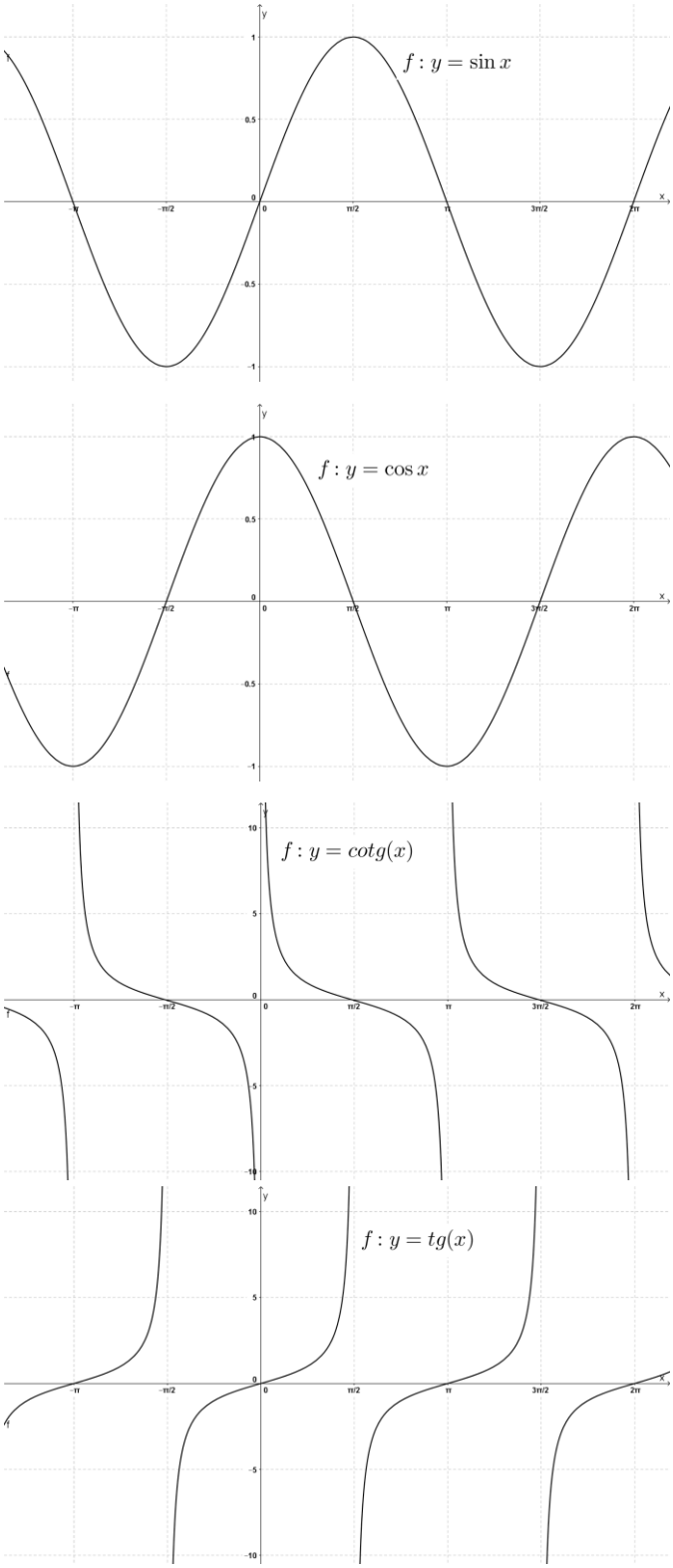
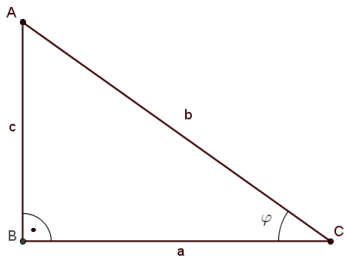
# 4. cvičení – Goniometrické a cyklometrické funkce. Základní goniometrické rovnice a nerovnice.

## 4.1 Goniometrické funkce



## 4.2 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku



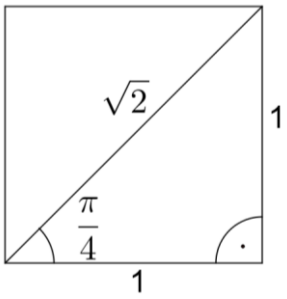

$$\sin\varphi = \frac{c}{b}$$

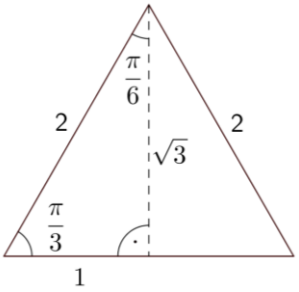
$$\cos\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}\ pro\ \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

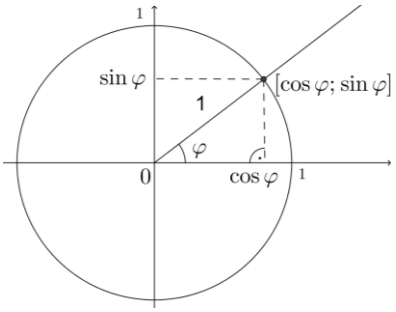
$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{tg\ \varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a}{c}\ pro\ \varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

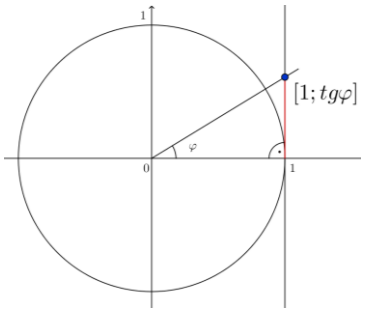
**Goniometrické funkce – základní tabulkové hodnoty**

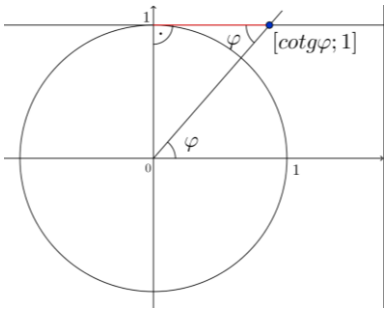



*Pomocné obrázky pro určení goniometrických funkcí úhlů: $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$*




*Jak pracovat s jednotkovou kružnicí při určování hodnot goniometrických funkcí?*

| $\varphi$ | **0** | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **sin φ** | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| **cos φ** | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |
| **tg φ** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | --- |
| **cotg φ** | --- | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

*Tabulka základních hodnot goniometrických funkcí*

***Příklad 4.1***

*Pomocí jednotkové kružnice určete:*

*a)* $sin\frac{3\pi}{4}$

*b)* $cos\frac{3\pi}{4}$

*c)* $tg\frac{3\pi}{4}$

*d)* $cotg\frac{3\pi}{4}$

*e)* $sin\frac{7\pi}{6}$

*f)* $cos\frac{7\pi}{6}$

*g)* $tg\frac{7\pi}{6}$

*h)* $cotg\frac{7\pi}{6}$

*i)* $sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

*j)* $cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

*k)* $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

*l)* $cotg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

***Příklad 4.2***

*Načrtněte grafy následujících funkcí:*

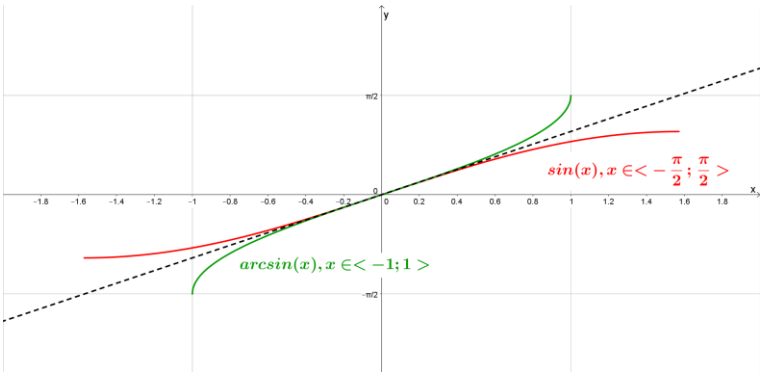
*a)* $f_1: y = 1 - sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

*b)* $f_2: y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$,

## 4.3 Cyklometrické funkce

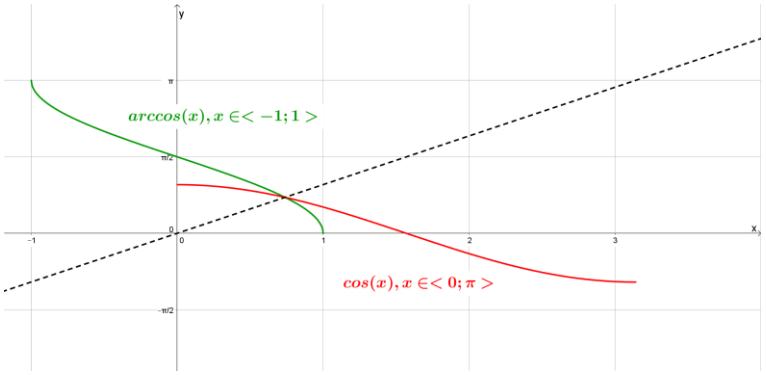
Cyklometrické funkce definujeme jako inverzní funkce k **restrikcím** funkcí goniometrických.

**Arkussinus**



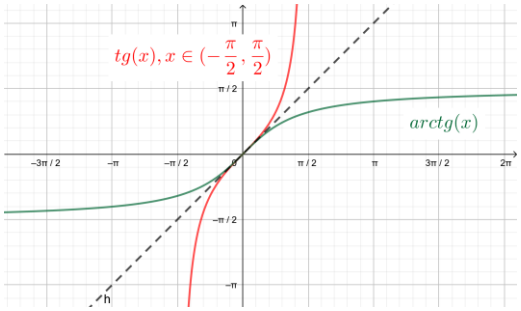

$$f: y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \arcsin x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

**Arkuskosinus**



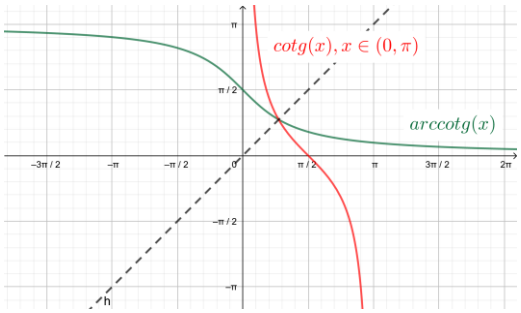

$$f: y = \cos x, x \in \langle 0; \pi \rangle, \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \arccos x, x \in \langle -1; 1 \rangle}$$

**Arkustangens**




$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}}$$

**Arkuskotangens**




$$f: y = \operatorname{cotg} x, x \in (0; \pi), \quad f^{-1}: \boldsymbol{y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R}}$$

***Příklad 4.3***

*Je dána funkce $f: y = sin\frac{2x-1}{3}, x \in \langle -\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\rangle$. Určete funkci $f^{-1}$ inverzní k funkci $f$.*

***Příklad 4.5***

*Je dána funkce $h: y = 3 - 2cotg(x+2), x \in (-2; \pi - 2)$. Určete funkci $h^{-1}$ inverzní k funkci h.*

## 4.4 Goniometrické rovnice

**Goniometrické rovnice** jsou rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.

**Základní goniometrická rovnice** je každá rovnice zapsaná ve tvaru $g(x) = a$, kde $g(x)$ je jedna z goniometrických funkcí $(sin\, x, cos\, x, tg\, x, cotg\, x)$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. (Uvědomte si, že při definici goniometrické rovnice uvažujeme, že $x \in \mathbb{R}$, tzn. že hodnoty neznámé $x$ uvádíme v obloukové míře!!!)

Řešení základních goniometrických rovnic je přímo viditelné z grafů příslušných goniometrických funkcí nebo z jednotkové kružnice.

***Příklad 4.6**:*

*Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

*a)* $sin\, x = \frac{1}{2}$

*b)* $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

*c)* $cotg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

*d)* $sin\, x = -0{,}374\,1$ *(výsledek zapište s přesností na 2 des. místa)*

### Složitější goniometrické rovnice

**Substituce na základní typ**: Pomocí jednoduché substituce $y = x + l$ nebo $y = x \cdot l$ převedeme složitější gon. rovnici typu $g(x + l) = k$ nebo $g(x \cdot l) = k$, kde $g$ je gon. funkce s neznámou $x$ a $l, k$ jsou reálná čísla, na základní typ gon. rovnic $g(x) = k$.

***Příklad 4.7:***

*Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

$$sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Substituce na kvadratickou rovnici**

***Příklad 4.8:***

*Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

$$2cos^2 x - cos\, x - 1 = 0$$

**Dvojnásobný argument** – při řešení tohoto typu úloh se využívají vzorce pro dvojnásobný argument gon. funkcí:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\cos(2x) = cos^2 x - sin^2 x$$

***Příklad 4.9:***

*Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

$$cos\, x + sin\, 2x = 0$$

**Goniometrické funkce součtů a rozdílů, součet a rozdíl gon. funkcí** – při řešení tohoto typu úloh se používají následující vzorce:

$$\sin(x+y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

***Příklad 4.10:***

*Řešte goniometrické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

$$-cos\, 3x = cos\, 7x$$

## 4.5 Goniometrické nerovnice

**Základní goniometrické nerovnice**

***Příklad 4.11:***

*Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

*a)* $sin\, x > 0{,}5$

*b)* $cos\, x < -0{,}5$

*c)* $tg\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Složitější goniometrické nerovnice**

***Příklad 4.12:***
*Řešte goniometrické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.*

$$sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0{,}5$$

## 4.6 Slovní úlohy vedoucí na goniometrické rovnice

***Příklad 4.13**:*
*Silnice má stoupání 3°30‘. O kolik metrů se liší nadmořská výška dvou míst, která jsou od sebe po silnici vzdálená 2km? (Výsledek zaokrouhlete na celé metry.)*

***Příklad 4.14**:*
*Na těleso působí v jednom bodě dvě síly: síla $F_1$ o velikosti $760\ N$ působí ve vodorovném směru (zleva doprava) a síla $F_2$ o velikosti $28{,}8\ N$ působí ve směru svislém (shora dolů). Těleso se vlivem těchto dvou sil dá do pohybu. Určete odchylku trajektorie tělesa od vodorovného směru. (Výsledek zaokrouhlete na celé stupně a minuty.)*

## 4.7 Definiční obory - opakování

***Příklad 4.15:***
*Určete definiční obor funkce f dané předpisem.*

*a)* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \sin(x^2 + 4) + \ln(1 - |x - 3|)$

*b)* $g(x) = 2\arccos\left(\frac{1}{x+3}\right)$

*c)* $h(x) = e^{\sin(x)+x} - \log_2(x + 3) + \frac{4x-7}{\sqrt{x^2+x-2}}$