10. cvičení – Globální extrémy, Aproximace funkce polynomem

10.1 Globální extrémy

V matematických aplikacích se často zabýváme hledáním bodu z množiny M, v němž funkce f nabývá největší, resp. nejmenší funkční hodnoty. Říkáme, že hledáme globální extrémy funkce f na množině M.

Definice 10.1

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního maxima** v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního minima** v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.

Nabývá-li funkce f na množině M globálního maxima nebo minima v bodě x_0, říkáme, že funkce f nabývá na množině M **globálního extrému** v bodě x_0.

Věta 10.1 (Weierstrassova)

Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce f nabývá globálního maxima i minima.

Postup hledání globálních extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$

1. V intervalu $(a; b)$ najdeme body „podezřelé z lokálních extrémů“, tj. stacionární body a body, v nichž první derivace neexistuje.
2. Vypočteme funkční hodnoty ve všech bodech podezřelých z lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\langle a; b\rangle$.
3. Vybereme bod, v němž má funkce f největší, resp. nejmenší funkční hodnotu. V tomto bodě nabývá funkce f globálního maxima, resp. globálního minima.

Příklad 10.1

Najděte globální extrémy funkce $f: y = x - 3\ln x, x \in \langle 1; e^2\rangle$.

ad 1) Stac. body a body, v nichž 1. derivace neex.

$f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \langle 1; e^2\rangle$ } Body podezřelé z ex.: $x = 3$

$f'(x)$ neex. $\Leftrightarrow x = 0 \notin \langle 1; e^2\rangle$

ad 2) F-ční hodnoty v bodech podezřelých z ex. + krajních bodech

$f(3) = 3 - 3\cdot\ln 3$

$f(1) = 1 - 3\cdot\ln 1 = 1 - 3\cdot 0 = 1$

$f(e^2) = e^2 - 3\cdot\ln e^2 = e^2 - 6$

$f(3) < f(1) < f(e^2)$

ad 3) Glob. minimum: $[3; 3 - 3\ln 3]$; Glob. max.: $[e^2; e^2 - 6]$

Příklad 10.2

Najděte globální extrémy funkce $f: y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, x \in \langle 0; 1 \rangle$.

ad1) Body podezřelé z lok. extrému

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+2x+x^2)+(1-2x+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$f'(x) = 0 \iff \times$

$f'(x)$ neex. $\iff \times$

ad2)

$f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$

$\left.\begin{array}{l} \\ f(1) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \end{array}\right\} f(1) < f(0)$

ad3) Glob. minimum: $[1; 0]$; Glob. maximum: $[0; \pi/4]$

V praxi hraje velice důležitou roli optimalizace, tj. hledání „nejlepšího" nebo „nejhoršího" řešení nějakého problému.

Příklad 10.3

Mezi všemi kladnými čísly vyberte to, jehož součet s převrácenou hodnotou je minimální.

$x \in \mathbb{R}; \; x > 0$

$f(x) = x + \frac{1}{x}; \; x \in (0; \infty)$ ... součet čísla s převrácenou hodn.

- nelze použít Weierstrassovu větu ($(0; \infty)$ není uzavřený interval)

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff \left.\begin{array}{l} x = 1 \in (0; \infty) \\ x = -1 \notin (0; \infty) \end{array}\right\}$ Bod podezřelý z extrému: $x = 1$

$f'(x)$ neex. $\iff x = 0 \notin (0; \infty)$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ v $x = 1$ je lok. minimum

Glob. minimum: $[1; 2]$ ← součet 1 s převr. h., tj. $1 + \frac{1}{1} = 2$

Příklad 10.4

Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu bylo ochlazování páry ve válci nejmenší, tj. aby povrch válce byl minimální.

$$V = \pi r^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{\pi r^2} \;{}^{*)}, \quad r > 0$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot v \overset{*)}{=} 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Hledáme glob. minimum $S(r)$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 2V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \in (0;\infty)$$

bod podezřelý z extrému

$$S'(r) \text{ neex.} \Leftrightarrow r = 0 \notin (0;\infty)$$

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 12\pi > 0 \Rightarrow \text{glob. min. v } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Rozměry válce: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Příklad 10.5

Na přímce o rovnici $y = 3x + 1$ najděte bod, který je nejblíže bodu $[8; -5]$.

$p: y = 3x + 1$

$X = [x; 3x+1]^{*)}$ … hledaný bod na přímce p

$$A = [8; -5] \Rightarrow v = |AX| = \sqrt{(x-8)^2 + ((3x+1)+5)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 16x + 64 + 9x^2 + 36x + 36} =$$

$$= \sqrt{10x^2 + 20x + 100}$$

Hledáme glob. minimum $v(x)$

v je minimální $\Leftrightarrow f(x) = 10x^2 + 20x + 100$ je minimální

$$f'(x) = 20x + 20$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ f'(x) \text{ neex.} \Leftrightarrow \nexists x \end{array}\right\} \text{bod podezřelý z extrému: } x = -1$$

$$f''(x) = 20$$

$$f''(-1) = 20 > 0 \Rightarrow \text{glob. min. v } x = -1 \Rightarrow \text{Hledaný bod: } X = [-1; -2]^{*)}$$

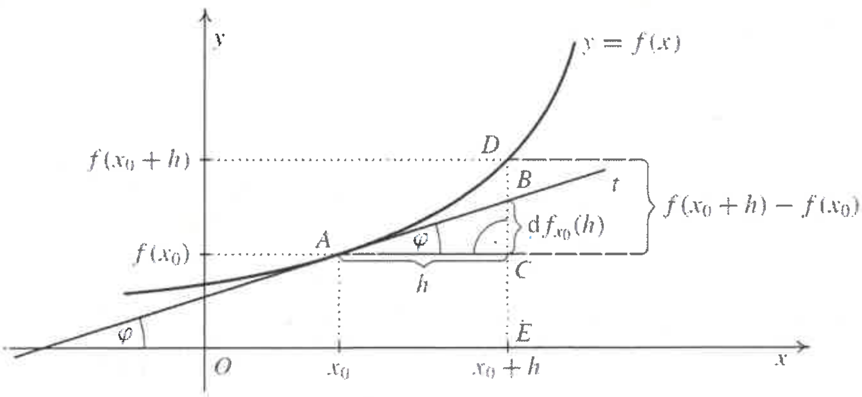
10.2 Aproximace funkce polynomem

Definice 10.2

Předpokládejme, že funkce f definována na nějakém okolí bodu x_0. Existuje-li takové číslo $A \in \mathbb{R}$, že pro funkci $\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h$ platí $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$, pak říkáme, že **funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná**.

Lineární funkci df_{x_0} definovanou předpisem $df_{x_0}(h) = A \cdot h$ nazýváme **diferenciálem** funkce f v bodě x_0.

Diferenciál vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na malé změně jejího argumentu. Tuto závislost aproximuje jako přímou úměrnost v okolí zvoleného bodu.



(převzato z [1])

Věta 10.2

Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0. Pro diferenciál pak platí

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h \text{ pro každé } h \in \mathbb{R}.$$

Využití: Nahrazení funkce na okolí daného bodu lineární funkcí, tj. polynomem stupně jedna.

Příklad 10.6

Najděte přírůstek funkce $f: y = x^3 - 4x^2 - 10x - 12$ a její diferenciál v bodě $x_0 = 0$ pro přírůstek $h = 1{,}2$, resp. $h = 0{,}2$. Určete chybu, které se při výpočtu $f(x_0 + h)$ dopustíme, aproximujeme-li funkci f na okolí bodu x_0 přímkou, tj. nahradíme-li přírůstek funkce f v bodě x_0 diferenciálem.

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 10$

$f(x_0+h) \doteq f(x_0) + df_{x_0}(h)$

$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = -12;\ df_0(h) = f'(0) \cdot h = -10h \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1{,}2) \doteq f(0) + df_0(1{,}2) = -12 + (-10 \cdot 1{,}2) = \underline{-24}$

Kalkulačka: $f(1{,}2) = (1{,}2)^3 - 4 \cdot (1{,}2)^2 - 10 \cdot 1{,}2 - 12 = -27{,}3$

tj. chyba $3{,}3$, tj. 12 %

Zkuste přesněji pomocí linearizace v $x_0 = 1$!

$df_1(h) = f'(1) \cdot h = -15h$, tj. $f(1{,}2) \doteq f(1) + df_1(0{,}2) = -25 - 15 \cdot 0{,}2 =$

$= \underline{\underline{-28}}$ (chyba 2,6 %)

b) $h = 0{,}2$

$df_0(0{,}2) = -10 \cdot 0{,}2 = -2$; $f(0) = -12$

$f(0{,}2) \doteq f(0) + df_0(0{,}2) = -12 + (-2) = \underline{\underline{-14}}$

kalkulačka: $f(0{,}2) = 0{,}2^3 - 4 \cdot 0{,}2^2 - 10 \cdot 0{,}2 - 12 \doteq -14{,}2$

tj. chyba odhadu: $0{,}2$

Příklad 10.7

Užitím diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu:

a) $\sqrt[4]{267}$ *b)* $1{,}04^5$

a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

linearizace v $x = 256$, protože víme, že $4^4 = 256$, tj. $\sqrt[4]{256} = 4$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$

$df_{256}(h) = f'(256) \cdot h = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{256^3}} \cdot h = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{4^{12}}} \cdot h = \frac{1}{4^4} \cdot h$

$f(256) = \sqrt[4]{256} = 4$

$f(267) \doteq f(256) + df_{256}(\underbrace{267 - 256}_{h}) = 4 + \frac{1}{256} \cdot 11 \doteq$

$\doteq \underline{\underline{4{,}0429688}}$

kalkulačka: $\sqrt[4]{267} \doteq 4{,}0422932$, tj. chyba $6{,}8 \cdot 10^{-4}$

b) $f(x) = x^5$

linearizace v $x = 1$

$f'(x) = 5x^4$

$df_1(h) = f'(1) \cdot h = 5h$; $f(1) = 1^5 = 1$

$f(1{,}04) \doteq f(1) + df_1(0{,}04) = 1 + 5 \cdot 0{,}04 = \underline{\underline{1{,}2}}$

kalkulačka: $1{,}04^5 \doteq 1{,}2167$, tj. chyba $0{,}0167$

10.3 Taylorův polynom

Definice 10.3
Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci do řádu n. Pak se polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývá **Taylorův polynom n-tého stupně v bodě x_0**.

Poznámky:

- Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o **Maclaurinově polynomu.**
- Taylorův polynom používáme pro nahrazení funkce na okolí daného bodu polynomem.
- Čím vyšší stupeň Taylorova polynomu použijeme, tím menší chyby se při aproximaci funkce tímto polynomem dopustíme.

Příklad 10.8

Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f: y = \ln x$ v okolí bodu $x_0 = 1$.

$x_0 = 1$:

$f(x) = \ln x$ $\quad f(1) = 0$

$f'(x) = +\frac{1}{x}$ $\quad f'(1) = +1$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\quad f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(1) = 2$

$$\underline{\ln x} \doteq 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{(-1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$
$$\doteq \underline{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3}$$

vhodná aproximace $\ln x$ pro x blízké 1

Příklad 10.9

Napište Maclaurinův polynom třetího stupně funkce $f: y = \frac{1+x}{1-x}$.

$\boxed{x \neq 1}$!

$x_0 = 0$:

$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$ $\quad f'(0) = 2$

$f''(x) = \frac{4}{(1-x)^3}$ $\quad f''(0) = 4$

$f'''(x) = \frac{12}{(1-x)^4}$ $\quad f'''(0) = 12$

$$\underline{\frac{1+x}{1-x}} \doteq 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 = \underline{1 + 2x + 2x^2 + 2x^3}$$

vhodná aproximace v okolí 0

Příklad 10.10

Rozviňte polynom $f: y = x^3 - 2x + 5$ podle mocnin $(x-1)$.

Taylorův rozvoj v $x = 1$:

$f(x) = x^3 - 2x + 5 \qquad f(1) = 4$

$f'(x) = 3x^2 - 2 \qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = 6x \qquad f''(1) = 6$

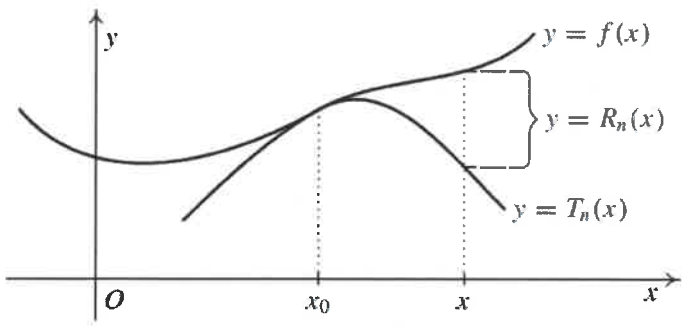
$f'''(x) = 6 \qquad f'''(1) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0 \qquad f^{(4)}(1) = 0$

$$x^3 - 2x + 5 = 4 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 =$$
$$= 4 + (x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

10.4 Taylorův vzorec

Věta 10.3 (Taylorův vzorec)
Nechť má funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1, n \geq 1$. Nechť $x \in O(x_0)$. Pak existuje číslo ξ ležící mezi x_0 a x takové, že platí:
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$
kde
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$



Prezentace významu zbytku $R_n(x)$ (převzato z [1])

Poznámky:

- Uvedená podoba zbytku R_n se nazývá **Lagrangeův tvar zbytku**.
- Číslo ξ, které závisí při pevně zvoleném středu x_0 na x, nemusí být dáno jednoznačně.
- Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o **Maclaurinově vzorci**.

Příklad 10.11

Najděte Maclaurinův vzorec funkce $f: y = e^x, x \in \mathbb{R}$ pro obecné n.

Taylorův vzorec pro $x_0 = 0$:

$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$\vdots \qquad \vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$

$f^{(n+1)}(x) = e^x \qquad f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}}$$

Lagrangeův zbytek,

tj. chyba při aproximaci polynomem n-tého stupně

Příklad 10.12

Užitím Maclaurinova vzorce vypočtěte hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{(viz. př. 10.11)}$$

Jaké máme zvolit n, aby $R_n(\cancel{\xi}\, x) < 0{,}001$ ~~pro~~ $x = 1$?

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \dots + \frac{1^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}\cdot \underbrace{1^{n+1}}_{1}$$

$$R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < 0{,}001$$

$$\xi \in (\underset{x_0}{0}; \underset{x}{1}) \Rightarrow e^\xi \in (1; e) \Rightarrow e^\xi \in (1; \underset{\text{horní odhad}}{3})$$

$$\text{tj. } R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001 \Rightarrow (n+1)! > \frac{3}{0{,}001}$$

$$(n+1)! > 3\,000$$

$$n \geq 6$$

$$\text{tj. } e \doteq 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$\doteq 2{,}718\,055\,559 \quad \text{(chyba menší než } 0{,}000\,226\,226)$$

Příklad 10.13

Užitím Taylorova vzorce (pro $n = 3$) přibližně vypočtěte $\sqrt[3]{30}$.

Taylorův rozvoj $\sqrt[3]{x} = f(x)$ v $x_0 = 27$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(27) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(27) = \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} \qquad f''(27) = -\frac{2}{9} \cdot 3^{-3 \cdot \frac{5}{3}} = -\frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{3^5} = -\frac{2}{3^7} =$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot x^{-8/3} \qquad f'''(27) = \frac{10}{27} \cdot 3^{-3 \cdot \frac{8}{3}} = \frac{10}{3^3} \cdot \frac{1}{3^8} = \frac{10}{3^{11}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-80}{81} \cdot x^{-\frac{11}{3}} \qquad f^{(4)}(\xi) = -\frac{80}{81} \cdot \xi^{-\frac{11}{3}}$$

$$\sqrt[3]{x} \doteq 3 + \frac{\frac{1}{27}}{1!}(x-27) - \frac{\frac{2}{3^7}}{2!}(x-27)^2 + \frac{\frac{10}{3^{11}}}{3!}(x-27)^3 - \underbrace{\frac{\frac{80}{81} \cdot \xi^{-\frac{11}{3}}}{4!}(x-27)^4}$$

Lagr. zbytek,
tj. chyba odhadu;
$\xi \in (27; 30)$
odhadujeme-li $\sqrt[3]{30}$

$$\sqrt[3]{30} \doteq 3 + \frac{1}{27}(30-27) - \frac{1}{3^7}(30-27)^2 + \frac{5}{3^{12}}(30-27)^3 + R_4(3)$$

$3 = 30-27$

$$\doteq 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} + \frac{5}{19\,683} + R_4(3)$$

$$\doteq 3{,}107\,249\,911 + R_4(3)$$

<u>Odhad Lagrangeova zbytku (chyby)</u>

$$R_4(3) = -\frac{\frac{80}{81}}{4!} \xi^{-\frac{11}{3}} \cdot 3^4 = -\frac{10}{3} \cdot \xi^{-\frac{11}{3}}$$

$$\xi \in (27; 30) \Rightarrow -\frac{10}{3} \cdot 27^{-\frac{11}{3}} < R_4(3) < -\frac{10}{3} \cdot 30^{-\frac{11}{3}}$$

$$\frac{10}{3} \cdot 3^{-11} > R_4(3) > \frac{10}{3} \cdot 30^{-\frac{11}{3}}$$

$$\frac{10}{3^{12}} > R_4(3)$$

$$\underline{0{,}000\,019 > R_4(3)}$$

horní odhad chyby

Srovnejte s kalkulačkou :)