13. cvičení - Další typy integrálů

13.1 Integrály typu $\int R(e^x)dx$, $\int R(ln\,x)dx$

$\int R(e^x)dx$	substituce: $t = e^x$, $dt = e^x dx$ nebo substituce: $t = e^x \Rightarrow x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}dt$
$\int R(ln\,x)dx$	substituce: $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$

Příklad 13.1

a) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$

b) $\int \frac{ln\,x-1}{(ln^2\,x+1)x}dx$

13.2 Integrály obsahující odmocniny

$\int R\left(x, \sqrt[s]{x}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{x} \Rightarrow x = t^s$, $dx = st^{s-1}dt$
$\int R\left(x, \sqrt[s]{ax+b}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{ax+b} \Rightarrow x = \frac{t^s-b}{a}$, $dx = \frac{s}{a}t^{s-1}dt$
$\int R\left(x, \sqrt[s_1]{x}, \sqrt[s_2]{x}, \dots, \sqrt[s_k]{x}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{x}$, kde s je nejmenší společný násobek $s_1, s_2, \dots, s_k$
$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	substituce: $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Příklad 13.2

a) $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

c) $\int x\sqrt{3-x}dx$

d) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$

e) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$

f) $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx$

g) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

13.3 Integrály obsahující goniometrické funkce

Speciálním případem je $\int sin^n x \cdot cos^m x \, dx$, který řešíme takto:

- je $-$ li n liché: substituce: $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$
- je-li m liché: substituce: $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$
- je-li n, m liché: substituce: $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$
  nebo
  substituce: $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$
- je-li n, m sudé: upravíme pomocí vztahů:
  $sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Příklad 13.3

a) $\int \frac{dx}{\sin x \cdot cos^3 x}$

b) $\int sin^2 x \cdot cos^3 x \, dx$

c) $\int sin^2 x \, dx$

d) $\int sin^4 x \cdot cos^2 x \, dx$