5. cvičení – Posloupnosti a limita posloupnosti (opakování ze SŠ)

Pro opakování použijte např.: http://msr.vsb.cz/posloupnosti-a-rady/vlastnosti-posloupnosti

5.1 Základní pojmy

Definice 5.1
Posloupnosti reálných čísel (dále jen posloupnosti) budeme nazývat funkci, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají **členy posloupnosti**. Funkční hodnota posloupnosti f v bodě n se nazývá ***n*-tý člen posloupnosti** a značí se místo $f(n)$ zpravidla f_n.

Zadání posloupnosti

a) **vzorcem pro *n*-tý člen a_n**, např. $a_n = 2n - 1$,
b) **rekurentně** zadáním prvního členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit další členy podle předchozích členů. Např.: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 3$.

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

Příklad 5.1
Určete prvních pět členů následujících posloupností a znázorněte graficky jejich průběh.
a) $a_n = (-1)^{n-1}$
b) $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

Některé vlastnosti posloupností

Posloupnost (a_n) se nazývá

- **shora ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq c$,
- **zdola ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq c$,
- **ohraničená**, právě když existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leq c$,
- **rostoucí**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$,
- **neklesající**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$.

5.2 Aritmetická posloupnost

Definice 5.2
Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

říkáme, že (a_n) je **aritmetická posloupnost** a číslo d se nazývá **diference**.

Pro každou aritmetickou posloupnost (a_n) platí:
a) n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 + (n-1)d$,
b) pro libovolné dva členy posloupnosti a_r, a_s platí $a_s = a_r + (s-r)d$,
c) pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

5.3 Geometrická posloupnost

Definice 5.3
Nechť (a_n) je posloupnost. Existuje-li $q \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

říkáme, že (a_n) je **geometrická posloupnost** a číslo q se nazývá **kvocient**.

Pro každou geometrickou posloupnost (a_n) platí:
a) n-tý člen posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
b) pro libovolné dva členy posloupnosti a_r, a_s platí $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$,
c) pro součet s_n prvních n členů posloupnosti platí $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ pro $q \neq 1$. Je-li $q = 1$, pak $s_n = na_1$.

5.4 Limita posloupnosti

Definice 5.4
Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Symbolicky zapsáno: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon)$

Příklad 5.2

Dokažte z definice, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Definice 5.5
Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu plus nekonečno, jestliže ke každému reálnému číslu k existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n > k$.
Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Symbolicky zapsáno: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{R} \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > k)$

Příklad 5.3

Dokažte z definice, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Definice 5.6

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu mínus nekonečno, jestliže ke každému reálnému číslu l existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0 platí $a_n < l$. Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Symbolicky zapsáno: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall l \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < l)$

Věta 5.1

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice 5.7

Posloupnost (a_n) se nazývá

a) **konvergentní**, jestliže má vlastní limitu (tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$),

b) **divergentní**, jestliže má nevlastní limitu (tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$) nebo limita neexistuje.

Věta 5.2

Každá konvergentní posloupnost je ohraničena.

Definice 5.8

Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n). Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, se nazývá **posloupnosti vybranou** z posloupnosti (a_n).

Věta 5.3

Nechť posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}^*$. Pak každá z ní vybraná posloupnost má tutéž limitu.

Definice 5.9

Limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme Eulerovo číslo a označujeme e.

Věta 5.4

a) Nechť (a_n) je neklesající shora ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n$ a rovná se supremu oboru hodnot této posloupnosti, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n\epsilon\mathbb{N}\}$.

b) Nechť (a_n) je nerostoucí zdola ohraničená posloupnost. Pak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} a_n$ a rovná se infimu oboru hodnot této posloupnosti, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n\epsilon\mathbb{N}\}$.

c) Nechť (a_n) je neklesající posloupnost, která není shora ohraničená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

d) Nechť (a_n) je nerostoucí posloupnost, která není zdola ohraničená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 5.4

Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Příklad 5.5

Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n} = e$.

5.5 Výpočet limit

Věta 5.5

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

b) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,

c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

e) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,

má-li příslušná pravá strana rovnosti smysl.

Základní limity

[1] $\lim_{n\to\infty} c = c \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

[3] $\lim_{n\to\infty} n = \infty$,

[4] $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$,

[5] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

[6] $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & pro\ q > 1, \\ 1 & pro\ q = 1, \\ 0 & pro\ q \in (-1;1), \\ neexistuje & pro\ q \leq -1. \end{cases}$

Příklad 5.6

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty} (n^2 + 5n - 1)$,

b) $\lim_{n\to\infty} (n^2 - 5n - 1)$,

c) $\lim_{n\to\infty} (-n^2 + 5n)$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2+8n-1}{1+2n+3n^2}$,

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2+8n-1}{1+2n}$,

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{8n-1}{1+2n+3n^2}$.

Příklad 5.7

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-2n\right)$,

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4}-3n\right)$,

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}}$,

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{n^4+18n}}$,

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}$.

Příklad 5.8

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$,

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$,

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+4}$,

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}$,

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{3n+2}$,

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n+2}\right)^{3n+2}$.

Příklad 5.9

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Věta 5.6

Nechť jsou dány posloupnosti $(a_n), (b_n)$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$. Jestliže dále

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*, pak\ a \leq b.$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ pak\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$

c) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty,\ pak\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

Příklad 5.10

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} n!$.

Věta 5.7 (o limitě sevřené posloupnosti)

Nechť jsou dány posloupnosti $(a_n), (b_n), (c_n)$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L, L \in \mathbb{R}^*, pak\ \lim_{n\to\infty} c_n = L.$

Příklad 5.11

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4n+5}$,

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n^2+1}{2n-1}$.

Věta 5.8

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost (b_n) je ohraničená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Příklad 5.12

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{sin(n^2+1)}{n}$.

Příklad 5.13

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7}$,

c) $\sqrt[2n]{3^n}$,

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

Příklad 5.14

Vypočtěte limity posloupnosti.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n}$,

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{n}$.