

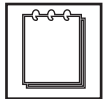
9.7. Vybrané aplikace

Cíle



V rámci témat zaměřených na lineární diferenciální rovnice a soustavy druhého řádu (kapitoly 9.1 až 9.6) jsme dosud neuváděli žádné aplikace. Je jim společně věnována tato závěrečná kapitola, v níž jsou řešeny zejména počáteční úlohy pro evoluční procesy – pohybové rovnice, harmonické kmity, elektrické obvody apod.

Poznámka



Z výše uvedených důvodů je v následujících úlohách nezávisle proměnnou veličinou čas t , který hraje roli dosud používané proměnné x .

Výklad



Ze široké nabídky aplikací, v nichž se v různých oblastech uplatňují diferenciální rovnice druhého řádu nebo soustavy diferenciálních rovnic, je v rámci řešených úloh vybráno do této kapitoly několik typických ukázek zastupujících nejrozšířenější okruhy jejich použití. Při jejich studiu je užitečné si zároveň uvědomit, že v praxi je stejně důležitá znalost postupu řešení jako dovednost sestavit úlohu a matematicky formulovat zadaný problém.

Položíme-li si otázku, proč se při teoretickém popisu procesů a stavů v (nejen) technických a přírodovědných disciplínách setkáváme právě s diferenciálními rovnicemi, je odpověď překvapivě jednoduchá:

diferenciální rovnice jsou přepisem globálních zákonů zachování (energie, hmotnosti, síly, elektrického náboje aj.) do podoby, v níž je možno studovat stavové, resp. tokové veličiny v daném místě nebo čase včetně jejich lokálních změn.

Řešené úlohy



Příklad 9.7.1. Vozidlo o hmotnosti m se pohybuje po přímce působením konstantní síly F , která má směr pohybu. Vozidlo překonává odpor R úměrný okamžité rychlosti $v(t)$. Formulujte a řešte pohybovou rovnici pro závislost dráhy $y(t)$ na čase při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Řešení: Nejprve si připomeneme potřebné fyzikální vztahy. Rychlost v a zrychlení a jsou derivacemi dráhy podle času, tj.

$$v(t) = \frac{dy}{dt}, \quad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Konstantu úměrnosti zahrnující odpor prostředí a případné tření označíme k , takže bude $R = k \cdot v(t)$. Zákonem zachování síly vyjádříme za použití druhého Newtonova zákona $F = ma$ základní bilanční vztah

$$ma + R = F \quad \implies \quad m \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} = F,$$

který po vydělení hmotností m dává základní pohybovou rovnici

$$y'' + \frac{k}{m} y' = \frac{F}{m}.$$

Máme před sebou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a s nenulovou pravou stranou, při jejímž řešení uplatníme znalosti z kapitol 9.3. a 9.4. Charakteristická rovnice $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$ má kořeny $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{k}{m}$, takže obecné řešení zkrácené rovnice bude mít tvar

$$\hat{y}(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Partikulární řešení pro úplnou rovnici můžeme hledat metodou neurčitých koeficientů. Protože je však konstantní pravá strana již zastoupena konstantou ve fundamentálním systému (jeden z kořenů charakteristické rovnice je nula), musíme zvolit

$$v(t) = A \cdot t, \quad v'(t) = A, \quad v'' = 0.$$

Po dosazení funkce $v(t)$ a jejích derivací do úplné rovnice snadno vypočteme, že $A = \frac{F}{k}$. Pro obecné řešení a jeho derivaci (rychlost pohybu) tedy vychází

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k} t, \quad y'(t) = v(t) = -\frac{k}{m} C_2 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}.$$

Počáteční podmínky v bodě $t = 0$ vedou na soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= -\frac{k}{m} C_2 + \frac{F}{k}, \end{aligned} \quad \text{odkud} \quad C_1 = -\frac{Fm}{k^2}, \quad C_2 = \frac{Fm}{k^2}.$$

Dosazením do obecného řešení a úpravou obdržíme hledanou závislost dráhy na čase:

$$y(t) = \frac{F}{k} \left[t + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) \right].$$

Příklad 9.7.2. Na pružině je zavěšeno závaží o hmotnosti m , které je v rovnovážné poloze. Vychýlíme-li je o y_0 a uvolníme (případně mu udělíme určitou počáteční rychlost), dochází v důsledku pružné deformace ke kmitavému pohybu (obr. 9.7.1). Odvoďte příslušnou diferenciální rovnici pro okamžitou výchylku $y(t)$ za předpokladu, že odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti pohybu. Proveďte analýzu řešení.

Řešení: Označíme $2b$ faktor vyjadřující odpor okolí, takže odporující síla má velikost $R = 2b \cdot y'(t)$. Rovnováha sil bude vyjádřena rovnicí

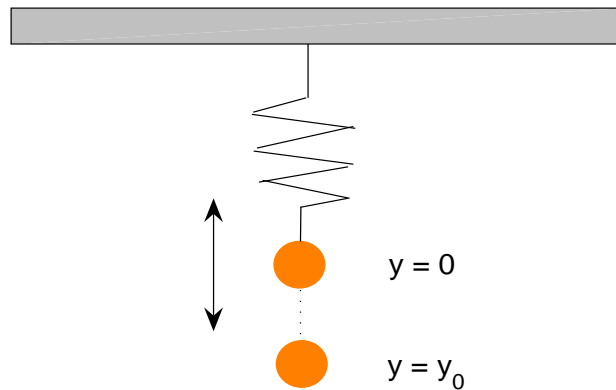
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + k y(t) = 0,$$

kde k je tuhost pružiny. Dále označíme

$$a = \frac{b}{m} > 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

a po vydělení hmotností m obdržíme základní **rovnici vlastních mechanických kmitů v odporujícím prostředí**:

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2 y = 0.$$



Obr. 9.7.1. Obrázek k příkladu 9.7.2.

K ní příslušná charakteristická rovnice $r^2 + 2ar + \omega_0^2 = 0$ má kořeny

$$r_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}.$$

Je zřejmé, že lze rozlišit tři možnosti, které mají zásadní vliv na charakter děje.

(I) $a^2 - \omega_0^2 > 0$, tj. $a > \omega_0$

Charakteristická rovnice má dva různé záporné reálné kořeny

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2},$$

obecným řešením rovnice je exponenciální funkce

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = e^{-at} \left(C_1 e^{-\sqrt{a^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{\sqrt{a^2 - \omega_0^2} t} \right).$$

Děj je neperiodický, s rostoucím časem klesá výchylka k nule. Jedná se o **silně tlumený neharmonický pohyb**.

(II) $a^2 - \omega_0^2 = 0$, tj. $a = \omega_0$

Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r = -a$, obecným řešením je opět výraz s exponenciální funkcí

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-at}.$$

Jde o tzv. **kriticky tlumený pohyb**, který je neperiodický stejně jako předchozí silně tlumený pohyb.

(III) $a^2 - \omega_0^2 < 0$, tj. $a < \omega_0$

Z charakteristické rovnice vychází dvojice komplexně sdružených kořenů

$$r_{1,2} = -a \pm i\sqrt{\omega_0^2 - a^2} = -a \pm i\omega, \quad \text{kde } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}.$$

Jak víme z dřívější teorie, lze obecné řešení v tomto případě psát ve tvaru

$$y(t) = e^{-at}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

V tomto výsledku ještě provedeme menší úpravy, abychom ho mohli lépe fyzikálně interpretovat. Položíme-li $C_1 = -A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, bude pro výraz v závorce platit

$$-A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t = A \sin(\omega t - \varphi).$$

Obecným řešením je nyní funkce

$$y(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t - \varphi),$$

v níž A je amplituda a φ fáze děje, který nazýváme **slabě tlumený harmonický pohyb**. Jeho perioda je

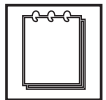
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}}$$

a má amplitudu Ae^{-at} , která s časem klesá k nule.

Poznámka

1. Snadno lze potlačit vliv odporu prostředí tak, že v základní rovnici položíme $a = 0$. Příslušné důsledky pro řešení si odvoďte samostatně.

2. Zatímco v případě reálných kořenů – varianta (I) a (II) – se při aplikaci počátečních podmínek neodchylujeme od dříve zavedeného postupu, v případě periodického děje se amplituda a fáze určují způsobem, který je poněkud specifický, a proto mu věnujeme následující řešený příklad.



Příklad 9.7.3. Vyšetřete harmonický pohyb popsany rovnicí $y'' + 2y' + 101y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 9$.

Řešení: V rovnici je $a = 1$ menší než úhlová frekvence $\omega_0 = 101$, proto se jedná tlumený periodický pohyb o frekvenci

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} = 10 ,$$

který je popsán funkcí

$$y(t) = Ae^{-t} \sin(10t - \varphi) .$$

Přistoupíme nyní k výpočtu amplitudy a fáze z počátečních podmínek. Protože

$$y'(t) = -Ae^{-t} \sin(10t - \varphi) + 10Ae^{-t} \cos(10t - \varphi) ,$$

obdržíme pro $t = 0$ soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= -A \sin \varphi , \\ 9 &= A \sin \varphi + 10A \cos \varphi . \end{aligned}$$

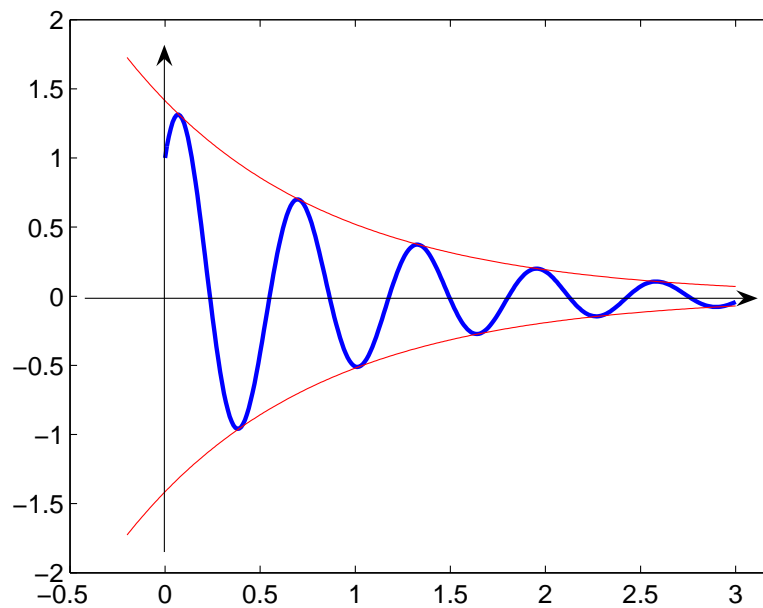
Dosadíme-li z první rovnice do druhé (nebo: sečteme-li obě rovnice), vychází jednodušší rovnice $1 = A \cos \varphi$, kterou použijeme spolu s první rovnicí:

$$\begin{aligned} 1 &= -A \sin \varphi , \\ 1 &= A \cos \varphi . \end{aligned}$$

Jestliže obě rovnice umocníme na druhou a sečteme, máme $2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$; vydělíme-li první rovnici druhou, bude $1 = -\operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$. Výsledný tlumený harmonický pohyb je tedy určen předpisem

$$y(t) = \sqrt{2} e^{-t} \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) .$$

Část grafu této funkce je na obr. 9.7.2.



Obr. 9.7.2. Harmonické tlumené kmity - k příkladu 9.7.3. Červeně jsou znázorněny funkce $\pm\sqrt{2}e^{-t}$ charakterizující úbytek amplitudy.

Příklad 9.7.4. Proveďte analýzu proudových poměrů v primárním a sekundárním obvodu transformátoru (obr. 9.7.3) za těchto předpokladů:

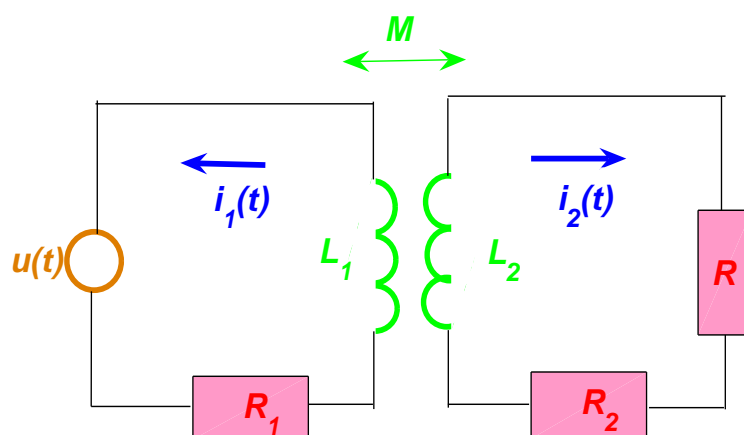
- primární vinutí je napájeno napětím $u(t)$, ohmická zátěž sekundárního vinutí je R ,
- indukčnosti a odpory primárního a sekundárního obvodu jsou po řadě L_1, R_1, L_2, R_2 ,
- vzájemná indukčnost je M ,
- počáteční proudy jsou nulové.

Řešení: Pro proudy $i_1(t)$ a $i_2(t)$ na základě Kirchhoffových zákonů platí:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} + R_1 i_1(t) = u(t) ,$$

$$M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + (R_2 + R) i_2(t) = 0 .$$

Jedná se o soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro proudy $i_1(t), i_2(t)$ s počátečními podmínkami $i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$. Jako sa-

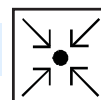


Obr. 9.7.3. Primární a sekundární obvod transformátoru.

mostatné cvičení si můžete provést převod této úlohy eliminační metodou na diferenciální rovnici druhého řádu například pro funkci $i_1(t)$ s tímto výsledkem:

$$(L_1 L_2 - M^2) i_1'' + [L_1(R + R_2) + L_2 R_1] i_1' + R_1(R + R_2) i_1 = (R + R_2) u + L_2 u' .$$

Úlohy k samostatnému řešení



1. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce z bodu A do bodu B působením konstantní síly F , která má směr pohybu. Odpor prostředí je přímo úměrný vzdálenosti tělesa od bodu B , přičemž v bodě A je jeho hodnota f . Odvoďte a řešte jeho pohybovou rovnici za předpokladů, že $f < F$ a že rychlost v bodě A je nulová.

2. Sestavte jednoduchý model uzavřeného systému „kořist – dravec“ z hlediska časového vývoje počtu jedinců v obou populacích. U funkcí představujících počty zástupců v populacích předpokládejte spojitost v čase. Uvažujte následující faktory, na nichž proces závisí lineárně s konstantními koeficienty:

- reprodukční schopnost každé z populací,
- úbytek kořisti působením dravců,
- přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

3. Napište diferenciální rovnici pro tlumené nucené kmity s vlastní frekvencí

ω_0 a tlumícím faktorem $2a$. Nutící síla vztažená na jednotku hmotnosti má amplitudu F , úhlovou frekvenci Ω a nulový fázový posuv. Úlohu řešte pro hodnoty $a = 0,05$, $\omega_0^2 = 1,0025$, $F = 30$ a $\Omega = 3$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. Označíme-li $y(t)$ dráhu jako funkci času a s vzdálenost bodů A, B , je odporová síla vyjádřena vztahem $R = k(s - y)$, kde k je konstanta úměrnosti. V bodě A , kde je $y = 0$, platí podle předpokladu $R = f = k \cdot s$, tj. $k = f/s$. Při rovnováze sil je $my'' = F - R$, tedy po úpravě

$$y'' - \frac{f}{sm}y = \frac{F - f}{m},$$

což je hledaná pohybová rovnice. Její řešení má tvar

$$y(t) = \frac{s}{2f}(F - f)(e^{bt} - e^{-bt})^2, \quad \text{kde} \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{sm}}.$$

2. Označíme $x(t)$ počet jedinců v populaci kořisti, tj. potravy pro populaci dravců, v níž počet jedinců bude $y(t)$. V lineárním modelu zavedeme nezáporné konstanty a, b, c, d, s jejichž pomocí vyjádříme zadané změny v populacích:

$ax, cy \dots$ reprodukční schopnost příslušné populace,

$by \dots$ úbytek kořisti působením dravců,

$dx \dots$ přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

Chování systému v závislosti na čase vyjadřuje soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \quad \frac{dy}{dt} = dx + cy.$$

Počátečními podmínkami jsou výchozí stavy populací.

3. Nutící síla bude tvořit pravou stranu diferenciální rovnice kmitů, která tak bude mít tvar

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2y = F \sin \Omega t, \quad \text{tj.} \quad y'' + 0,1y' + 1,0025y = 30 \sin 3t.$$

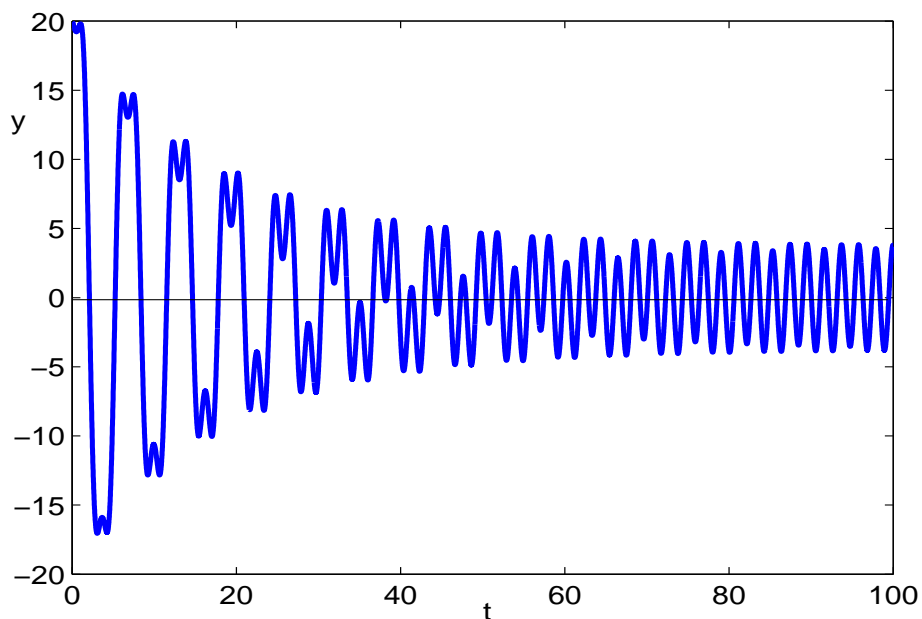
Její obecné řešení budeme hledat ve tvaru

$$y(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t - \varphi) + v(t) ,$$

kde $v(t) = B \sin(\Omega t - \psi)$ je partikulární integrál. Jeho parametry B , ψ určíme metodou neurčitých koeficientů. Dále je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$ a konstanty A a φ stanovíme z počátečních podmínek. Konečný výsledek představuje funkce

$$y(t) = 23,57e^{-0,05t} \sin(t + 1,02) + 3,75 \sin(3t - 3,10) .$$

Na jejím grafu (obr. 9.7.4) je dobře patrný přechod od vlastních kmitů ke stadiu, v němž systém kmitá zcela pod vlivem nutící síly.



Obr. 9.7.4. Přechod od vlastních kmitů k nuceným – k úloze 3.

Poznámka

Ve speciálním případě může nastat případ $\omega = \Omega$, rovná-li se frekvence vlastních kmitů frekvenci nutící síly. Z fyzikálního hlediska dochází k tzv. rezonanci, matematické řešení se najde na principu varianty (III) na str. 397 (kap. 9.4). Obecné odvození pro tuto situaci lze nalézt například v publikaci [18].

