

8.2. Exaktní rovnice

Cíle



Ve výkladu o funkcích dvou proměnných jsme se seznámili také s jejich diferenciálem prvního řádu, který je pro funkci $F(x, y)$ vyjádřen výrazem

$$dF = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy .$$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze od této diferenciální formule přejít zpět k funkci $F(x, y)$. Poznatky, které získáme, hrají rovněž významnou roli v souvislosti s aplikacemi ve fyzice.

Definice 8.2.1.

Diferenciální rovnice $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ se nazývá **exaktní**, je-li výraz $P(x, y) dx + Q(x, y)$ **totálním diferenciálem** jisté funkce $F(x, y)$ označované jako **kmenová funkce**.

Věta 8.2.1.

Jsou-li funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$ diferencovatelné na oblasti Ω , pak je rovnice $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} .$$

Je-li $F(x, y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar

$$F(x, y) = C .$$

Důkaz: Je-li $P(x, y) dx + Q(x, y)$ totálním diferenciálem funkce $F(x, y)$, musí být

$$dF = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy .$$

Odtud plyne pro parciální derivace funkcí $P(x, y)$, $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Podle předpokladu jsou derivace spojitě, takže

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \implies \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

což jsme měli dokázat.

Důkaz opačného tvrzení,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \implies \text{exaktnost rovnice } P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

je poněkud náročnější a lze se s ním seznámit např. v [17]. Snadno dokážeme poslední část tvrzení: má-li být $F(x, y) = C$ obecným řešením rovnice, pak musí vyhovět zkoušce. Skutečně, diferencováním tohoto vztahu dostáváme

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = 0,$$

a tedy $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, což jsme měli dokázat.

Výklad



Z předchozí věty je zřejmé, že řešit exaktní rovnici znamená určit kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li kupříkladu z rovnosti

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y),$$

můžeme kmenovou funkci určit integrací:

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + K(y) = U(x, y) + K(y).$$

Ve výsledku je $U(x, y)$ primitivní funkce a $K(y)$ integrační „konstanta“, která může ovšem záviset na druhé proměnné. Tuto veličinu určíme z podmínky

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} = Q(x, y).$$

Pak

$$K(y) = \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy .$$

Zbývá ovšem dokázat, že integrand $Q(x, y) - \frac{\partial U}{\partial y}$ nezávisí na proměnné x , tedy že jeho derivace podle této proměnné je rovna nule:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(Q - \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 .$$

Poznámka

Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy + L(x) = V(x, y) + L(x)$$

a pokračovat určením funkce $L(x)$. Je proto obvyklé tyto postupy spojit a formálně vypočítat oba integrály

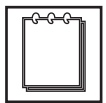
$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + K(y) = U_1(x, y) + C_1 ,$$

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy + L(x) = U_2(x, y) + C_2 ,$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty. Kmenovou funkci $F(x, y)$ vytvoříme sloučením veličin $U_1(x, y)$ a $U_2(x, y)$, přičemž členy, které se vyskytují současně v obou výrazech, uvažujeme pouze jedenkrát.

Celý algoritmus řešení exaktní rovnice pak vypadá takto:

1. Otestujeme exaktnost rovnice podmínkou $P'_y = Q'_x$.
2. Určíme kmenovou funkci $F(x, y)$ některou z výše uvedených metod.
3. Zapišeme řešení rovnice ve tvaru $F(x, y) = C$.



Řešené úlohy

Příklad 8.2.1. Řešte rovnici $(2xy - 2x - 1)dx + (x^2 + 2y + 1)dy = 0$.

Řešení: Ověříme exaktnost rovnice na základě parciálních derivací:

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) = 2xy - 2x - 1 \quad \implies \quad P'_y = 2x, \\ Q(x, y) = x^2 + 2y + 1 \quad \implies \quad Q'_x = 2x \end{array} \right\} \implies \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Nyní aplikujeme postup uvedený v poslední poznámce:

$$\int P(x, y) dx = \int (2xy - 2x - 1) dx = x^2y - x^2 - x + C_1,$$

$$\int Q(x, y) dy = \int (x^2 + 2y + 1) dy = x^2y + y^2 + y + C_2.$$

Do kmenové funkce sepíšeme všechny získané členy, avšak smíšený člen x^2y pouze jedenkrát:

$$F(x, y) = x^2y - x^2 + y^2 - x + y.$$

Hledané řešení má tvar $F(x, y) = C$, tj.

$$x^2y - x^2 + y^2 - x + y = C.$$

Správnost výsledku snadno ověříme zkouškou.

Příklad 8.2.2. Řešte rovnici $(2y - x \sin 2y)y' = \sin^2 y$.

Řešení: Nejprve rovnici přepíšeme do vhodnějšího tvaru

$$\sin^2 y dx + (x \sin 2y - 2y) dy = 0$$

a dále zopakujeme postup z předchozí úlohy:

$$P(x, y) = \sin^2 y \quad \implies \quad P'_y = 2 \sin y \cos y = \sin 2y,$$

$$Q(x, y) = x \sin 2y - 2y \quad \implies \quad Q'_x = \sin 2y.$$

Parciální derivace se rovnají, takže jde opět o exaktní rovnici, a proto

$$\int P(x, y) dx = \int \sin^2 y dx = x \sin^2 y + C_1,$$

$$\int Q(x, y) dy = \int (x \sin 2y - 2y) dy = -\frac{1}{2}x \cos 2y - y^2 + C_2.$$

Ze získaných dílčích výsledků dostáváme kmenovou funkci

$$F(x, y) = x \sin^2 y - \frac{1}{2}x \cos 2y - y^2.$$

Bohužel, **výsledek je chybný!** Je totiž

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin^2 y - \frac{1}{2} \cos 2y \neq \sin^2 y = P(x, y).$$

Zkusíme proto původní postup:

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx = \int \sin^2 y dx = x \sin^2 y + K(y),$$

a dále

$$\frac{\partial}{\partial y}(x \sin^2 y + K(y)) = x \sin 2y + K'(y) = x \sin 2y - 2y \quad (= Q(x, y)).$$

Odtud

$$K'(y) = -2y \implies K(y) = \int (-2y) dy = -y^2.$$

Novým výsledkem je tedy funkce

$$F(x, y) = x \sin^2 y - y^2$$

a správné řešení

$$x \sin^2 y - y^2 = C$$

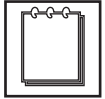
(přesvědčte se zkouškou). Zbývá vysvětlit, čím byla způsobena chyba v prvním postupu. Rozepíšeme-li totiž funkci $x \sin^2 y$ podle známého vzorce z trigonometrie, obdržíme

$$x \sin^2 y = x \frac{1}{2}(1 - \cos 2y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \cos 2y.$$

Druhý člen však již v předchozím dílčím výsledku máme, a tedy první verze kmenové funkce byla sestavena chybně.

Poznámka

Předchozí příklad neznámá odmítnutí postupu, úspěšně použitého v úloze 8.2.1. Upozorňuje pouze na jistou dávku obezřetnosti, s níž musíme k řešení exaktních rovnic přistupovat.



Kontrolní otázky



Otázka 1. Definujte exaktní diferenciální rovnici a formulujte podmínku, na jejímž základě se exaktnost ověří.

Otázka 2. Jaké jsou postupy při řešení exaktní rovnice?

Otázka 3. Vysvětlete pojem „kmenová funkce“.

Úlohy k samostatnému řešení



1. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a najděte její obecné, případně partikulární řešení:

$$\text{a) } (1 + x \cos 2y) dx - x^2 \sin 2y dy = 0$$

$$\text{b) } y' \left(\frac{\ln x}{y^2} - y \right) = \frac{1}{xy}, \quad y(1) = 2,$$

$$\text{c) } \left(\ln(x - y) + \frac{x}{x - y} \right) dx - \frac{x}{x - y} dy = 0.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $x + \frac{1}{2}x^2 \cos 2y = C$, b) $y^3 + 2 \ln x = 4y$, c) $x \ln(x - y) = C$.