6. cvičení – Limita a spojitost funkce

6.1 Limita funkce

Definice 6.1 (okolí a prstencové okolí)

a) ***Okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}$ (podrobněji δ-okolím bodu x_0) rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $O(x_0)$.

b) ***Okolím bodu*** $+\infty$ rozumíme každý interval $(k; +\infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(+\infty)$.

c) ***Okolím bodu*** $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty; k)$, kde $k \in \mathbb{R}$. Značíme je $O(-\infty)$.

d) ***Prstencovým okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}^*$ rozumíme množinu $O(x_0)\backslash\{x_0\}$. Značíme je $P(x_0)$.

Definice 6.2 (definice limity)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Symbolicky zapsáno:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \big(\forall O(A)\ \exists P(x_0)\ \forall x \in P(x_0): f(x) \in O(A)\big).$$

Poznámka: Limita nám nic neříká o tom, jak se funkce chová přímo v bodě x_0.

Mluvíme o následujících případech limity ($x_0, A \in \mathbb{R}$):

- vlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,
- nevlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$,
- vlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$,
- nevlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

6.2 Jednostranné limity

Definice 6.3

a) ***Levým prstencovým okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta; x_0)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^-(x_0)$.

b) ***Pravým prstencovým okolím bodu*** $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0; x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme je $P^+(x_0)$.

Definice 6.4

a) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zleva rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje levé prstencové okolí $P^-(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^-(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

b) Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(A)$ bodu A existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) \in O(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

6.3 Vlastnosti limit

Věta 6.1
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^*$. Limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné. Zapsáno symbolicky:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A. \right)$$

Věta 6.2
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 6.3
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují $\lim_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0} g(x)$. Pak platí:

[1] $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$,

[2] $\lim_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$,

[3] $\lim_{x \to x_0} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \,/\, \lim_{x \to x_0} g(x)$,

[4] $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right|$,

jsou-li definovány pravé strany výše uvedených rovností.

6.4 Spojitost

Definice 6.5
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Věta 6.4
Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.

Věta 6.5
Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá v bodě $f(x_0)$. Pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.

Věta 6.6
Nechť funkce f je základní elementární funkce a nechť x_0 je vnitřním bodem definičního oboru $D(f)$. Pak funkce f je spojitá v bodě x_0.

6.5 Výpočet limit

Limity funkcí spojitých v bodě

Příklad 6.1

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} arctg\, x$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} e^x$

Příklad 6.2

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x + x^2 + 3)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + 2^x \sin x}{\ln(1+x)+(x+1)\cos x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(x \cdot tg\, x)$

Limity v nevlastních bodech a v bodech, v nichž není funkce definována

Příklad 6.3

Dokažte, že platí $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ *a* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Limity dle věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí (věta 6.3)

Poznámka: Připomeňme si výrazy, které nejsou definovány:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{A}{0}\ (A \in \mathbb{R}^*) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Příklady 6.4

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x + x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to \infty} x\, arctg\, x$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Příklad 6.5

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.

Věta 6.7
Nechť funkce f a g jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Příklady 6.6

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x-\sin x}{\sin^3 x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$

Příklady 6.7

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$

Věta 6.8

Nechť f, g, h jsou funkce a nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ platí $g(x) \le f(x) \le h(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Poznámka: Zapamatujte si, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Důkaz lze najít např. v [1].

Příklady 6.8

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{\sin x+x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x \sin x}$

Věta 6.9

Nechť f, g jsou funkce a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že funkce g je na tomto okolí ohraničená. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Příklad 6.9

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x}$

Věta 6.10

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, A $\in \mathbb{R}$ a nechť platí

a) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$,

b) Funkce f je spojitá v bodě A.

Pak složená funkce $f \circ g$ má v bodě x_0 limitu a platí

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(A).$$

Příklad 6.10

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \cos\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$.

Věta 6.11

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*, A, B \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí

a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$,

b) $\lim_{y\to A} f(y) = B$,

c) Existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $g(x) \neq A$.

Pak $\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = B$.

Příklad 6.11

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Příklad 6.12

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$.

Věta 6.12

Nechť f je funkce a nechť existuje pravé prstencové okolí $P^+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in P^+(x_0)$ platí $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$). Nechť $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0$. Pak platí $\lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$).

Analogicky pro levé prstencové okolí.

Poznámka: Skutečnost obsaženou v předchozí větě budeme symbolicky zapisovat

$$„\frac{1}{0_+} = +\infty“, „\frac{1}{0_-} = -\infty“.$$

Příklad 6.13

Vypočtěte následující limity.

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$

b) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{arctg\, x}{arccotg\, x}$

Příklad 6.14

Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}$

c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2}$

Využití limit pro ověření spojitosti funkce v bodě x_0

Příklad 6.15

Určete, zda jsou následující funkce spojité v bodě x_0.

a) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} x+1 & pro\ x \neq 1 \\ 3 & pro\ x = 1 \end{cases}$

b) $x_0 = 2,\ f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$