11. cvičení – Úvod do integrálního počtu

11.1 Několik poznámek na úvod

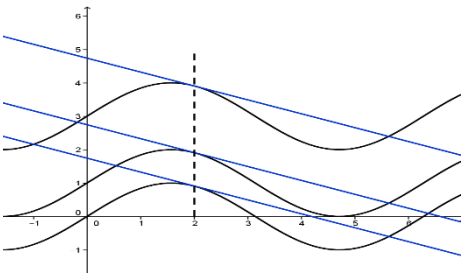
funkce f	derivování → / integrování ←	$f'(x)$ … směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x; f(x)]$
$f(x)$ … poloha bodu pohybujícího se po přímce v čase x	derivování → / integrování ←	$f'(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x
$f(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x	derivování → / integrování ←	$f'(x)$ … okamžité zrychlení bodu v čase x

Integrální počet – Jakou funkci musíme derivovat, abychom získali danou funkci $f(x)$?

Hledáme $F(x)$	derivování → / integrování ←	Známe $f(x) = F'(x)$

Například:

$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + 1$	$\cos x$
$\sin x - 3$	$\cos x$
⋮	⋮
$\sin x + c, c \in \mathbb{R}$	$\cos x$



Geometrická interpretace: Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x; F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ rovnoběžné, tj. mají stejnou směrnici.

Definice 11.1
Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I.
Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkce k funkci f**, jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) = F'(x).$$

Věta 11.1 (O existenci primitivní funkce)
Je-li funkce f spojitá na otevřeném intervalu I, má v I primitivní funkci.

Poznámka: Spojitost je postačující, nikoliv nutnou podmínkou existence primitivní funkce.

Věta 11.2
Je-li F primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, pak funkce $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, jsou právě všechny primitivní funkce k f na I.

Označení: Je-li F primitivní funkce k f, píšeme $\int f(x)dx = F(x)$ a mluvíme o neurčitém integrálu.

Úmluva: Symbol $\int f(x)dx$ pro nás bude znamenat některou z primitivních funkcí k f. Každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty.

Věta 11.3
Na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru příslušné integrované funkce platí:

[1] $\int c\,dx = cx \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$,

[3] $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = ln|x|$,

[4] $\int \sin x\;dx = -\cos x$,

[5] $\int \cos x\;dx = \sin x$,

[6] $\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\,x$,

[7] $\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -cotg\,x$,

[8] $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$,

[9] $\int e^x\,dx = e^x$,

[10] $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctg\,x = -arccotg\,x$,

[11] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsin\,x = -arccos\,x$,

[12] $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$.

Platnost vzorců plyne ze vzorců pro derivování.

Věta 11.4 (O linearitě neurčitého integrálu)
Nechť f a g jsou funkce spojité na otevřeném intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak v I platí

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Příklad 11.1

a) $\int x\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int \sqrt{x}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{x}}$

e) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

f) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx$

i) $\int \left(2x^3-\frac{5}{x^2+1}+\frac{\sin x}{3}\right)dx$

j) $\int \frac{x^2-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}dx$

k) $\int cotg^2 x\,dx$

l) $\int (x-1)^3 dx$

m) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

11.2 Základní integrační metody

11.2.1 Metoda Per Partes

Věta 11.5

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v I. Pak v I platí

$$\int\big(u(x)\cdot v'(x)\big)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int\big(u'(x)\cdot v(x)\big)\,dx.$$

Nejčastější integrály řešené metodou per partes:

Označme $P(x)$ libovolný polynom.

	$\boldsymbol{u(x)}$	$\boldsymbol{v'(x)}$
$\int(P(x)\cdot e^{ax})\,dx$	$P(x)$	e^{ax}
$\int(P(x)\cdot \sin(ax))\,dx$	$P(x)$	$\sin(ax)$
$\int(P(x)\cdot \cos(ax))\,dx$	$P(x)$	$\cos(ax)$
$\int(P(x)\cdot \ln x)\,dx$	$\ln x$	$P(x)$
$\int(P(x)\cdot \arcsin x)\,dx$	$\arcsin x$	$P(x)$
$\int(P(x)\cdot \arccos x)\,dx$	$\arccos x$	$P(x)$
$\int(P(x)\cdot \operatorname{arctg} x)\,dx$	$\operatorname{arctg} x$	$P(x)$
$\int(P(x)\cdot \operatorname{arccotg} x)\,dx$	$\operatorname{arccotg} x$	$P(x)$

Příklad 11.2

a) $\int (x^2+1)e^x dx$

b) $\int x\cdot ln\,x\,dx$

c) $\int ln\,x\,dx$

d) $\int x\cdot arctg\,x\,dx$

e) $\int (x^2-3x+2)e^x dx$

f) $\int ln(x^2+1)\,dx$

g) $\int (x^2-2x)\cdot arctg\,x\,dx$

Příklad 11.3

a) $\int \cos x \cdot e^x dx$

b) $\int \cos^2 x \, dx$

c) $\int \sin 3x \cdot e^x dx$

11.2.2 První substituční metoda

Věta 11.6

Nechť

- funkce φ má na intervalu $(a; b)$ konečnou derivaci a pro všechna $x \in (a; b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha; \beta)$,
- funkce f je spojitá v $(\alpha; \beta)$.

Buď F libovolná primitivní funkce k f na $(\alpha; \beta)$. Pak v $(a; b)$ platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \; dx = F\big(\varphi(x)\big).$$

Píšeme: $\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \; dx = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t) \, dt = F(t) = F\big(\varphi(x)\big)$

Příklad 11.4

a) $\int \sin^4 x \cdot \cos x \; dx$

b) $\int \frac{1}{x}(\ln^3 x - \ln x) \, dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$

d) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \, dx$

e) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \, dx$

f) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \, dx$

g) $\int \cos(5x - 1) \; dx$

h) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

i) $\int (1 - \pi x)^{2000} \, dx$

j) $\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}} \, dx$

k) $\int x\sqrt{1 + 3x^2} \, dx$

l) $\int \frac{x^9}{(x^5+1)^3} \, dx$