10. cvičení – Globální extrémy, Aproximace funkce polynomem

10.1 Globální extrémy

V matematických aplikacích se často zabýváme hledáním bodu z množiny M, v němž funkce f nabývá největší, resp. nejmenší funkční hodnoty. Říkáme, že hledáme globální extrémy funkce f na množině M.

Definice 10.1
Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního maxima** v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.
Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního minima** v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.
Nabývá-li funkce f na množině M globálního maxima nebo minima v bodě x_0, říkáme, že funkce f nabývá na množině M **globálního extrému** v bodě x_0.

Věta 10.1 (Weierstrassova)
Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce f nabývá globálního maxima i minima.

Postup hledání globálních extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$

1. V intervalu $(a; b)$ najdeme body „podezřelé z lokálních extrémů“, tj. stacionární body a body, v nichž první derivace neexistuje.
2. Vypočteme funkční hodnoty ve všech bodech podezřelých z lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\langle a; b\rangle$.
3. Vybereme bod, v němž má funkce f největší, resp. nejmenší funkční hodnotu. V tomto bodě nabývá funkce f globálního maxima, resp. globálního minima.

Příklad 10.1
Najděte globální extrémy funkce $f: y = x - 3\ln x, x \in \langle 1; e^2\rangle$.

Příklad 10.2

Najděte globální extrémy funkce $f: y = arctg\ \frac{1-x}{1+x}, x \in \langle 0; 1 \rangle$.

V praxi hraje velice důležitou roli optimalizace, tj. hledání „nejlepšího“ nebo „nejhoršího“ řešení nějakého problému.

Příklad 10.3

Mezi všemi kladnými čísly vyberte to, jehož součet s převrácenou hodnotou je minimální.

Příklad 10.4

Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu bylo ochlazování páry ve válci nejmenší, tj. aby povrch válce byl minimální.

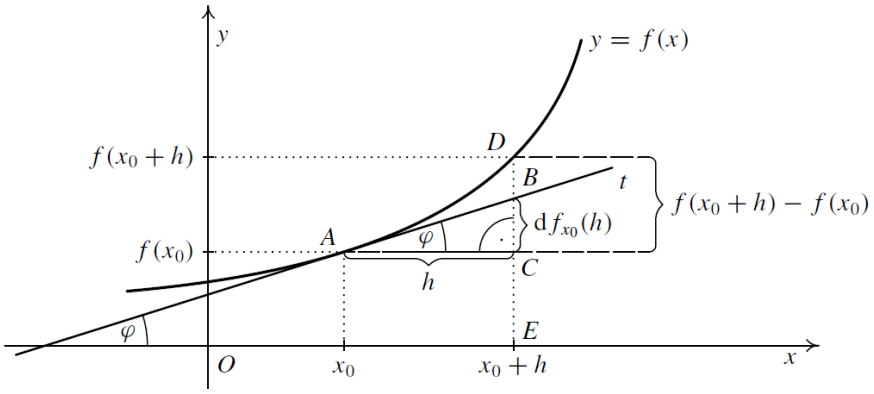
Příklad 10.5

Na přímce o rovnici $y = 3x + 1$ *najděte bod, který je nejblíže bodu* $[8; -5]$.

10.2 Aproximace funkce polynomem

Definice 10.2
Předpokládejme, že funkce f definována na nějakém okolí bodu x_0. Existuje-li takové číslo $A \in \mathbb{R}$, že pro funkci $\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h$ platí $\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$, pak říkáme, že **funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná**.
Lineární funkci df_{x_0} definovanou předpisem $df_{x_0}(h) = A \cdot h$ nazýváme **diferenciálem** funkce f v bodě x_0.

Diferenciál vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na malé změně jejího argumentu. Tuto závislost aproximuje jako přímou úměrnost v okolí zvoleného bodu.



(převzato z [1])

Věta 10.2
Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0. Pro diferenciál pak platí

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h \text{ pro každé } h \in \mathbb{R}.$$

Využití: Nahrazení funkce na okolí daného bodu lineární funkcí, tj. polynomem stupně jedna.

Příklad 10.6
Najděte přírůstek funkce $f: y = x^3 - 4x^2 - 10x - 12$ a její diferenciál v bodě $x_0 = 0$ pro přírůstek $h = 1{,}2, resp. h = 0{,}2$. Určete chybu, které se při výpočtu $f(x_0 + h)$ dopustíme, aproximujeme-li funkci f na okolí bodu x_0 přímkou, tj. nahradíme-li přírůstek funkce f v bodě x_0 diferenciálem.

Příklad 10.7

Užitím diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu:

a) $\sqrt[4]{267}$ *b)* $1{,}04^5$

10.3 Taylorův polynom

Definice 10.3

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci do řádu n. Pak se polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývá **Taylorův polynom *n*-tého stupně v bodě x_0**.

Poznámky:

- Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o **Maclaurinově polynomu**.
- Taylorův polynom používáme pro nahrazení funkce na okolí daného bodu polynomem.
- Čím vyšší stupeň Taylorova polynomu použijeme, tím menší chyby se při aproximaci funkce tímto polynomem dopustíme.

Příklad 10.8

Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f: y = \ln x$ v okolí bodu $x_0 = 1$.

Příklad 10.9

Napište Maclaurinův polynom třetího stupně funkce $f: y = \frac{1+x}{1-x}$.

Příklad 10.10

Rozviňte polynom $f: y = x^3 - 2x + 5$ podle mocnin $(x - 1)$.

10.4 Taylorův vzorec

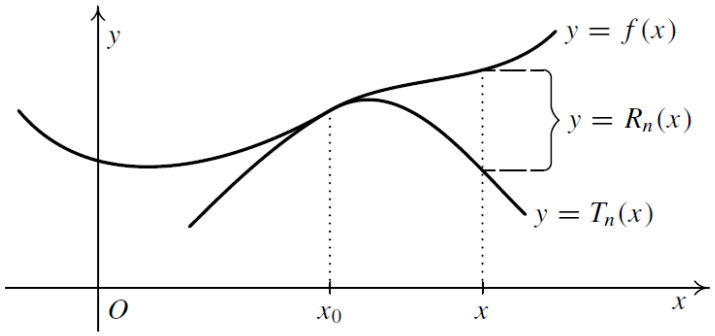
Věta 10.3 (Taylorův vzorec)

Nechť má funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n + 1, n \geq 1$. Nechť $x \in O(x_0)$. Pak existuje číslo ξ ležící mezi x_0 a x takové, že platí:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$



Prezentace významu zbytku $R_n(x)$ (převzato z [1])

Poznámky:

- Uvedená podoba zbytku R_n se nazývá **Lagrangeův tvar zbytku**.
- Číslo ξ, které závisí při pevně zvoleném středu x_0 na x, nemusí být dáno jednoznačně.
- Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o **Maclaurinově vzorci**.

Příklad 10.11

Najděte Maclaurinův vzorec funkce $f: y = e^x, x \in \mathbb{R}$ pro obecné n.

Příklad 10.12

Užitím Maclaurinova vzorce vypočtěte hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Příklad 10.13

Užitím Taylorova vzorce $(pro\ n = 3)$ *přibližně vypočtěte* $\sqrt[3]{30}$.