8. cvičení – L'Hospitalovo pravidlo

8.1 L'Hospitalovo pravidlo (LP)

Věta 8.1

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámky:

- LP platí i pro jednostranné limity.
- LP říká, že limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se dá v případě, že se jedná o limitu typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{cokoliv}{\pm\infty}\right]$ nahradit limitou $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, za předpokladu, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje.
- LP se dá využít i pro limity typu $[0\cdot(\pm\infty)], \infty-\infty, f(x)^{g(x)}$.
  (Nejprve upravíme na $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right], \left[\frac{\nexists}{\pm\infty}\right]$)
- **POZOR!** Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, nelze LP použít!!! Rozhodně to však neznamená, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

Příklad 8.1

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\cdot\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$ *e)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x^2+1}$ *f)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+x-2}{3x^3+2x^2+x}$

Příklad 8.2

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

8.2 Limity typu $[0\cdot(\pm\infty)]$

Převedeme na typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$.

Příklad 8.3

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2\cdot e^{-x})$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x\cdot \ln\frac{1}{x}$

8.3 Limity typu $[\infty - \infty]$

Převedeme na společného jmenovatele.

Příklad 8.4

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - cotg\, x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\cdot \sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

8.4 Limity typu $\left[f(x)^{g(x)}\right]$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ převedeme na $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)}$.

(Plyne z věty o limitě složené funkce (věta 6.10).)

Poznámka:

- Typ $[0^0] = 1$,
- Typ $[\infty^\infty]$ vede na $[\infty \cdot \infty] = \infty$.

Příklad 8.5

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x$

8.5 Spojitost funkce

Příklad 8.6

Určete, zda je funkce f spojitá v bodě x_0.

a) $f(x) = \begin{cases} cos\, x + \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} & pro\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & pro\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{tg\, 2x}{x} & pro\ x \neq 0 \\ 2 & pro\ x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

8.6 Další příklady na LP

Příklad 8.7

Vypočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(\sin \pi x)}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\, x\right)\ln x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n - x}{x^n - 1}$ $(n \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$