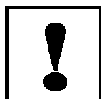


### 3.5. Fyzikální aplikace



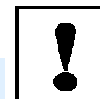
#### Cíle

Seznámíte se s použitím určitého integrálu při výpočtu hmotnosti, statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti.



#### Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.



#### Výklad

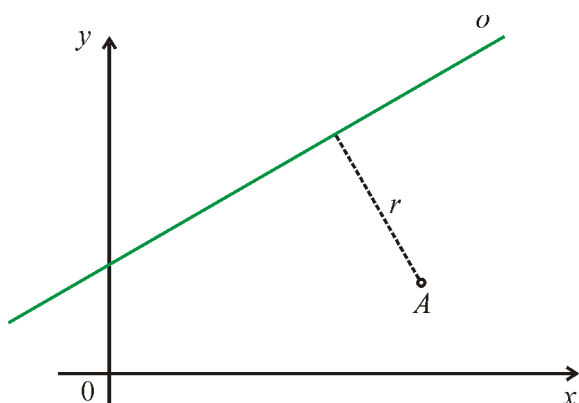
Jak již bylo uvedeno v úvodu 3. kapitoly, existuje nepřehledné množství problémů, při jejichž řešení je používán integrální počet. V průběhu studia se seznámíte s použitím integrálů ve fyzice a v dalších odborných předmětech. V této kapitole se omezíme pouze na jednoduché aplikace v mechanice. Půjde o výpočet statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti hmotných křivek a rovinných oblastí.



V obecném případě, kdy veličiny závisí na dvou nebo třech proměnných se k výpočtu používají dvojné nebo trojné integrály. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

#### Těžiště a moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů

Připomeňme si, jak je v mechanice definován statický moment a moment setrvačnosti. Uvažujme v rovině jeden hmotný bod  $A = (x, y)$  s hmotností  $m$ .



Obr. 3.5.1. Hmotný bod  $A$  v rovině

Statický moment hmotného bodu k libovolné ose  $o$  je dán vztahem

$$S_o = r m$$

a moment setrvačnosti uvedeného bodu při jeho rotaci kolem osy  $o$  je

$$I_o = r^2 m,$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu od osy  $o$  (obr. 3.5.1). Pokud je uvažovanou osou osa  $x$ , je  $r = y$  a pro osu  $y$  je  $r = x$ .

Mějme v rovině soustavu hmotných bodů  $A_i = (x_i, y_i)$  s hmotnostmi  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Celková hmotnost soustavy bude 
$$m = \sum_{i=1}^n m_i,$$

statický moment k ose  $x$  bude 
$$S_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i,$$

statický moment k ose  $y$  bude 
$$S_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

a momenty setrvačnosti budou 
$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i, \quad I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i.$$

Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  je bod s touto vlastností: Kdyby do něj byla soustředěna všechna hmota soustavy, pak by tento bod měl stejné statické momenty k souřadnicovým osám, jako daná soustava hmotných bodů. Tedy pro těžiště platí

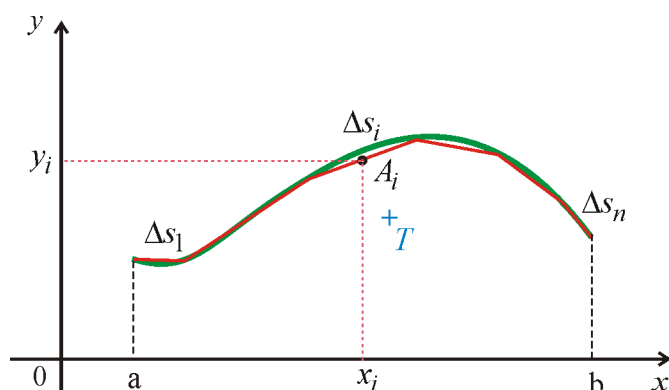
$$\xi m = S_y \quad \text{a} \quad \eta m = S_x.$$

Odtud dostáváme pro souřadnice těžiště vztahy 
$$\xi = \frac{S_y}{m}, \quad \eta = \frac{S_x}{m}.$$

Při výpočtu souřadnic těžiště hmotné křivky nebo rovinné oblasti budeme postupovat jako při zavedení určitého integrálu. Křivku (oblast) rozdělíme na malé elementy. Statické momenty (hmotnost) dostaneme jako součet statických momentů (hmotností) těchto elementů. Limitním přechodem pro  $n \rightarrow \infty$  přejdou sumy na integrály.

### Těžiště a moment setrvačnosti rovinné křivky

Křivku v rovině si můžeme představit jako kus drátu z materiálu, který má konstantní délkovou hustotu  $\sigma$ . Chceme nalézt souřadnice těžiště této křivky (obr. 3.5.2).



Obr. 3.5.2. Těžiště rovinné křivky

Předpokládejme, že je křivka dána parametrickými rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , přičemž funkce  $\varphi(t)$  a  $\psi(t)$  mají spojité derivace na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

Její délka (věta 3.2.2) je  $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ .

Hmotnost křivky dostaneme jako součin délky a hustoty:

$$m = \sigma s = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Křivku můžeme aproximovat lomenou čarou složenou z úseček  $\Delta s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Úsečky budou mít hmotnosti  $m_i = \sigma \Delta s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . V případě malých elementů si můžeme představit, že hmotnost je soustředěna do jednoho bodu  $A_i = (x_i, y_i)$ , který leží na dané úsečce  $\Delta s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Statické momenty této lomené čáry budou

$$S_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^n y_i \Delta s_i,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^n x_i \Delta s_i.$$

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet úseček budeme dostávat přesnější aproximace statických momentů. Pro  $n \rightarrow \infty$  dostaneme (analogicky jako v kap. 3.2.)

$$S_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

$$S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Podobně odvodíme vztahy pro momenty setrvačnosti při rotaci kolem osy  $x$ , resp.  $y$ .

**Věta 3.5.1.**

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , přičemž funkce  $\varphi(t)$  a  $\psi(t)$  mají spojité derivace na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Je-li délková hustota  $\sigma$  křivky konstantní, pak má křivka hmotnost

$$m = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt ,$$

$$S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt .$$

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt ,$$

$$I_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt .$$

Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  má souřadnice  $\xi = \frac{S_y}{m}$ ,  $\eta = \frac{S_x}{m}$ .

Je-li speciálně křivka grafem funkce  $y = f(x)$  s konstantní délkovou hustotou, pak je  $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  (věta 3.2.1). Dostáváme následující modifikaci věty 3.5.1.

**Věta 3.5.2.**

Nechť je hmotná křivka určena explicitní rovnicí  $y = f(x)$  se spojitou derivací  $f'(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a konstantní délkovou hustotou  $\sigma$ . Pak má křivka hmotnost

$$m = \sigma \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx ,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x = \sigma \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx ,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$

Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  má souřadnice  $\xi = \frac{S_y}{m}$  ,  $\eta = \frac{S_x}{m}$  .

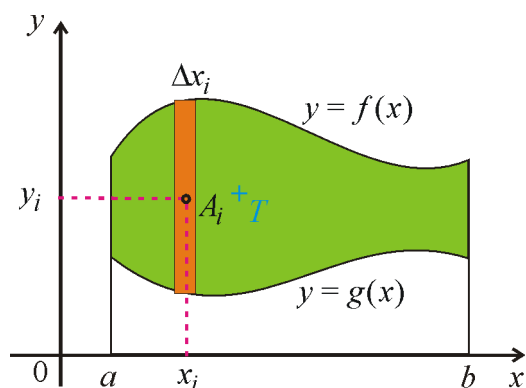
### Těžiště a moment setrvačnosti rovinné oblasti

Uvažujme hmotnou rovinnou oblast ohraničenou zdola grafem funkce  $g(x)$ , shora grafem funkce  $f(x)$ , ( $g(x) \leq f(x)$ ) pro  $x \in \langle a, b \rangle$ . Předpokládejme, že je plošná hustota  $\sigma$  v každém bodě tohoto obrazce konstantní.

Hmotnost rovinné oblasti dostaneme jako součin obsahu plochy oblasti (věta 3.1.2) a hustoty:

$$m = \sigma \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Analogicky jako při zavedení určitého integrálu (kapitola 2.1) rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou  $y$  na  $n$  „proužků“ (obr. 3.5.3). Každý proužek můžeme aproximovat úzkým obdélníčkem šířky  $\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , který je zdola ohraničený funkční hodnotou  $g(x_i)$  a shora funkční hodnotou  $f(x_i)$ . Tento obdélníček nahradíme těžištěm  $A_i = (x_i, y_i)$  ležícím ve středu obdélníčku. Pro obdélníček bude  $y_i = \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}$ . Do tohoto bodu soustředíme hmotnost celého obdélníčku.



Obr. 3.5.3. Těžiště rovinné oblasti

Hmotnost  $i$  - tého obdélníčku bude

$$m_i = \sigma [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Statické momenty celé oblasti budou přibližně rovny

$$S_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2} [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x_i = \sigma \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f^2(x_i) - g^2(x_i)] \Delta x_i,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^n x_i [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x_i.$$

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet obdélníčků budeme dostávat přesnější aproximace statických momentů. Pro  $n \rightarrow \infty$  a  $\Delta x_i \rightarrow 0$  dostaneme limitním přechodem

$$S_x = \sigma \frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Podobně odvodíme vztahy pro momenty setrvačnosti při rotaci kolem osy  $x$ , resp.  $y$ .

### Věta 3.5.3.

Nechť je hmotná rovinná oblast ohraničena křivkami  $g(x)$  a  $f(x)$ , kde  $g(x) \leq f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pak hmotnost této oblasti s konstantní plošnou hustotou  $\sigma$  je

$$m = \sigma \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx.$$

Momenty setrvačnosti této rovinné oblasti dostaneme ze vztahů:

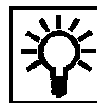
$$I_x = \sigma \frac{1}{3} \int_a^b [f^3(x) - g^3(x)] dx,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2 [f(x) - g(x)] dx.$$

Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  má souřadnice  $\xi = \frac{S_y}{m}$ ,  $\eta = \frac{S_x}{m}$ .



### Řešené úlohy



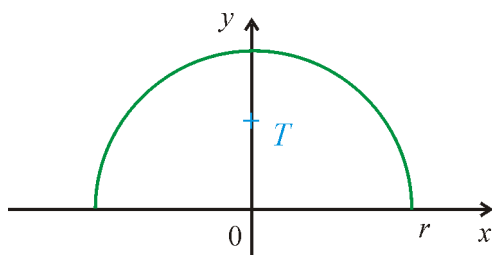
**Příklad 3.5.1.** Vypočtete souřadnice těžiště homogenní půlkružnice  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y \geq 0$ .

**Řešení:**

Parametrické rovnice půlkružnice jsou (viz příklad 3.2.2):

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$



Obr. 3.5.4. Souřadnice těžiště homogenní půlkružnice

Je-li délková hustota  $\sigma$  konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a délky půlkružnice:

$$m = \sigma s = \sigma \frac{1}{2} 2\pi r = \sigma \pi r.$$

Statické momenty jsou:

$$S_x = \sigma \int_0^{\pi} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \sigma \int_0^{\pi} r \sin t \sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = \\ = \sigma r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = \sigma 2r^2,$$

$$S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \sigma \int_0^{\pi} r \cos t \sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \cos t dt = \\ = \sigma r^2 [\sin t]_0^{\pi} = 0.$$

Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  má souřadnice

$$\xi = \frac{S_y}{m} = 0 \text{ a } \eta = \frac{S_x}{m} = \frac{\sigma 2r^2}{\sigma \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

$$T = \left(0, \frac{2r}{\pi}\right).$$

### Poznámka

Statický moment  $S_y$  jsme nemuseli počítat, protože je evidentní, že pro danou půlkružnici musí těžiště ležet na ose  $y$ , a tedy je  $S_y = 0$ .

**Příklad 3.5.2.** Vypočítejte momenty setrvačnosti homogenní půlkružnice z příkladu 3.5.2 k souřadnicovým osám.

### Řešení:

Moment setrvačnosti půlkružnice k ose  $x$ :

$$I_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \sigma \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} dt = \\ = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\sigma r^3}{2} \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\sigma \pi r^3}{2}.$$

Moment setrvačnosti půlkružnice k ose  $y$ :

$$I_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \sigma \int_0^{\pi} r^2 \cos^2 t \sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} dt = \\ = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\sigma r^3}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\sigma \pi r^3}{2}.$$



**Příklad 3.5.3.** Vypočítejte souřadnice těžiště trojúhelníka s vrcholy  $O = (0,0)$ ,  $A = (0,1)$  a  $B = (2,0)$ .

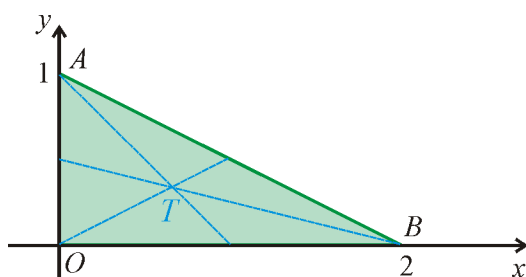
**Řešení:**

Strana  $AB$  daného trojúhelníka leží na přímce

$$y-1 = \frac{0-1}{2-0}(x-0), \text{ tj. } y = 1 - \frac{x}{2}.$$

Rovinná oblast je ohraničena shora grafem funkce  $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$  a zdola grafem funkce

$g(x) = 0$  obr. 3.5.5.



Obr. 3.5.5. Těžiště trojúhelníka

Je-li plošná hustota  $\sigma$  konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a obsahu trojúhelníka:

$$m = \sigma P = \sigma \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \sigma.$$

Statické momenty jsou (připomínáme, že  $g(x) = 0$ ):

$$S_x = \sigma \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = \sigma \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \sigma \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) dx =$$

$$= \sigma \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \sigma \frac{1}{2} \left( 2 - 2 + \frac{2}{3} \right) = \sigma \frac{1}{3}.$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x f(x) dx = \sigma \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sigma \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 =$$

$$= \sigma \left[ 2 - \frac{4}{3} \right] = \sigma \frac{2}{3}.$$

Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  má souřadnice

$$\xi = \frac{S_y}{m} = \frac{\sigma \frac{2}{3}}{\sigma} = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad \eta = \frac{S_x}{m} = \frac{\sigma \frac{1}{3}}{\sigma} = \frac{1}{3}.$$

$$T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

**Poznámka**

Těžiště trojúhelníka leží v průsečíku těžnic (spojnic vrcholů a středů stran). Těžiště rozděluje těžnici v poměru 1:2. Z podobných trojúhelníků je zřejmé, že  $x$  – ová souřadnice těžiště musí ležet v  $\frac{1}{3}$  strany  $OB$  a  $y$  – ová souřadnice těžiště musí ležet v  $\frac{1}{3}$  strany  $OA$ . Proto  $\xi = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$  a  $\eta = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ .

**Příklad 3.5.4.** Vypočtete momenty setrvačnosti homogenního trojúhelníka z příkladu 3.5.3 při rotaci kolem osy  $x$ , resp.  $y$ .

**Řešení:**

Moment setrvačnosti trojúhelníka k ose  $x$ :

$$\begin{aligned} I_x &= \sigma \frac{1}{3} \int_a^b f^3(x) dx = \sigma \frac{1}{3} \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 dx = \sigma \frac{1}{3} \int_0^2 \left(1 - 3\frac{x}{2} + 3\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8}\right) dx = \\ &= \sigma \frac{1}{3} \left[ x - 3\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{32} \right]_0^2 = \sigma \frac{1}{3} \left(2 - 3 + 2 - \frac{1}{2}\right) = \sigma \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \sigma \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti trojúhelníka k ose  $y$ :

$$\begin{aligned} I_y &= \sigma \int_a^b x^2 f(x) dx = \sigma \int_0^2 x^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx = \sigma \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right]_0^2 = \\ &= \sigma \left[ \frac{8}{3} - 2 \right] = \sigma \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

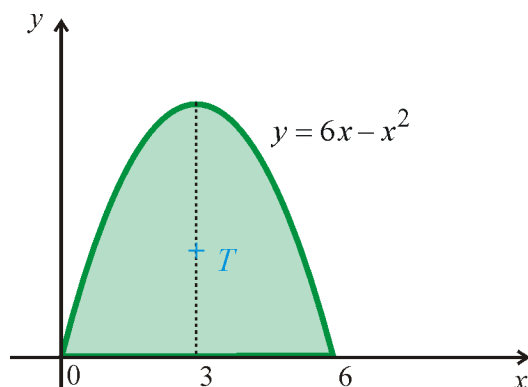
**Příklad 3.5.5.** Vypočtete souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou

$$y = 6x - x^2 \text{ a osou } x.$$

**Řešení:**

Grafem paraboly  $y = 6x - x^2$  jsme se podrobně zabývali v příkladu 3.1.1. Parabola protíná osu  $x$  v bodech  $x = 0$  a  $x = 6$ .

Rovinná oblast je ohraničena shora křivkou  $f(x) = 6x - x^2$  a zdola křivkou  $g(x) = 0$   
obr. 3.5.6.



Obr. 3.5.6. Těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou  $y = 6x - x^2$  a osou  $x$

Je-li plošná hustota  $\sigma$  konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a plochy oblasti ohraničené parabolou a osou  $x$ :

$$P = \sigma \int_0^6 (6x - x^2) dx = \sigma \left[ 3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = \sigma(108 - 2 \cdot 36) = 36\sigma.$$

Statické momenty jsou (připomínáme, že  $g(x) = 0$ ):

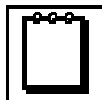
$$\begin{aligned} S_x &= \sigma \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = \sigma \frac{1}{2} \int_0^6 (6x - x^2)^2 dx = \sigma \frac{1}{2} \int_0^6 (36x^2 - 12x^3 + x^4) dx = \\ &= \sigma \frac{1}{2} \left[ 12x^3 - 3x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^6 = \sigma \frac{1}{2} \left[ x^3(12 - 3x + \frac{x^2}{5}) \right]_0^6 = \sigma \frac{1}{2} 6^3 (12 - 18 + \frac{36}{5}) = \\ &= \sigma 108 \frac{6}{5} = \sigma \frac{648}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= \sigma \int_a^b x f(x) dx = \sigma \int_0^6 x(6x - x^2) dx = \sigma \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \sigma \left[ 2x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = \\ &= \sigma \left[ 2 \cdot 6^3 - \frac{6^4}{4} \right] = \sigma 6^3 \left( 2 - \frac{3}{2} \right) = 108\sigma. \end{aligned}$$

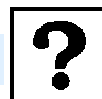
Těžiště  $T = (\xi, \eta)$  má souřadnice

$$\xi = \frac{S_y}{m} = \frac{108\sigma}{36\sigma} = 3 \quad \text{a} \quad \eta = \frac{S_x}{m} = \frac{\sigma \frac{648}{5}}{\sigma 36} = \frac{18}{5}.$$

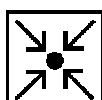
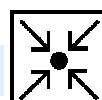
$$T = \left( 3, \frac{18}{5} \right).$$

**Poznámka**

Statický moment  $S_y$  jsme nemuseli počítat. Protože je obrazec souměrný podle osy  $x = 3$ , musí těžiště ležet na této ose,  $x$ -ová souřadnice těžiště musí být  $\xi = 3$ .

**Kontrolní otázky**

1. Uveďte vztah pro statický moment a moment setrvačnosti hmotného bodu.
2. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné křivky dané parametrickými rovnicemi.
3. Jak vypočtete souřadnice těžiště homogenní hmotné křivky dané parametrickými rovnicemi?
4. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné křivky dané explicitní rovnicí.
5. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné rovinné oblasti hraničené křivkami  $g(x)$  a  $f(x)$ , kde  $g(x) \leq f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .
6. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné rovinné oblasti hraničené grafem spojitě funkce  $f(x) \geq 0$  a osou  $x$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .
7. Jak vypočtete souřadnice těžiště homogenní hmotné rovinné oblasti ohraničené křivkami  $g(x)$  a  $f(x)$ , kde  $g(x) \leq f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ?

**Úlohy k samostatnému řešení**

1. Vypočtete souřadnice těžiště homogenního rovinného obrazce ohraničeného křivkami
  - a)  $y = 2x - x^2$ ;  $y = 0$
  - b)  $y^2 = 6x$ ;  $x = 5$
  - c)  $y^2 = 4x$ ;  $x = 0$ ;  $x = 4$
  - d)  $2y = x^2$ ;  $2x = y^2$
  - e)  $y = x^2$ ;  $y = \frac{2}{1+x^2}$
  - f)  $y = \sin x$ ;  $y = 0$ ;  $0 \leq x \leq \pi$
  - g)  $y = \sin x$ ;  $y = \frac{2x}{\pi}$ ;  $y = 0$

h)  $y = \sin x; \quad y = \frac{1}{2}; \quad 0 \leq x \leq \pi$

i)  $x^2 + y^2 = 4; \quad y \geq 0$

2. Vypočtete souřadnice těžiště homogenního rovinného obrazce

a) ohraničeného cykloidou  $x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  a osou  $x$ .

b) který leží v prvním kvadrantu a jeho hranici tvoří asteroida  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$  a obě souřadné osy.

c) ohraničeného křivkou  $x = t^2 - t, \quad y = t^3 + t^2$  a osou  $x$ .

3. Vypočtete souřadnice těžiště homogenního oblouku dané křivky:

a)  $y = -\frac{x^2}{2} + 2; \quad -2 \leq x \leq 2$

b)  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x; \quad 1 \leq x \leq 2$

c)  $x = t^2, \quad y = t - \frac{t^3}{3}; \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$

d)  $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t; \quad -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$

e)  $x = 3 \cos^3 t, \quad y = 3 \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \pi$

f)  $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

g)  $x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t; \quad 0 \leq x \leq \pi$



## Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a)  $\left(1; \frac{2}{5}\right); \quad \text{b) } (3; 0); \quad \text{c) } \left(\frac{6}{5}; 3\right); \quad \text{d) } \left(\frac{9}{10}; \frac{9}{10}\right); \quad \text{e) } \left(0; \frac{15\pi + 24}{30\pi - 20}\right); \quad \text{f) } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right);$

g)  $\left(\frac{4\pi(4\pi + 3)}{\pi + 4}; \frac{5\pi}{6(\pi + 4)}\right); \quad \text{h) } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{24\sqrt{3} - 8\pi}\right); \quad \text{i) } \left(0; \frac{8}{3\pi}\right). \quad \text{2. a) } \left(3\pi; \frac{5}{2}\right);$

$$\text{b) } \left( \frac{2048}{315\pi}; \frac{2048}{315\pi} \right); \quad \text{c) } \left( \frac{83}{77}; \frac{9}{154} \right). \quad \mathbf{3.} \quad \text{a) } (0; 0,971); \quad \text{b) } (1,52; 0,397); \quad \text{c) } \left( \frac{7}{5}; \frac{\sqrt{3}}{4} \right);$$

$$\text{d) } \left( \frac{6}{\pi}; 0 \right); \quad \text{e) } \left( 0; \frac{6}{5} \right); \quad \text{f) } \left( 2\pi; \frac{8}{3} \right); \quad \text{g) } \left( \frac{2(\pi^2 - 6)}{\pi^2}; \frac{6}{\pi} \right).$$



### Kontrolní test



1. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose  $y$  homogenní hmotné oblasti ohraničené

$$\text{křivkami } y = \frac{2}{1+x^2}, \quad y = x^2.$$

$$\text{a) } \sigma\left(\frac{18}{5} + \pi\right), \quad \text{b) } \sigma\left(\frac{18}{5} - \pi\right), \quad \text{c) } \sigma\left(\frac{18}{5} - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{d) } \sigma\left(\frac{18}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose  $y$  homogenního hmotného oblouku

$$\text{křivky dané parametricky } x = t^2, \quad y = t - \frac{1}{3}t^3 \text{ pro } 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

$$\text{a) } \frac{198}{35}\sigma\sqrt{3}, \quad \text{b) } \frac{189}{35}\sigma\sqrt{3}, \quad \text{c) } \frac{108}{35}\sigma\sqrt{3}, \quad \text{d) } \frac{156}{35}\sigma\sqrt{3}.$$

- 3) Vypočítejte statický moment vzhledem k ose  $x$  homogenního hmotného oblouku křivky

$$y = x^3 \text{ pro } 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{a) } \frac{\sigma}{54}(10\sqrt{10} + 1), \quad \text{b) } \frac{\sigma}{54}(10\sqrt{10} - 1), \quad \text{c) } \frac{\sigma}{108}(10\sqrt{10} - 1), \quad \text{d) } \frac{\sigma}{108}(10\sqrt{10} + 1).$$

- 4) Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní hmotné oblasti tvaru rovnoramenného trojúhelníka výšky  $v$  a základny velikosti  $a$  vzhledem k jeho základně.

$$\text{a) } \frac{1}{2}\sigma av^3, \quad \text{b) } \frac{1}{4}\sigma av^2, \quad \text{c) } \frac{1}{4}\sigma av^3, \quad \text{d) } \frac{1}{2}\sigma av^2.$$

- 5) Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní hmotné oblasti ohraničené elipsou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < b < a \text{ konst. vzhledem k její hlavní ose.}$$

$$\text{a) } \frac{1}{4}\sigma\pi ab^3, \quad \text{b) } \frac{1}{4}\sigma\pi a^3 b, \quad \text{c) } \frac{1}{2}\sigma\pi ab^3, \quad \text{d) } \frac{1}{2}\sigma\pi a^3 b.$$

- 6) Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního hmotného oblouku křivky  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$  pro  $1 \leq x \leq e$  vzhledem k ose  $y$ .

a)  $\frac{\sigma}{8}(e^4 + 2e^2 - 2)$ ,      b)  $\frac{\sigma}{8}(e^4 + 2e^2 + 3)$ ,

c)  $\frac{\sigma}{8}(e^4 + 2e^2 - 3)$ ,      d)  $\frac{\sigma}{8}(e^4 + 2e^2 + 2)$ .

7) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního hmotného oblouku asteroidy

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0 \text{ konst. pro } 0 \leq t \leq \pi.$$

a)  $\left(0, \frac{1}{5}a\right)$ ,      b)  $\left(0, \frac{3}{5}a\right)$ ,      c)  $\left(\frac{2}{5}a, 0\right)$ ,      d)  $\left(0, \frac{2}{5}a\right)$ .

8) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami  $y = \sin x$  a

$$y = \frac{1}{2} \text{ pro } x \text{ maximálně z intervalu } (0, \pi).$$

a)  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{8(3\sqrt{3} - \pi)}\right)$ ,      b)  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{8(3\sqrt{3} - \pi)}{3\sqrt{3} + 2\pi}\right)$ ,

c)  $\left(\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{8(3\sqrt{3} - \pi)}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,      d)  $\left(\frac{8(3\sqrt{3} - \pi)}{3\sqrt{3} + 2\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

9) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami  $x = 1$  a

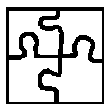
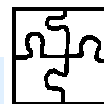
$$y^2 = x^3.$$

a)  $\left(0, \frac{5}{7}\right)$ ,      b)  $\left(\frac{5}{7}, 0\right)$ ,      c)  $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$ ,      d)  $\left(0, \frac{4}{7}\right)$ .

10) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního hmotného oblouku křivky  $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$ 

$$\text{pro } 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

a)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{7}{5}\right)$ ,      b)  $\left(\frac{5}{7}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,      c)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{7}\right)$ ,      d)  $\left(\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ .

**Výsledky testu**

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a); 6. c); 7. d); 8. a); 9. b); 10. d).

**Průvodce studiem**

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5 znovu.

**Shrnutí lekce**

Integrální počet je používán v mnoha disciplínách i tam, kde bychom to neočekávali (např. ekonomie). V této kapitole jsme se omezili na jednoduché aplikace v mechanice. Odvodili jsme vztahy pro výpočet statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti křivek a rovinných oblastí. Při výpočtech jsme se omezili na homogenní křivky a oblasti s konstantní hustotou. S výpočty statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti křivek v prostoru, rovinných oblastí, těles i v případech, kdy se hustota spojitě mění, se seznámíte v Matematice III.

Za nejdůležitější v této kapitole považujeme metodu, jak lze odvodit potřebné vztahy. Z fyzikálních zákonů se odvodí vztahy pro velmi malé elementy. Proveďte se součet hodnot pro všechny elementy. Limitním přechodem pro počet elementů  $n \rightarrow \infty$  přejdou sumy na integrály. Pochopením tohoto principu můžete odvozovat vztahy pro další veličiny.

Stejným způsobem postupovali i tvůrci integrálního počtu Newton a Leibniz.



**Místo pro poznámky**