9. cvičení – Průběh funkce

Co chápeme pod pojmem vyšetření průběhu funkce?
Vyšetření vlastností, které nám umožní, abychom funkci rozumně charakterizovali a nakreslili její graf.

Co nás obvykle zajímá při vyšetření průběhu funkce?
Definiční obor; sudost, lichost (informace, zda je graf funkce symetrický); periodičnost; spojitost; maximální intervaly, na nichž je funkce monotónní (dále monotonie); lokální extrémy (minima, maxima); maximální intervaly, na nichž je funkce konvexní, konkávní (dále konvexnost, konkávnost); inflexní body; asymptoty grafu funkce.

9.1 Monotonie

Věta 9.1
Nechť funkce f má na intervalu $(a,b), a,b \in \mathbb{R}^*$, derivaci. Je-li
a) $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***rostoucí*** na (a,b),
b) $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***neklesající*** na (a,b),
c) $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***klesající*** na (a,b),
d) $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ***nerostoucí*** na (a,b).

Příklad 9.1
Určete maximální intervaly ryzí monotonie následujících funkcí:

a) $f: y = 2x^2 - 5x + 1$ *b)* $g: y = \frac{ln^2 x}{x}$ *c)* $h: y = e^{x^3 - 12x}$

9.2 Lokální extrémy

Definice 9.1
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální minimum***, resp. ***lokální maximum***, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***ostré lokální minimum***, resp. ***ostré lokální maximum***, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

Má-li funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální extrém***.

Definice 9.2
Bod $x_0 \in D(f)$, ve kterém platí $f'(x_0) = 0$, se nazývá ***stacionární bod***.
Věta 9.2
Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$, anebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta 9.3
Nechť $f'(x_0) = 0$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li
a) $f''(x) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum,
b) $f''(x) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.

Věta 9.4

Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a nechť $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Je-li:

- n liché, pak f nemá v bodě x_0 lokální extrém.
- n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f má v bodě x_0 lokální minimum.
- n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak f má v bodě x_0 lokální maximum.

Příklad 9.2

Najděte lokální extrémy a maximální intervaly monotonie následujících funkcí.

a) $f: y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$ *b)* $g: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

9.3 Konvexnost, konkávnost

Definice 9.3

Řekneme, že funkce f je ***ryze konvexní na intervalu*** $\boldsymbol{I} \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in f$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) < f(x_!) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

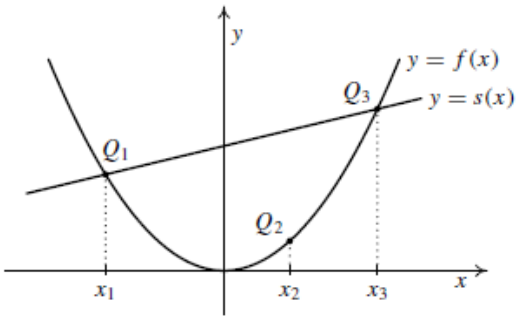
Nahradíme-li v definici 9.3 znak < znakem $\leq$, dostáváme funkci ***konvexní na intervalu*** $\boldsymbol{I}$. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je ***ryze konvexní***, resp. ***konvexní***.

Definice 9.4

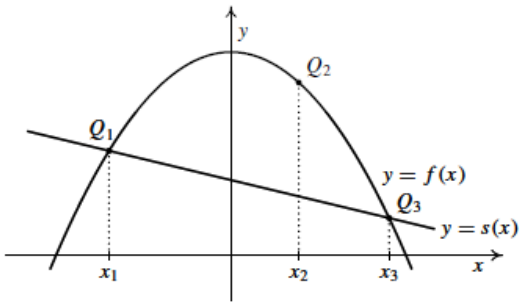
Řekneme, že funkce f je ***ryze konkávní na intervalu*** $\boldsymbol{I} \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in f$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) > f(x_!) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Nahradíme-li v definici 9.4 znak > znakem $\geq$, dostáváme funkci ***konkávní na intervalu*** $\boldsymbol{I}$. Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je ***ryze konkávní***, resp. ***konkávní***.



Graf konvexní funkce (převzato z [1])

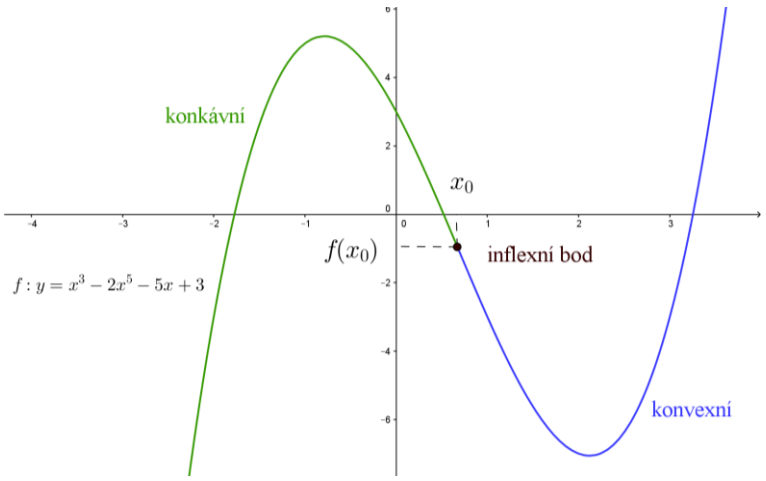


Graf konkávní funkce (převzato z [1])

Definice 9.5
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***inflexi***, jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní, resp. naopak.

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $(x_0, f(x_0))$ nazýváme ***inflexním bodem*** funkce f.

Tj. v inflexním bodě existuje tečna a mění se zde „konvexnost na konkávnost“ anebo naopak.



Věta 9.5
Nechť funkce f má na intervalu $(a, b), a, b \in \mathbb{R}^*$, druhou derivaci. Je-li
a) $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***ryze konvexní*** na (a, b),
b) $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***konvexní*** na (a, b),
c) $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***ryze konkávní*** na (a, b),
d) $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ***konkávní*** na (a, b).

Příklad 9.3
Určete maximální intervaly, na nichž jsou následující funkce konvexní, resp. ryze konvexní a určete jejich inflexní body:

a) $f: y = x^3 + 3x$ *b)* $g: y = \frac{x}{1+x^2}$ *c)* $h: y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$

9.4 Asymptoty grafu funkce

Definice 9.6
Přímka $p: x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá ***svislá asymptota grafu funkce f***, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Svislé asymptoty mohou nastat v bodech nespojitosti definičního oboru nebo v hraničních bodech definičního oboru.

Příklad 9.4

Najděte svislé asymptoty grafů funkcí:

a) $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ *b)* $g: y = x + \frac{\ln x}{x}$

Definice 9.7

Přímka $p: y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu,*** resp. ***v mínus nekonečnu***, jestliže platí:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0.$$

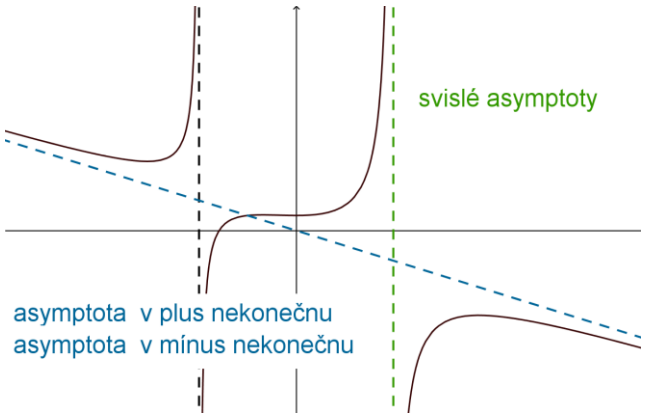
Věta 9.5

Přímka $p: y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu,*** právě když

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a,\ \ a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b,\ \ b \in \mathbb{R}.$$

Přímka $p: y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá ***asymptota grafu funkce f v mínus nekonečnu,*** právě když

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a,\ \ a \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = b,\ \ b \in \mathbb{R}.$$



Příklad 9.5

Najděte asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ grafů funkcí:

a) $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ *b)* $g: y = x + \frac{\ln x}{x}$

9.5 Průběh funkce

Postup:

1. Určíme definiční obor.
2. Rozhodneme, zda je funkce spojitá, resp. určíme body nespojitosti.
3. Rozhodneme, zda je funkce sudá nebo lichá, příp. periodická.
4. Vypočteme f' a $D(f')$.
5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.
6. Určíme intervaly monotonie funkce a lokální extrémy.
7. Vypočteme f'' a $D(f'')$.

8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní a určíme inflexní body.
10. Najdeme svislé asymptoty a asymptoty v $\pm\infty$.
11. Podle potřeby určíme další vlastnosti funkce f (průsečíky s osami, funkční hodnoty ve významných bodech, …)
12. Načrtneme graf funkce f.

Příklad 9.6

Vyšetřete průběh funkcí:

a) $f: y = \frac{x}{3-x^2}$ *b)* $g: y = ln(4 - x^2)$ *c)* $h: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$