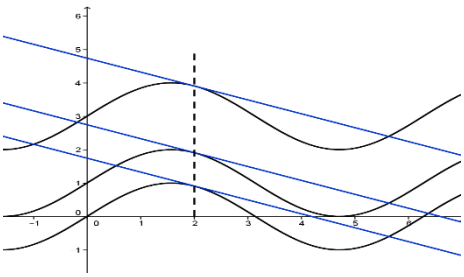
| | | |
|---|---|---|
| funkce $f$ | derivování → / ← **integrování** | $f'(x)$ … směrnice tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $[x; f(x)]$ |
| $f(x)$ … poloha bodu pohybujícího se po přímce v čase $x$ | derivování → / ← **integrování** | $f'(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase $x$ |
| $f(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase $x$ | derivování → / ← **integrování** | $f'(x)$ … okamžité zrychlení bodu v čase $x$ |

**Integrální počet –** Jakou funkci musíme derivovat, abychom získali danou funkci $f(x)$?

| | | |
|---|---|---|
| Hledáme $F(x)$ | derivování → / ← **integrování** | Známe $f(x) = F'(x)$ |

Například:

| $\boldsymbol{F(x)}$ | $\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\sin x + 1$ | $\cos x$ |
| $\sin x - 3$ | $\cos x$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $\sin x + c, c \in \mathbb{R}$ | $\cos x$ |



**Geometrická interpretace**: Pro pevně zvolené $x$ jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x; F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ rovnoběžné, tj. mají stejnou směrnici.

**Definice 11.1**
Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu $I$.
Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkce k funkci $f$**, jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) = F'(x).$$

**Věta 11.1 (O existenci primitivní funkce)**
Je-li funkce $f$ spojitá na otevřeném intervalu $I$, má v $I$ primitivní funkci.

**Poznámka:** Spojitost je postačující, nikoliv nutnou podmínkou existence primitivní funkce.

**Věta 11.2**
Je-li $F$ primitivní funkce k $f$ na otevřeném intervalu $I$, pak funkce $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, jsou právě všechny primitivní funkce k $f$ na $I$.

**Označení:** Je-li $F$ primitivní funkce k $f$, píšeme $\int f(x)dx = F(x)$ a mluvíme o neurčitém integrálu.

**Úmluva:** Symbol $\int f(x)dx$ pro nás bude znamenat některou z primitivních funkcí k $f$. Každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty.

**Věta 11.3**
Na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru příslušné integrované funkce platí:

[1] $\int c\,dx = cx \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$,

[3] $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = ln|x|$,

[4] $\int \sin x\;dx = -\cos x$,

[5] $\int \cos x\;dx = \sin x$,

[6] $\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\,x$,

[7] $\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -cotg\,x$,

[8] $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$,

[9] $\int e^x\,dx = e^x$,

[10] $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctg\,x = -arccotg\,x$,

[11] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsin\,x = -arccos\,x$,

[12] $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$.

Platnost vzorců plyne ze vzorců pro derivování.

**Věta 11.4 (O linearitě neurčitého integrálu)**
Nechť $f$ a $g$ jsou funkce spojité na otevřeném intervalu $I$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak v I platí

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

***Příklad 11.1***

*a)* $\int x\,dx$

*b)* $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

*c)* $\int \sqrt{x}\,dx$

*d)* $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{x}}$

*e)* $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

*f)* $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

*g)* $\int \frac{dx}{\cos 2x+sin^2x}$

*h)* $\int \frac{cos\,2x}{cos^2x\cdot sin^2x}\,dx$

*i)* $\int \left(2x^3-\frac{5}{x^2+1}+\frac{sin\,x}{3}\right)dx$

*j)* $\int \frac{x^2-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx$

*k)* $\int cotg^2x\,dx$

*l)* $\int (x-1)^3 dx$

*m)* $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

## 11.2 Základní integrační metody

### Metoda Per Partes

**Věta 11.5**
Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v $I$. Pak v $I$ platí

$$\int \big(u(x) \cdot v'(x)\big)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int \big(u'(x) \cdot v(x)\big)\, dx.$$

**Nejčastější integrály řešené metodou per partes:**

Označme $P(x)$ libovolný polynom.

| | $\boldsymbol{u(x)}$ | $\boldsymbol{v'(x)}$ |
|---|---|---|
| $\int (P(x) \cdot e^{ax})\, dx$ | $P(x)$ | $e^{ax}$ |
| $\int (P(x) \cdot \sin(ax))\, dx$ | $P(x)$ | $\sin(ax)$ |
| $\int (P(x) \cdot \cos(ax))\, dx$ | $P(x)$ | $\cos(ax)$ |
| $\int (P(x) \cdot \ln x)\, dx$ | $\ln x$ | $P(x)$ |
| $\int (P(x) \cdot \arcsin x)\, dx$ | $\arcsin x$ | $P(x)$ |
| $\int (P(x) \cdot \arccos x)\, dx$ | $\arccos x$ | $P(x)$ |
| $\int (P(x) \cdot \operatorname{arctg} x)\, dx$ | $\operatorname{arctg} x$ | $P(x)$ |
| $\int (P(x) \cdot \operatorname{arccotg} x)\, dx$ | $\operatorname{arccotg} x$ | $P(x)$ |

***Příklad 11.2***

*a)* $\int (x^2+1) e^x dx$

*b)* $\int x \cdot \ln x \, dx$

*c)* $\int \ln x \, dx$

*d)* $\int x \cdot arctg\, x \, dx$

*e)* $\int (x^2 - 3x + 2)e^x dx$

*f)* $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

*g)* $\int (x^2 - 2x) \cdot arctg\, x\, dx$

***Příklad 11.3***

*a)* $\int cos\, x \cdot e^x dx$

*b)* $\int cos^2 x\, dx$

*c)* $\int \sin 3x \cdot e^x dx$

## První substituční metoda

**Věta 11.6**

Nechť

- funkce $\varphi$ má na intervalu $(a;b)$ konečnou derivaci a pro všechna $x \in (a;b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha;\beta)$,
- funkce $f$ je spojitá v $(\alpha;\beta)$.

Buď $F$ libovolná primitivní funkce k $f$ na $(\alpha;\beta)$. Pak v $(a;b)$ platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\ dx = F\big(\varphi(x)\big).$$

**Píšeme**: $\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\ dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)\ dt = F(t) = F\big(\varphi(x)\big)$

***Příklad 11.4***

*a)* $\int \sin^4 x \cdot \cos x\ dx$

*b)* $\int \frac{1}{x}(\ln^3 x - \ln x)\ dx$

*c)* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

*d)* $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$

*e)* $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$

*f)* $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$

*g)* $\int cos(5x-1)\,dx$

*h)* $\int \frac{dx}{arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$

*i)* $\int (1-\pi x)^{2000}\,dx$

*j)* $\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

*k)* $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx$

*l)* $\int \frac{x^9}{(x^5+1)^3}\,dx$