1.5. Integrace racionálních funkcí

Průvodce studiem

V předcházejících kapitolách jsme se naučili počítat neurčité integrály úpravou na základní integrály, metodou per partes a substituční metodou. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat integrováním racionálních funkcí. Uvedeme podrobný postup rozkladu racionálních funkcí na součet parciálních zlomků a integraci těchto parciálních zlomků. Podle uvedeného postupu můžeme integrovat libovolnou racionální funkci. Racionální funkce můžeme dostat i po některých substitucích. Nejprve zopakujeme polynomické a racionální funkce, uvedeme některé základní vlastnosti těchto funkcí.

Cíle

Seznámíte se s postupem integrace racionálních funkcí a se základními integrály, které dostaneme po rozložení racionální funkce na součet parciálních zlomků.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1., umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu) a substituční metodou. V této kapitole se vyskytne jen několik málo typů integrálů.

Výklad

Polynomy a jejich vlastnosti

S polynomy jste se seznámili již v Matematice 1. Připomeňme definici polynomické funkce.

Definice 1.5.1.

Polynomem $P_m(x)$ stupně m nazýváme funkci

$$P_m(x) = a_m x^m + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_m \neq 0.$$

Reálná čísla a_0, a_1 ,..., a_m jsou koeficienty polynomu.

Polynom je funkce, která vznikne konečným počtem operací součet, rozdíl a součin funkcí $y = konst$ a $y = x$.

Stručně můžeme polynom zapsat $P_m(x)=\sum_{j=0}^{m} a_j x^j$, $a_n \neq 0$.

Číslo m nazýváme **stupněm polynomu** $P_m(x)$.

Pro polynom 1. stupně (tj. polynom tvaru $y=ax+b,\ a\neq 0$) se používá také termín **lineární polynom** a pro polynom 2. stupně (tj. polynom tvaru $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$) se používá také termín **kvadratický polynom**.

Integrace polynomické funkce je velmi snadná, neboť vystačíme se základními pravidly pro integraci (věta 1.2.1) a s integrací mocninné funkce (vzorec [3] v tabulce 1.2.1).

Řešené úlohy

Příklad 1.5.1. Vypočtěte integrál $\int (2x^5-x^3+3x^2+6x-1)\,dx$.

Řešení:

$$\int (2x^5-x^3+3x^2+6x-1)\,dx = 2\int x^5dx-\int x^3dx+3\int x^2dx+6\int xdx-\int dx =$$

$$=2\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-x+C=\frac{x^6}{3}-\frac{x^4}{4}+x^3+3x^2-x+C.$$

Výklad

Polynomy hrají v matematické analýze velmi důležitou roli. Polynomy jsou spojité funkce definované pro všechna reálná x. Jestliže dva polynomy spolu sečteme, odečteme nebo vynásobíme, dostaneme opět polynom.

Polynomy můžeme také mezi sebou dělit. V tomto případě však obecně výsledkem nebude polynom, ale funkce, kterou nazýváme **racionální** (racionální lomená): $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Je-li $Q_n(x)$ polynom n-tého stupně, nazývá se rovnice $Q_n(x)=0$ **algebraická rovnice** n-tého stupně.

Definice 1.5.2.

Číslo α, pro které platí $Q_n(\alpha)=0$, se nazývá **kořen polynomu** Q a výraz $x-\alpha$ se nazývá **kořenový činitel** polynomu Q.

Dovedete nalézt kořeny rovnice $Q_n(x) = 0$ pro polynomy 1. a 2. stupně. Pro polynomy vyšších stupňů se jedná o složitější úlohu, kterou dovedeme vyřešit v některých speciálních případech. Velmi často je pro nalezení kořenů nutno použít numerických metod, o nichž se dozvíte více ve speciálním předmětu Numerické metody.

V algebře se dokazuje, že každý polynom $Q_n(x)$, který není konstanta, má v oboru komplexních čísel n kořenů.

Věta 1.5.1.

Každý polynom $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 1$ lze **rozložit na součin kořenových činitelů**

$$Q_n(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ \ldots\ (x - \alpha_n),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou konstanty (obecně komplexní).

Poznámka

1. Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nemusí být navzájem různá. Tedy rovnice může mít vícenásobné kořeny. Pokud kořen α_j je r-násobný, můžeme místo r součinů $(x - \alpha_j)(x - \alpha_j)\ \ldots\ (x - \alpha_j)$ psát $(x - \alpha_j)^r$.

2. Kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mohou být reálné nebo komplexní.

Věta 1.5.2.

Pokud má polynom r-násobný komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$ (c, d jsou reálná čísla), pak také komplexně sdružené číslo $\overline{\alpha} = c - d\,i$ je r-násobným kořenem tohoto polynomu.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.2. Rozložte na součin kořenových činitelů $Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x$.

Řešení:

Řešíme rovnici $3x^5 + 24x^3 - 27x = 0$. Rovnici upravíme vytknutím $3x$. Dostaneme $3x(x^4 + 8x^2 - 9) = 0$. Jedno řešení je $x_1 = 0$. Další kořeny získáme řešením rovnice $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$. Po zavedení pomocné proměnné $t = x^2$ dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 + 8t - 9 = 0$, která má kořeny $t_1 = 1$ a $t_2 = -9$, čili $x^2 = 1$ a $x^2 = -9$.

Odtud $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3i$, $x_5 = -3i$.

Jelikož je koeficient u nejvyšší mocniny roven 3, můžeme polynom zapsat ve tvaru:

$Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x = 3x(x-1)(x+1)(x-3i)(x+3i)$.

Výklad

Je nepříjemné, že se ve výsledném rozkladu v příkladu 1.5.2 objevují imaginární čísla $+3i$ a $-3i$. Pokud vynásobíme odpovídající kořenové činitele, dostaneme kvadratický polynom $(x-3i)(x+3i) = x^2 + 9$. Rozklad polynomu z příkladu 1.5.2 bude mít tvar

$Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x = 3x(x-1)(x+1)(x^2+9)$.

Tento postup můžeme zobecnit. Má-li polynom kořen $\alpha = c + d\,i$ má podle věty 1.5.2 také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$. Pokud vynásobíme odpovídající kořenové činitele, dostaneme kvadratický polynom, který nemá imaginární koeficienty:

$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-(c+d\,i))(x-(c-d\,i)) = x^2 - 2cx + c^2 + d^2 = x^2 + px + q$, kde

$p = -2c$ a $q = c^2 + d^2$. Uvědomme si, že diskriminant $D = p^2 - 4q$ je záporný, neboť

$D = p^2 - 4q = 4c^2 - 4c^2 - 4d^2 = -4d^2 < 0$.

Je-li komplexně sdružený kořen $c \pm d \cdot i$ s násobný, dostaneme

$(x-\alpha)^s (x-\overline{\alpha})^s = (x^2 + px + q)^s$.

Pokud tuto úvahu zobecníme, dostaneme důležitou větu o **rozkladu polynomu na základní součin** v reálném oboru:

Věta 1.5.3.

Každý polynom $Q_n(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ stupně $n \ge 1$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru:

$Q_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{r_1} \;\dots\; (x-\alpha_u)^{r_u} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \;\dots\; (x^2 + p_v x + q_v)^{s_v}$

se vzájemně různými reálnými kořeny $\alpha_i,\ i = 1, 2, \dots u$ a vzájemně různými kvadratickými polynomy $x^2 + p_j x + q_j,\ j = 1, 2, \dots v$, které nemají reálné kořeny.

Poznámka

1. Stručně lze říci, že každý polynom s reálnými koeficienty stupně $n \ge 1$ lze rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně, přičemž polynomy druhého stupně se dále nedají rozložit na součin polynomů prvního stupně.

2. Je zřejmé, že platí $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_u + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_v)$.

Věta 1.5.3 nám sice zaručuje možnost rozkladu polynomu na základní součin, avšak praktické provedení nemusí být jednoduché. V mnoha případech potřebujeme provést rozklad polynomu Q, který je již částečně rozložen.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.3. Rozložte na základní součin polynom $Q(x) = (x^5 - x^2)(x^5 + x^2)(1 - x^4)$.

Řešení:

Je zřejmé, že polynom *Q(x)* je 14. stupně. Polynom *Q(x)* není rozložen na základní součin, neboť se v něm vyskytují polynomy vyššího než 2. stupně. Proto jednotlivé činitele dále rozložíme:

$$(x^5 - x^2) = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1),$$

$$(x^5 + x^2) = x^2(x^3 + 1) = x^2(x+1)(x^2 - x + 1),$$

$$(1 - x^4) = -(x^4 - 1) = -(x-1)(x+1)(x^2 + 1).$$

Takže $Q(x) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)x^2(x+1)(x^2 - x + 1)(-1)(x-1)(x+1)(x^2 + 1) =$

$$= -x^4(x-1)^2(x+1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1).$$

Uvědomte si, že $x^4 = (x-0)^4$, tedy se jedná o polynom 1. stupně, který přísluší čtyřnásobnému kořenu $x = 0$. Koeficient $a_n = -1$.

Výklad

Rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků

Definice 1.5.3.

Racionální funkcí *R(x)* nazveme funkci, která je podílem dvou polynomů $P_m(x)$ a $Q_n(x)$:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad Q_n(x) \neq 0 .$$

Poznámky

Definičním oborem racionální funkce R(x) je množina všech reálných čísel x, které nejsou reálnými kořeny rovnice $Q_n(x) = 0$.

Definice 1.5.4.

Racionální funkce $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se nazývá **ryze lomená**, je-li stupeň *m* polynomu $P_m(x)$ menší než stupeň *n* polynomu $Q_n(x)$, tj. $m<n$. Je-li $m\geq n$, pak se funkce *R(x)* nazývá **neryze lomená** racionální funkce.

Jestliže je funkce *R(x)* neryze lomená racionální funkce, pak můžeme polynom $P_m(x)$ v čitateli dělit polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli. Podílem bude polynom $P_{m_1}(x)$ a zbytek dělení bude polynom $P_{m_2}(x)$, jehož stupeň m_2 je nižší než *n*, tj. $m_2<n$. To můžeme vyjádřit větou.

Věta 1.5.4.

Každou neryze lomenou racionální funkci můžeme vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj. $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=P_{m_1}(x)+\dfrac{P_{m_2}(x)}{Q_n(x)}$, kde $m_2<n$.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vyjádřete racionální funkci $R(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení:

Polynom $P_3(x)=x^3+2x^2+x-1$ v čitateli racionální funkce je 3. stupně a polynom $Q_2(x)=x^2-x+1$ ve jmenovateli má stupeň 2. Polynomy můžeme vydělit.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+2x^2+x-1):(x^2-x+1)=x+3 \\
\underline{-(x^3-x^2+x)} \\
\quad 3x^2 \qquad -1 \\
\quad \underline{-(3x^2-3x+3)} \\
\qquad\quad 3x-4 \quad \text{... zbytek}
\end{array}
$$

Danou racionální funkci proto můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}=x+3+\frac{3x-4}{x^2-x+1}.$$

Průvodce studiem

Hlavním výsledkem předcházející části je věta 1.5.4. Je-li dána neryze lomená racionální funkce, provedeme dělení polynomu $P_m(x)$ v čitateli polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli racionální funkce. Dostaneme polynom a ryze lomenou racionální funkci. Stačí tedy, když se v dalším omezíme na takové racionální funkce $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, v nichž má čitatel nižší stupeň než jmenovatel (ryze lomené racionální funkce). V další části si ukážeme, jak lze ryze lomené racionální funkce rozložit na součet několika jednodušších zlomků, které bychom již uměli integrovat.

Výklad

Ve větě 1.5.3 jsme ukázali, že každý polynom s reálnými koeficienty stupně $n \geq 1$ lze rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně, přičemž polynomy druhého stupně se již nedají rozložit na součin polynomů prvního stupně s reálnými kořeny (mají komplexně sdružené kořeny). Budeme se snažit racionální funkci rozložit na součet jednoduchých racionálních funkcí, které mají ve jmenovateli mocniny kořenových činitelů $(x-\alpha)$ a kvadratických polynomů (x^2+px+q).

Definice 1.5.5.

Částečnými (parciálními) **zlomky** nazýváme racionální funkce tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^{k_1}} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}} \quad ,$$

kde *A, M, N, p, q* jsou reálná čísla, $k_1,\ k_2$ jsou přirozená čísla a polynom x^2+px+q nemá reálné kořeny ($D=p^2-4q<0$).

Poznámky

1. Parciální zlomky prvního typu odpovídají reálným kořenům jmenovatele a parciální zlomky druhého typu odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů.

2. Ryze lomenou racionální funkci R(x) lze vyjádřit ve tvaru

$R(x)=R_1(x)+R_2(x)+\ldots+R_s(x)$, *kde* $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ *jsou parciální zlomky. Pro integraci ryze lomené racionální funkce stačí umět integrovat tyto parciální zlomky.*

Pro snazší pochopení a jednoduchost uvedeme tvar rozkladu racionální funkce na součet parciálních zlomků podle toho, jaké kořeny má polynom $Q_n(x)$ ve jmenovateli racionální funkce. Postupně se budeme zabývat čtyřmi základními případy.

A. Rozklad pro reálné různé kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k ($k \le n$) reálných různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (jednoduché kořeny), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \dfrac{A_k}{x-\alpha_k} + R_{k+1}(x) \dots$,

kde $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou reálné konstanty.

Nalezneme konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ tak, abychom po sečtení všech parciálních zlomků dostali danou racionální funkci *R(x)*. Jednotlivé parciální zlomky pak můžeme snadno integrovat.

Poznámka

Polynom $Q_n(x)$ může mít vedle k reálných různých kořenů ještě reálné násobné kořeny nebo kořeny komplexně sdružené.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$.

Řešení:

Výpočet můžeme rozdělit do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož je $m < n$, je daná funkce ryze lomená racionální funkce (není nutno dělit polynomy).
2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-3)$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálné jednoduché kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, A_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x)=x^3-4x^2+3x$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

   $$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)\ .$$

   Tuto rovnici lze řešit několika způsoby:

   a) **Dosazovací metoda.** Oba polynomy se musí rovnat pro libovolné hodnoty *x*.

   Dosadíme-li obecně tři různé hodnoty *x*, dostaneme tři rovnice pro tři neznámé koeficienty A_1, A_2, A_3. Tuto soustavu snadno vyřešíme. Pokud má polynom *Q(x)* reálné kořeny, je výhodné dosadit právě tyto kořeny.

   Pro $x=0$ dostaneme: $3=3A_1+0A_2+0A_3$. Tedy $A_1=1$.

   Pro $x=1$ dostaneme: $-4=0A_1-2A_2+0A_3$. Tedy $A_2=2$.

   Pro $x=3$ dostaneme: $-12=0A_1+0A_2+6A_3$. Tedy $A_3=-2$.

   b) **Srovnávací metoda.** Rovnice představuje rovnost dvou polynomů.

   Rovnost nastane, jestliže se budou rovnat koeficienty polynomu na levé straně a odpovídající koeficienty polynomu na pravé straně rovnice.

   $$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)$$

   $$x^2-8x+3=A_1(x^2-4x+3)+A_2(x^2-3x)+A_3(x^2-x)$$

   $$x^2-8x+3=x^2(A_1+A_2+A_3)+x(-4A_1-3A_2-A_3)+3A_1$$

   Koeficienty u x^2: $1=A_1+A_2+A_3$

   Koeficienty u x^1: $-8=-4A_1-3A_2-A_3$

   Koeficienty u x^0: $3=3A_1$

   Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=-2$.

   Metody můžeme kombinovat.

   c) **Kombinace metod a), b).**

   Metodou a) získáme několik rovnic, zbývající rovnice doplníme metodou b). Tento postup budeme používat v některých dalších příkladech.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}dx = \int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-3}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x-3}dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| - 2\ln|x-3| + C =$$

$$= \ln\frac{|x|(x-1)^2}{(x-3)^2} + C \ .$$

V případě reálných jednoduchých kořenů polynom $Q_n(x)$ dostaneme pouze integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ \ln|x-\alpha| + C\,.$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [13] *nebo* [16] *z tabulky 1.2.1. Můžeme použít substituci* $x-\alpha = t$.

B. Rozklad pro reálné násobné kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má r-násobný ($r \le n$) kořen α, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\alpha)^r} + R_{r+1}(x) + \ \ldots\ ,$$

kde $B_1, B_2,\ \ldots\ , B_r$ jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=4$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n=4$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$(x^4-2x^3+3x^2-x+1):(x^4-3x^3+3x^2-x) = 1$$

$$\frac{-(x^4-3x^3+3x^2-x)}{x^3 \qquad +1}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=1+\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\ .$$

Konstanta 1 je zvláštní případ polynomu nultého stupně a zbývající racionální funkce je již ryze lomená. Tuto racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_4(x)=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má jednoduchý reálný kořen $x_1=0$ a trojnásobný reálný kořen $x_{2,3,4}=1$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=0$ a B pro $x_{2,3,4}=1$):

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}\ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A,B_1,B_2,B_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=x(x-1)^3$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálné kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x=0$ dostaneme: $1=-A+0B_1+0B_2+0B_3$. Tedy $A=-1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $2=0A+0B_1+0B_2+1B_3$. Tedy $B_3=2$.

Jelikož již nemáme další kořeny, můžeme dosadit dvě jiná reálná čísla a dostaneme dvě rovnice pro dosud neznámé koeficienty B_1 a B_2.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme také použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

$$x^3+1=A(x^3-3x^2+3x-1)+B_1(x^3-2x^2+x)+B_2(x^2-x)+B_3x$$

$$x^3+1=(A+B_1)x^3+(-3A-2B_1+B_2)x^2+(3A+B_1-B_2+B_3)x-A$$

Koeficienty u x^3: $1 = A + B_1$

Koeficienty u x^2: $0 = -3A - 2B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $B_1 = 2$, $B_2 = 1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = \int (1 + \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} \right) dx = \int \left(1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= x - \ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2(x-1)^2} = x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

V případě reálných násobných kořenů polynomu $Q_n(x)$ dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{B_1}{x-\alpha} dx = B_1 \int \frac{1}{x-\alpha} dx = B_1 \ln|x-\alpha| + C$$

a

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = B_k \int (x-\alpha)^{-k} dx = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \text{ pro } k \geq 2.$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [16] *z tabulky 1.2.1. Použili jsme substituci* $x - \alpha = t$:

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = \begin{vmatrix} x-\alpha = t \\ dx = dt \end{vmatrix} = B_k \int \frac{dt}{t^k} dt = B_k \int t^{-k} dt = B_k \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{B_k}{(1-k)t^{k-1}} + C = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \textit{ pro } k \geq 2.$$

C. Rozklad pro komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $x^2 + px + q$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)$.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)} = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \dots ,$$

kde *M, N* jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1}\,dx$.

Řešení:

Jako v předcházejících příkladech rozdělíme výpočet do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 5$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož není $m < n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$\begin{array}{l} (x^5 + x^3 + x^2 + 2) : (x^3 + 1) = x^2 + 1 \\ \underline{-(x^5 + \quad\quad x^2)} \\ \quad\quad\quad x^3 + 2 \\ \quad\quad\ \underline{-(x^3 + 1)} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 1 \end{array}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^3 + 1}.$$

Racionální funkci $\frac{1}{x^3+1}$ rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 + 1$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$. (Pro rozklad jsme použili vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$). To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálný jednoduchý kořen $x_1 = -1$ a komplexně sdružené kořeny, protože diskriminant kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ je záporný: $D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1 = -1$ a C pro trojčlen $x^2 - x + 1$):

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \quad .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu *A, M, N.* Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x) = x^3 + 1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1) .$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálný kořen polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x = -1$ dostaneme $1 = A(1+1+1) + 0$. Tedy $A = \frac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0 = A + M$

Koeficienty u x^0: $1 = A + N$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $M = -\frac{1}{3}$, $N = \frac{2}{3}$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky (nezapomeňme na polynom získaný dělením v kroku 1):

$$\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1}\,dx = \int (x^2 + 1 + \frac{1}{x^3+1})\,dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx \quad .$$

První integrál je snadný, známe jej z případu A:

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C_1 \ .$$

Druhý integrál se budeme snažit upravit tak, abychom v čitateli zlomku získali derivaci jmenovatele.

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx \ .$$

Dostaneme dva integrály. První integrujeme pomocí vzorce [13] z tabulky 1.2.1 (fakticky použijeme substituci $x^2-x+1=t$):

$$-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + C_2 = -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C_2 \ .$$

Doplněním na čtverec upravíme druhý integrál tak, aby bylo možno použít vzorec [14] z tabulky 1.2.1:

$$-\frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_3 \ .$$

Sečtením integrálů, které jsme postupně vypočítali, dostaneme výsledek:

$$\int \frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \ .$$

Poznámka

Při výpočtu integrálu z parciálního zlomku $\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx$ *jsme integrand upravovali tak, abychom dostali zlomek, který bude mít v čitateli derivaci jmenovatele a zlomek s konstantou v čitateli:*

$\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx = \int \left(\frac{K(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{L}{x^2-x+1}\right)dx$. *Pro méně zdatné počtáře bude proto výhodnější ve 3. kroku rozložit tuto racionální funkci na dva zlomky s konstantami K a L.*

Postup můžeme zobecnit a modifikovat rozklad pro případ komplexně sdružených kořenů:

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)Q_{n-2}(x)}=\frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{L}{x^2+px+q}+\dots ,$$

kde *K, L* jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.8. Vypočtěte integrál $\int\frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx$.

Řešení:

Kroky 1 a 2 jsou stejné jako v příkladu 1.5.7. V kroku 3 budeme postupovat podle návodu uvedeného v předcházející poznámce.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=-1$ a C pro trojčlen x^2-x+1):

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{K(2x-1)}{x^2-x+1}+\frac{L}{x^2-x+1} .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu *A,K,L*. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x)=x^3+1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1=A(x^2-x+1)+K(2x-1)(x+1)+L(x+1) .$$

Jako v příkladu 1.5.7 dostaneme $A=\dfrac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0=A+2K$

Koeficienty u x^0: $1=A-K+L$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $K=-\dfrac{1}{6}$, $L=\dfrac{1}{2}$.

5. Výpočet integrálů je již uveden v kroku 5 příkladu 1.5.7.

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené kořeny (jednoduché), dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}dx = K \ \ln\left|x^2+px+q\right| + C$$

a

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}dx = \ L\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C \ .$$

Poznámka

První integrál jsme vypočetli podle vzorce [13] *z tabulky 1.2.1. Prakticky používáme substituci* $x^2+px+q=t$. *Druhý integrál*

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}dx = L\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = L\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C\,.$$

Tento vzorec si jistě nebudeme pamatovat. Podstatné je, že uvedený integrál upravíme na typ $\int \frac{1}{a^2+t^2}dt$, *kde* $t = x+\frac{p}{2}$ *a výsledkem bude funkce* arctg( ) *podle vzorce* [14] *z tabulky 1.2.1.*

D. Rozklad pro násobné komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Tento případ uvádíme pro úplnost, abychom vyčerpali všechny možnosti. Základní princip rozkladu je jednoduchý a pečlivý čtenář jistě racionální funkci snadno rozloží na parciální zlomky. Výpočet je však pracnější, neboť budeme počítat minimálně 4 koeficienty a i při vlastní integraci racionálních funkcí budeme řešit obtížnější integrál.

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom k-násobný komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také k-násobný komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $(x^2+px+q)^k$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)$. Rozklad na parciální zlomky je již zřejmý z případů B a C.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k-násobné komplexně sdružené kořeny, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_{n-2k}(x)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k},$$

kde $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ jsou reálné konstanty.

Poznámka

Podobně, jak bylo uvedeno v poznámce u případu C, je výhodnější provést rozklad na parciální zlomky tak, abychom měli v čitateli násobek derivace jmenovatele a konstantu. $\dfrac{M_jx+N_j}{(x^2+px+q)^j}=\dfrac{K_j(2x+p)+L_j}{(x^2+px+q)^j}$, $j=1,2,\ldots,k$ *. Zjednoduší nám to další úpravy.*

Řešené úlohy

Příklad 1.5.9. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n=4$. Daná funkce je ryze lomená racionální funkce.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=(x^2+2)^2$ má dvojnásobné komplexně sdružené kořeny $x=\pm\sqrt{2}\,i$ a je již rozložen na základní součin.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}=\frac{K_1(2x)}{x^2+2}+\frac{L_1}{x^2+2}+\frac{K_2(2x)}{(x^2+2)^2}+\frac{L_2}{(x^2+2)^2}.$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu K_1, L_1, K_2, L_2. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=(x^2+2)^2$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$2x^2-4x+5=2x(x^2+2)K_1+(x^2+2)L_1+2xK_2+L_2\ .$$

Pro výpočet neznámých koeficientů použijeme srovnávací metodu a dostaneme:

$K_1=0$, $L_1=2$, $K_2=-2$, $L_2=1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx = \int\left(\frac{2}{x^2+2}+\frac{-2(2x)}{(x^2+2)^2}+\frac{1}{(x^2+2)^2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{x^2+2}+\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx \ .$$

První integrál jsme vypočítali podle vzorce [14] z tabulky 1.2.1, druhý snadno vypočteme substitucí $x^2+2=t$. Zbývající integrál $\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx$ vypočteme metodou per partes:

$$\int\frac{1}{x^2+2}dx = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\dfrac{1}{x^2+2} \\ u=x & v'=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}\end{matrix}\right| = \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{x^2+2-2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{1}{x^2+2}dx-4\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx$$

Dostáváme rovnici

$$\int\frac{1}{x^2+2}dx = \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{1}{x^2+2}dx-4\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx,$$

ze které vypočítáme hledaný integrál:

$$\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\int\frac{1}{x^2+2}dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Sečtením s již vypočtenými integrály dostaneme

$$\int\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{x^2+2}+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C =$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x+8}{4(x^2+2)}+C \ .$$

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené násobné kořeny, dostaneme integrály parciálních zlomků uvedené ve variantě C a dále pro $k \geq 2$ integrály

$\int \frac{K(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{K}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$ a integrál typu

$$\int \frac{L}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{L}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a^2 = q-\frac{p^2}{4} \end{array} \right| = \int \frac{L}{\left(t^2+a^2\right)^k}dx .$$

Poznámka

První integrál jsme snadno vypočetli substitucí $x^2+px+q=t$. *Druhý integrál můžeme po substituci vypočítat metodou per partes stejně jako jsme to udělali v příkladu 1.5.9. Pohodlnější je použít rekurentní formuli*

$$\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = \frac{1}{(2k-2)a^2}\cdot\frac{x}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)a^2}\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}dt$$

, kterou lze odvodit metodou per partes (odvození najdete např. v [6], [9], [14], [17]).

Kontrolní otázky

1. Jaký tvar má polynomická funkce?
2. Popište rozklad polynomu na kořenové činitele.
3. Co rozumíme rozkladem polynomu na základní součin?
4. Jaký tvar má racionální funkce? Jaký má definiční obor?
5. Kdy je racionální funkce ryze lomená?
6. Vyjádřete racionální funkci $R(x)=\frac{x^6+x^2}{x^2+1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.
7. Co jsou to parciální zlomky?
8. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné různé kořeny jmenovatele racionální funkce.

9. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné násobné kořeny jmenovatele racionální funkce.
10. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro komplexně sdružené kořeny jmenovatele racionální funkce.
11. Jak můžeme nalézt koeficienty rozkladu na parciální zlomky?
12. Uveďte kroky, kterými postupujeme při integraci racionální funkce.
13. Jaké integrály dostaneme při integraci parciálního zlomku $\dfrac{A}{(x-\alpha)^{k_1}}$?
14. Jaké integrály dostaneme při integraci parciálního zlomku $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}}$?
15. Je možné, abychom jako výsledek integrace racionální funkce dostali racionální funkci?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-6x+5}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+8x+12}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4x^2-12x-10}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-3x}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\frac{3}{2}x^2-30}{x^3-4x^2-20x+48}dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{-x^3+2x^2+1}{x(x+1)^3}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{5x^3-20x^2-70x+78}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2-10x+25\right)}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{2x^3-11x^2+4x+-4}{x^4-2x}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+2x+1}{x^5-3x^4+3x^3+x^2}dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+6}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-6x+12}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x+1}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^4-9x^3+13x^2-x+2}{x^2+2x+2}dx$

4. a) $\int \frac{x+2}{x^4-16}dx$ b) $\int \frac{x-3}{x^4-81}dx$ c) $\int \frac{x+8}{x^3+8}dx$

d) $\int \frac{3x+1}{x^3-1}dx$ e) $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}dx$

f) $\int \frac{x^2-2x-7}{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{5}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$; b) $\frac{17}{5}\ln|x-4|-\frac{2}{5}\ln|x+1|+C$;

c) $x-\frac{17}{2}\ln|x+6|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$; d) $3\ln|x-1|+2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2+3x+10\ln|x-3|-\ln|x|+C$; f) $\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+4|+\frac{3}{2}\ln|x-6|+C$.

2. a) $\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$; b) $2\ln|x+2|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+2}+C$;

c) $\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$; d) $2\ln|x+2|+3\ln|x-5|+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-5}+C$;

e) $5\ln|x|-3\ln|x-2|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; f) $2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$.

3. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$; b) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

c) $\ln\left|x^2-6x+12\right|+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C$; d) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+3\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; f) $x^3+x+\ln\left|x^2-3x+4\right|+\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$.

4. a) $\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; b) $\frac{1}{18}\ln|x+3|-\frac{1}{36}\ln\left|x^2+9\right|-\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln\left|x^2 - 1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1\right| + \operatorname{arctg} x + C$;

f) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2 + 2x + 5\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$.

Kontrolní test

1. Rozložte na základní součin polynom $(x^3+1)(x^2-1)(x^2-x^5)$.

   a) $(x^2-1)(x+1)(1-x)x^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

   b) $x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

   c) $-x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

   d) $-x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2$.

2. Určete kořeny polynomu $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

   a) -1, 2, -2, b) 1, 2, -2, c) 1, -1, 2, d) -1, 2, 2.

3. Určete kořeny polynomu $x^3 - 3x^2 - 9x + 27$.

   a) 9, 3, -3, b) -9, 3, -3, c)-27, 3, -9, d) -3, 3, 3.

4. Kolik konstant je třeba určit při rozkladu funkce $R(x) = \frac{x^2+1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$ na parciální zlomky?

   a) 3, b) 4, c) 2, d) 5.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1-4x}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$.

   a) $\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$, b) $-\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C$,

   c) $-\frac{1}{2}\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$, d) $-\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x(x+2)(x-2)}\,dx$.

   a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{(x+2)^3}{x^2(x-2)^5}\right| + C$, b) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x - \ln\left|\frac{x(x-2)^3}{(x+2)^5}\right| + C$,

   c) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C$, d) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{(x+2)^5}\right| + C$.

7. Rozložte funkci $R(x)=\dfrac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$ na parciální zlomky.

a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^4}$, b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-2)^4}$,

c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^4}$, d) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-2)^4}$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,dx$.

a) $2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$, b) $2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+C$,

c) $2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+\dfrac{4x-3}{2(x-1)^2}+C$, d) $2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^4}$.

a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, b) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$,

c) $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, d) $\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

10. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{3x^2-3x+5}{x^3-2x^2+5x}\,dx$.

a) $\ln|x|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$,

b) $\ln|x|+\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$,

c) $\ln|x|-\ln(x^2-2x+5)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)+C$,

d) $\ln|x|+\ln(x^2-2x+5)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.5 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se podrobněji zabývali integrováním racionálních funkcí. Racionální funkce můžeme dostat i po některých substitucích, jak uvidíme v další kapitole. Integrace racionální funkce sestává z pěti kroků:

1. Pokud racionální funkce není ryze lomená, nejprve vydělíme polynom v čitateli polynomem ve jmenovateli racionální funkce a dostaneme polynom a ryze lomenou racionální funkci.
2. Nalezneme kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce a tento polynom rozložíme na základní součin.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.
4. Nalezneme koeficienty tohoto rozkladu.
5. Integrujeme získané parciální zlomky.

Rozklad na parciální zlomky závisí na tom, zda polynom ve jmenovateli má jednoduché reálné kořeny, násobné reálné kořeny, komplexní kořeny nebo násobné komplexní kořeny. Pokud jsou kořeny reálné nebo jednoduché komplexní, je vlastní integrace snadná. Princip rozkladu na parciální zlomky je jednoduchý, ale vlastní realizace může být časově náročná v závislosti na tom, kolik koeficientů musíme počítat. Pokud se nejedná o jednoduché školské úlohy, bude nejobtížnější druhý krok, neboť dovedeme dobře řešit kvadratické rovnice, pro polynomy 3. a 4. stupně existují poměrně složité vzorce, ale řešení rovnic vyšších stupňů je obecně problém.

Při integraci parciálních zlomků můžeme dostat pouze tyto funkce:

1. Polynomy.
2. Násobky ryze lomených racionálních funkcí typu $\dfrac{1}{(x-\alpha)^j}$ a $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^j}$.
3. Násobky logaritmů $\ln|x-\alpha|$ a $\ln\left|x^2+px+q\right|$.
4. Funkce arcustangens.

Některé další integrály (např. integrály z iracionálních funkcí, goniometrických funkcí) můžeme vhodnou substitucí převést na integrály z racionálních funkcí. V další kapitole se proto budeme podrobněji zabývat integrováním goniometrických funkcí.