Matematická indukce

① Dokažte, že:

$$(1+1)\cdot 1! + (4+1)\cdot 2! + (9+1)\cdot 3! + \dots + (n^2+1)\cdot n! = (n+1)!\,n$$

a) Pro $n = 1$:

$L: \ (1^2+1)\cdot 1! = 2$

$P: \ (1+1)!\cdot 1 = 2!\cdot 1 = 2$

$\Big\} \ L = P$

b) Předpokládáme, že výrok platí pro $n = k$:

$$(1+1)\cdot 1! + (4+1)\cdot 2! + \dots + (k^2+1)\cdot k! = (k+1)!\cdot k$$

Chceme dokázat, že výrok platí pro $n = k+1$:

$$\underbrace{(1+1)\cdot 1! + (4+1)\cdot 2! + \dots + (k^2+1)\cdot k!}_{(k+1)!\,k} + ((k+1)^2+1)\cdot(k+1)! = (k+2)!(k+$$

$$L: \ (k+1)!\,k + (k^2+2k+2)\cdot(k+1)! = (k+1)!\,\underbrace{(k^2+3k+2)}_{} =$$

$D = 9-8 = 1$

$k_{1,2} = \dfrac{-3\pm 1}{2} \ \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$

$$= (k+1)!\,(k+1)(k+2) =$$

$$= (k+2)!\cdot(k+1)$$

$P: \ (k+2)!\,(k+1)$

$L = P$

2) Pro libovolné přirozené číslo n je číslo $2n^2+2n$ dělitelné 4.

a) Pro $n = 1$: $4 \mid (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1)$

$4 \mid 4$ ✓

b) Předpokládejme, že pro $n = k$ platí:

$4 \mid (2k^2 + 2k)$

Chceme dokázat, že platí i pro $n = k+1$. $(k \in \mathbb{N})$

$4 \mid (2(k+1)^2 + 2(k+1))$

$4 \mid (2k^2 + 4k + 2 + 2k + 2)$

$4 \mid (2k^2 + 2k + 4k + 4)$

$4 \mid (2k^2 + 2k)$ a $4 \mid (4k + 4)$ ✓

Definiční obor

(3) Určete def. obor f-ce definované předpisem.

a) $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x+2|}$

- $|x-2| - |x+2| \geq 0$

Nulové body: $(-\infty;-2\rangle$ $(-2;2\rangle$ $(2;\infty)$

	$(-\infty;-2\rangle$	$(-2;2\rangle$	$(2;\infty)$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$

Pro $x \in (-\infty;-2\rangle$

$$-(x-2)+(x+2) \geq 0$$

$$4 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;-2\rangle \Rightarrow K_1 = (-\infty;-2\rangle$$

Platí vždy pro dané x.

Pro $x \in (-2;2\rangle$

$$-(x-2)-(x+2) \geq 0$$

$$-2x \geq 0$$

$$x \leq 0 \ \wedge \ x \in (-2;2\rangle \Rightarrow K_2 = (-2;0\rangle$$

Pro $x \in (2;\infty)$

$$(x-2)-(x+2) \geq 0$$

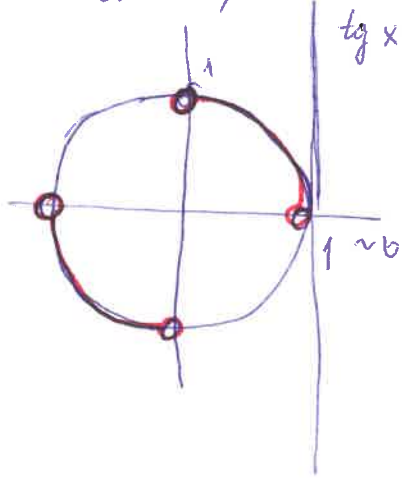
$$-4 \geq 0 \Rightarrow K_3 = \emptyset$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-\infty;0\rangle$$

$$D(f) = (-\infty;0\rangle$$

h) $f(x) = \sqrt[5]{\ln(\operatorname{tg} x)}$

- $\operatorname{tg} x > 0$ ($\ln x$ je def. pro $x > 0$)
- $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ ($\operatorname{tg} x$ je def. pro ...)



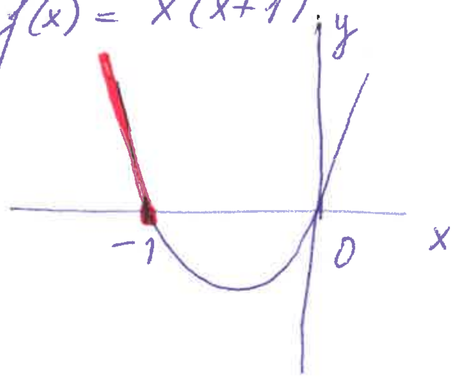
$\Rightarrow \mathcal{D}(f) = \left(0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z$

Inverzní f-ce

(4) Rozhodněte, zda k f-ci f existuje f-ce inverzní. V kladném případě ji určete.

a) $f(x) = x^2 + x \qquad \mathcal{D}(f) = (-\infty; \cancel{0}\rangle$

- $f(x) = x(x+1)$



$\Rightarrow f$ je na $(-\infty; -1\rangle$ prostá $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ existuje

- $\mathcal{D}(f) = (-\infty; -1\rangle;\ \mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$

$\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle 0; \infty)\ ;\ \mathcal{H}(f^{-1}) = (-\infty; -1\rangle$

- $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$y = x^2 + x$

$x^2 + x - y = 0$

$D = 1 + 4y > 0$ (protože $y \in D(f^{-1}) = \langle 0; \infty)$)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

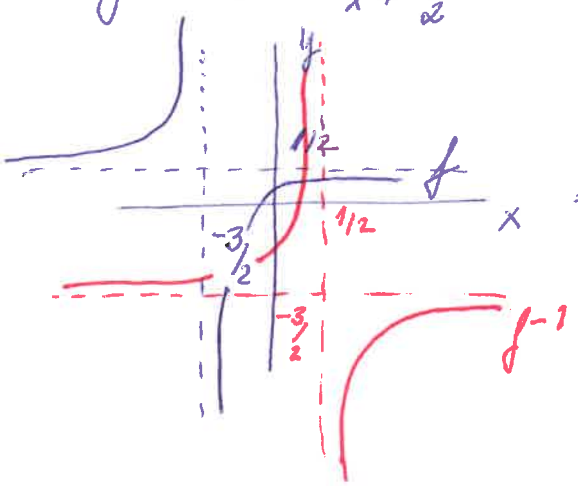
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$ ✗ (Není řeš., protože pro $y \in \langle 0; \infty)$ je $x_1 \in \langle 0; \infty) \neq H(f^{-1})$)

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}$ ✓ (Je řeš., protože pro $y \in \langle 0; \infty)$ je $x_2 \in (-\infty; -1\rangle = H(f^{-1})$)

$f^{-1}: \; x = \frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}$ neboli $f^{-1}: \; y = \frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$

1) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ ~ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

- $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{x + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5/2}{x + \frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5/4}{x + \frac{3}{2}}$



$\Rightarrow$ f je prostá, tj. f^{-1} existuje

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

  $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

- $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y = \frac{x-1}{2x+3} \quad / \cdot (2x+3)$$

$$y(2x+3) = x - 1$$

$$2yx + 3y = x - 1$$

$$2yx - x = -1 - 3y$$

$$x(2y-1) = -1-3y \quad / : (2y-1) \text{ lze, protože } y \neq \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}: x = \frac{-1-3y}{2y-1} \quad \text{neboli} \quad \underline{\underline{f^{-1}: y = \frac{-1-3x}{2x-1}}}$$

Jiný způsob, jak upravit předpis f do tvaru, ze nějž lze načrtnout graf:

$$f^{-1}: y = \frac{-1-3x}{2x-1}$$

$$(-3x-1) : (2x-1) = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{2x-1} = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{2(x-\frac{1}{2})} =$$

$$\underline{-(-3x+\frac{3}{2})}$$

$$-\frac{5}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$ (viz sh. 5)

Limity posloupnosti

(5) $$\lim \frac{\sqrt{7n^3+1}-n}{81+7n\cdot\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n^3\cdot\left(7+\frac{1}{n^3}\right)}-n}{81+7\cdot n^{3/2}} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{n^{3/2}}\left[\sqrt{7+\frac{1}{n^3}}-n^{-1/2}\right]}{\cancel{n^{3/2}}\left[81\cdot n^{-3/2}+7\right]} = \lim \frac{\sqrt{7+\frac{1}{n^3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{81\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3}}+7} =$$

$$= \frac{\sqrt{7+0}-0}{81\cdot 0+7} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{7}}}$$

(6) $$\lim \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{2n+\frac{2}{3}} = \lim \left(\frac{3n+1+1}{3n+1}\right)^{2n+\frac{2}{3}} =$$

$$= \lim \left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{\frac{n\cdot 3}{3}}\right]^2 \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{\frac{2}{3}}}_{1} =$$

$$= \lim \left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1-1}\right]^{\frac{2}{3}} = \lim \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}}_{e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{-1}}_{1}\right]^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \underline{\underline{e^{2/3}}}$$

(7) $$\lim \frac{3^{2n+4}-4^{n+1}}{2^{n+1}-3^{2n}+4^n} = \lim \frac{(3^2)^n\cdot 3^4-4^n\cdot 4}{2^n\cdot 2-(3^2)^n+4^n} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{9^n}\left[3^4-\left(\frac{4}{9}\right)^n\cdot 4\right]}{\cancel{9^n}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n\cdot 2-1+\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]} = \frac{3^4-0\cdot 4}{0\cdot 2-1+0} =$$

v čitateli i jmenovateli vytýkáme nejvyšší „mocninu" z jmenovatele

$$= -3^4 = \underline{\underline{-81}}$$

(8) $$\lim \frac{4^{n-2}+3^{2n+1}}{7^{n+2}-4^{2n+1}} = \lim \frac{4^n \cdot 4^{-2}+(3^2)^n \cdot 3}{7^n \cdot 7^2-(4^2)^n \cdot 4} =$$

$$= \lim \frac{4^n \cdot 4^{-2}+9^n \cdot 3}{7^n \cdot 49-16^n \cdot 4} = \lim \frac{\cancel{16^n}\left[\left(\frac{4}{16}\right)^n \cdot 4^{-2}+\left(\frac{9}{16}\right)^n \cdot 3\right]}{\cancel{16^n}\left[\left(\frac{7}{16}\right)^n \cdot 49-4\right]} =$$

$$= \frac{0 \cdot 4^{-2}+0 \cdot 3}{0 \cdot 49-4} = \frac{0}{-4} = \underline{\underline{0}}$$