1.4. Integrace substitucí

Průvodce studiem

Integrály, které nelze řešit pomocí základních vzorců, lze velmi často řešit substituční metodou. Vzorce pro derivace elementárních funkcí a věty o derivaci součtu a součinu funkcí nám v kapitolách 1.2 a 1.3 umožnily nalézt vzorce, resp. metody pro výpočet některých neurčitých integrálů. V této kapitole pro výpočet využijeme větu o derivaci složené funkce. Pomocí ní získáme větu, která nám poskytne jednu z nejdůležitějších a nejčastěji používaných metod integrování – substituční metodu. Připomínáme, že neexistuje univerzální návod, kdy substituční metodu použít, ani jakou substituci zvolit. Doporučujeme pečlivě prostudovat tuto kapitolu a propočítat si řešené úlohy. Důležité je získat zkušenosti se substituční metodou samostatným řešením většího množství příkladů.

Cíle

Seznámíte se s principem integrace substituční metodou a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu). Bude užíváno pravidlo pro výpočet derivace složené funkce, diferenciálu funkce jedné proměnné a inverzní funkce.

Výklad

Velmi často se vyskytují integrály typu

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$$

nebo integrály, které se dají na tento tvar upravit. Tento tvar má například integrál

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx\,.$$

V tomto případě je $f(u)=\sin u$, $u=\varphi(x)=x^2+1$, a tedy $u'=\varphi'(x)=2x$.

Všimněte si, že integrovaná funkce má tyto vlastnosti:

- Je součinem dvou funkcí $f\left(\varphi(x)\right)$ a $\varphi'(x)$.

- První z nich je složená funkce s vnější funkcí f a vnitřní funkcí φ. Druhá je derivací vnitřní funkce.

Předpokládejme, že funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu (α,β) a funkce $u=\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b), a nechť pro každé $x\in(a,b)$ platí $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$ (funkce $\varphi(x)$ zobrazuje interval (a,b) do intervalu (α,β)).

Protože funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu (α,β), má na něm spojitou primitivní funkci $F(u)$, takže platí $f(u)=F'(u)$. Funkce $F(u)$ je na uvedeném intervalu složenou funkcí $F(\varphi)$, tedy pro derivaci složené funkce platí:

$$\left[F(\varphi(x))\right]' = F'(u)\varphi'(x) = f(u)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

To znamená (podle definice 1.1.1), že funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a tedy

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) = F(u) = \int f(u)du.$$

Získaný výsledek zformulujeme ve větě:

Věta 1.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x)=u$)

Nechť $F(u)$ je primitivní funkce ke spojité funkci $f(u)$ na intervalu (α,β). Nechť má funkce $u=\varphi(x)$ derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a nechť pro každé $x\in(a,b)$ platí $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b). Tedy platí

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Poznámka

Vzorec ve větě 1.4 si zapamatujeme velmi snadno. V integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ *položíme* $u=\varphi(x)$ *(provedeme substituci). Diferencováním dostaneme* $du=\varphi'(x)dx$*. Takže za výraz* $\varphi'(x)dx$ *v daném integrálu můžeme formálně dosadit* du*.*

Tvrzení věty 1.4.1 můžeme přehledně shrnout:

Substituce typu $\varphi(x) = u$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.1, položíme (provedeme substituci)

$\varphi(x) = u$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$\varphi'(x)dx = du$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(u)\,du$.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.1. Vypočtěte integrál $\int 2x\sin(x^2+1)\,dx$.

Řešení:

Je zřejmé, že pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$ je $2xdx$ diferenciál funkce x^2+1. Proto položíme $u = x^2+1 = \varphi(x)$, a tedy $du = 2xdx = \varphi'(x)dx$. Funkce $f(u) = \sin u$ je spojitá pro všechna $u \in (-\infty,\infty)$ a má na tomto intervalu primitivní funkci $F(u) = \cos u$. Jsou splněny předpoklady věty 1.4.1, proto platí:

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + C = -\cos(x^2+1) + C.$$

Příklad 1.4.2. Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

Řešení:

Je zřejmé, že pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$ je $\cos x\,dx$ diferenciál funkce $\sin x$. Proto položíme

$u = \sin x$, potom $du = \cos x\,dx$.

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u = \sin x\\ du = \cos x\,dx\end{array}\right| = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Příklad 1.4.3. Vypočtěte integrál $\int f(ax+b)dx$ pro $a \neq 0$, (vzorec [16] v tabulce 1.2.1.)

Řešení:

O platnosti vzorce [16] v tabulce 1.2.1 jsme se mohli snadno přesvědčit derivováním. Ke stejnému výsledku můžeme dospět substitucí. Je-li funkce $f(u)$ spojitá na intervalu (α,β), má na něm spojitou primitivní funkci $F(u)$. Vnitřní funkce $u=\varphi(x)=ax+b$ má na intervalu $(-\infty,\infty)$ nenulovou derivaci $\varphi'(x)=a$ pro $a\neq 0$, a proto

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=ax+b\\ du=adx\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int f(u)\,du=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Podle tohoto vztahu dostáváme:

$$\int\frac{1}{3x+5}dx=\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C \quad (\ ax+b=3x+7=u \ \text{ a } \ f(u)=\frac{1}{u}\ ),$$

$$\int(3-2x)^4dx=\frac{1}{-2}\frac{(3-2x)^5}{5}+C=-\frac{1}{10}(3-2x)^5+C \quad (\,ax+b=-2x+3=u \ \text{ a } \ f(u)=u^4),$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C \quad (\,ax+b=2x=u \ \text{ a } \ f(u)=e^u\,).$$

Příklad 1.4.4. Vypočtěte integrál $\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=5+x^2\\ du=2xdx\end{array}\right|=\frac{3}{2}\int 2x\sqrt{5+x^2}\,dx=\frac{3}{2}\int\sqrt{u}\,du=\frac{3}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=u^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}+C.$$

Příklad 1.4.5. Vypočtěte integrál $\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Řešení:

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=\sqrt{x}\\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{array}\right|=2\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\operatorname{cotg}u\,du=2\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ t=\sin u\\ dt=\cos u\,du\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt=2\ln|t|+C=2\ln|\sin u|+C=2\ln\left|\sin\sqrt{x}\right|+C.$$

Místo druhé substituce bylo možno přímo použít vzorec [13] v tabulce 1.2.1.

Příklad 1.4.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Řešení:

Při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ se musíme omezit na nějaký interval, v němž se $\sin x$ nikdy nerovná nule (pro jednoduchost např. na $x \in (0, \pi)$). Pro úpravu integrandu použijeme vztah $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ u = \frac{x}{2} \\ du = \frac{1}{2}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin u \cos u}\,du = \int \frac{1}{\frac{\sin u}{\cos u}\cos^2 u}\,du =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} u \cos^2 u}\,du \quad \text{pro} \quad u \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož $\frac{1}{\cos^2 u}$ je derivace funkce $\operatorname{tg} u$, provedeme substituci $t = \operatorname{tg} u$ (tedy $t > 0$). Dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} u \cos^2 u}\,du = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ t = \operatorname{tg} u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln t + C = \ln \operatorname{tg} u + C =$$

$$= \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Výklad

Podle věty 1.4.1 jsme integrál

$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ substitucí $\varphi(x) = u$ převedli na integrál $\int f(u)\,du$.

V některých případech je vhodné zvolit opačný postup.

Máme vypočítat integrál $\int f(x)\,dx$. Substitucí $x = \varphi(t)$ (tedy $dx = \varphi'(t)\,dt$) se snažíme tento integrál převést na integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, který může být jednodušší. Otázkou je, zda po nalezení primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ dovedeme najít primitivní funkci k funkci $f(x)$. Je to možné, pokud vedle předpokladů věty 1.4.1 ještě platí:

- funkce $\varphi(t)$ je na intervalu (α,β) ryze monotónní,
- pro každé $t\in(\alpha,\beta)$ je $\varphi'(t)\neq 0$.

Za uvedených předpokladů k funkci $x=\varphi(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ existuje inverzní funkce $t=\varphi^{-1}(x)=\psi(x)$ pro $x\in(a,b)$ a tato inverzní funkce má derivaci

$$\psi'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α,β), pak platí

$$G'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Složená funkce $F(x)=G(\psi(x))$ definovaná na intervalu (a,b) je na tomto intervalu primitivní funkcí k funkci $f(x)$, protože podle věty o derivaci složené funkce platí:

$$F'(x)=G'(t)\psi'(x)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$$

Získaný výsledek zformulujeme ve větě:

Věta 1.4.2 (Integrování substituční metodou $x=\varphi(t)$)

Nechť funkce $x=\varphi(t)$ zobrazující interval (α,β) na interval (a,b) je rostoucí, popř. klesající, na intervalu (α,β) a má tam spojitou derivaci $\varphi'(t)\neq 0$ a nechť funkce $t=\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x=\varphi(t)$ na intervalu (a,b). Je-li $f(x)$ spojitá funkce na intervalu (a,b) a je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α,β), potom pro všechna $x\in(a,b)$ platí

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=G(t)+C=G(\psi(x))+C.$$

Tvrzení věty 1.4.2 můžeme přehledně shrnout:

Substituce typu $x=\varphi(t)$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(x)dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.2, položíme (provedeme substituci)

$x=\varphi(t)$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$dx=\varphi'(t)dt$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Poznámka

Při výpočtu integrálů substituční metodou obvykle počítáme podle vzorce z věty 1.4.1 nebo 1.4.2, dokud nenalezneme primitivní funkci. Obvykle teprve potom zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady použité věty. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit derivováním nalezené primitivní funkce.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.7. Vypočtěte integrál $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ je spojitá pro $x\in(-2,2)$. Zavedeme substituci $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$. Je však nutno omezit proměnnou x tak, aby bylo možno nalézt funkci inverzní $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Pro $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ bude $x\in(0,2)$ a funkce $\varphi(t)=2\sin t$ bude mít rostoucí nenulovou derivaci $\varphi'(t)=2\cos t$. Dostaneme

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ x=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt\end{array}\right| = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt = 4\int\sqrt{1-\sin^2 t}\;\cos t\,dt =$$

$$=4\int\cos^2 t\,dt = 4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C = 2t+2\sin t\cos t + C = 2t+2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C =$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C = 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C\,.$$

Při výpočtu jsme použili vzorce

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Analogický výsledek bychom dostali pro $t\in(-\frac{\pi}{2},0)$, kdy $x\in(-2,0)$.

Příklad 1.4.8. Vypočtěte integrál $\int \sin\sqrt{x}dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je definována pro $x \in <0,\infty)$. Provedeme substituci $x = t^2$, abychom odstranili odmocninu v integrandu. Ze substituce vyplývá, že $t = \sqrt{x}$ nebo $t = -\sqrt{x}$. Zvolíme $t = \sqrt{x}$, takže t je z intervalu $(0,\infty)$. Dostaneme

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = 2\int t\sin t\,dt \,.$$

Získaný integrál řešíme metodu per partes podobně jako příklad 1.3.1:

$$2\int t\sin t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin t & v = t \\ u = -\cos t & v' = 1 \end{array} \right| = 2(-t\cos t + \int \cos t\,dt) = 2(-t\cos t + \sin t) + C =$$

$$= 2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C \,.$$

Sami vyzkoušejte, že pro volbu $t = -\sqrt{x}$ tj. $t \in (-\infty,0)$ dostaneme stejný výsledek.

Příklad 1.4.9. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení:

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ je spojitá pro $x \in (-\infty,\infty)$. Položíme $x = \operatorname{cotg} t$. Funkce $\operatorname{cotg} t$ je pro $t \in (0,\pi)$ klesající a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty,\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \operatorname{cotg} t \\ dx = \dfrac{-1}{\sin^2 t}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 t}} \frac{-1}{\sin^2 t}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}}} \frac{1}{\sin^2 t}dt =$$

$$= -\int \frac{|\sin t|}{\sin^2 t}dt = -\int \frac{1}{\sin t}dt \,,$$ neboť pro $t \in (0,\pi)$ je $\sin t > 0$.

Dostali jsme integrál, který jsme řešili v příkladu 1.4.6.

$$-\int \frac{1}{\sin t}dt = -\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x\right) + C \,.$$

Poznámka

Pokud zadáme integrál nějakému matematickému programu (např. Derive, Maple, *Mathematica), získáme výsledek* $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. *Na první pohled se zdá, že se jedná o úplně jinou funkci. Derivováním se však snadno přesvědčíme, že výsledek je správný. Znamená to, že programy použily jinou metodu výpočtu, než jsme uvedli my.*

V literatuře [9] lze nalézt postup, jak převést jeden výsledek na druhý. Druhé řešení můžeme dostat následujícím postupem:

✖ Provedeme substituci $\sqrt{1+x^2}=t-x$.

Po umocnění uvedené rovnice snadno vypočteme $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ a tedy $dx=\dfrac{2t^2+2}{4t^2}dt$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{t-\frac{t^2-1}{2t}}\frac{2(t^2+1)}{4t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

Jelikož je $x+\sqrt{x^2+1}>0$, dostaneme $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, což je hledaný výsledek.

Poznámka

Použitá substituce patří mezi Eulerovy substituce použitelné při výpočtu složitějších integrálů z racionální funkce, která navíc obsahuje výraz typu $\sqrt{ax^2+bx+c}$. *Podrobnější informace naleznete v literatuře* [6], [9], [14], [17].

Příklad 1.4.10. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

Řešení:

Funkce $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ je definována pro $x\in\langle 0,\infty)$. Ve funkci se vyskytují mocniny $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$.

Zavedeme substituci $x=t^k$ tak, abychom odstranili všechny odmocniny ve výrazu. V našem případě bude k nejmenší společný násobek čísel 2 a 3. Pro $x=t^6$ bude $\sqrt{x}=t^3$ a $\sqrt[3]{x}=t^2$. Analogicky jako v příkladu 1.4.8 budeme volit $t=\sqrt[6]{x}$ pro $t\in\langle 0,\infty)$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2} dt = 6\int \left(t^8 : (t^2+1)\right) dt =$$

$$= 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} \right) + C .$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte princip substituční metody.
2. Kdy a za jakých podmínek použijeme substituci typu $\varphi(x) = u$?
3. Kdy a za jakých podmínek použijeme substituci typu $x = \varphi(t)$?
4. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$?
5. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \cos x \sin x \, dx$?
6. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$?
7. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3+3}\, dx$ b) $\int \frac{x}{\left(x^2+4\right)^6} dx$ c) $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$

d) $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$ e) $\int \frac{3}{2-5x} dx$ f) $\int \sqrt{7-3x}\, dx$

2. a) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$ b) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$ c) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$

d) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x \, dx$ e) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$ f) $\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x}}\,dx$

4. a) $\displaystyle\int \frac{3^x}{4+9^x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(\operatorname{tg} x)}{\sin x\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$ e) $\displaystyle\int \frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}}{9+4x^2}\,dx$

5. a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x-3}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\displaystyle\frac{1}{4}\left(x^2+3\right)^{\frac{2}{3}}+C$; b) $\displaystyle\frac{-1}{10\left(x^2+4\right)^5}+C$; c) $\displaystyle\frac{9}{8}\left(x^4+1\right)^{\frac{2}{3}}+C$; d) $\displaystyle-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$;

e) $\displaystyle-\frac{3}{5}\ln|2-5x|+C$; f) $\displaystyle-\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}+C$. **2.** a) $\displaystyle\frac{1}{5}\ln^5 x+C$; b) $\displaystyle-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$;

c) $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$; d) $-e^{\cos^2 x}+C$; e) $-2\sqrt{2+\cos x}+C$; f) $\displaystyle 2\sqrt{\ln x}\left(\frac{\ln x}{3}-1\right)+C$.

3. a) $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+C$; b) $\displaystyle-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+C$; c) $\ln\left(\sin^2 x+3\right)+C$;

d) $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}^2 x\right)+C$; e) $\displaystyle\frac{2}{3}\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}} e^x+C$; f) $\displaystyle-\frac{4}{3}(\cos x+\sin x)^{\frac{3}{4}}+C$.

4. a) $\displaystyle\frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2}+C$; b) $\sqrt{x}(\ln x-2)+C$; c) $\displaystyle\frac{1}{3}\ln^3(\operatorname{tg} x)+C$; d) $\displaystyle\arcsin\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

e) $\displaystyle\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos^2 x+C$; f) $\displaystyle\frac{1}{12}\operatorname{arctg}^2\frac{2x}{3}+C$. **5.** a) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$;

b) $4\sqrt{x}-x-4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; c) $\displaystyle 2\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{2}}+C$;

d) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C$;

e) $3\left(\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}-2\sin\sqrt[3]{x}\right)+C$;

f) $-\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg}\frac{x}{3}\right)\right)+C$.

Kontrolní test

1. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$?

a) $\frac{1}{x}=t$, b) $\ln x=t$,

c) $\ln^2 x=t$, d) $\sqrt{1-\ln^2 x}=t$.

2. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\sin^3 x\cos 2x\,dx$?

a) $\cos x=t$, b) $\sin x=t$,

c) $\cos 2x=t$, d) $\sin^3 x=t$.

3. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$?

a) $x=t^2$, b) $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$,

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=t$, d) $x=t^4$.

4. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$?

a) $e^{2x}=t$, b) $e^{x}=t$,

c) $e^{3x}=t$, d) $e^{2x}+1=t$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int(x+2)e^{x^2+4x+5}dx$.

a) $e^{x^2+4x+5}+C$, b) $(x+2)e^{x^2+4x+5}-e^{x^2+4x+5}+C$,

c) $2e^{x^2+4x+5}+C$, d) $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+5}+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$.

a) $\arcsin 3^x + C$, b) $\ln 3 . \arcsin 3^x + C$,

c) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + C$, d) $2\sqrt{1-9^x}$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

a) $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$, b) $\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$,

c) $\ln\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$, d) $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$.

8. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$?

a) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - x + C$, b) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + C$,

c) $\frac{1}{2}(1+x^2) - \ln\sqrt{1+x^2} + C$, d) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + \sqrt{1+x^2} + C$.

9. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \cos^3 x\, dx$?

a) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$, b) $-\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$,

c) $x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$, d) $x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

10. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{e^x}}{e^x + 4}dx$?

a) $\ln(e^x + 4) + C$, b) $\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + C$,

c) $2\sqrt{e^x} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x}}{2} + C$, d) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x}}{2} + C$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.4 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

Při výpočtu integrálů je často používána substituční metoda. Substituční metodou lze řešit dva typy úloh. V prvním typu integrálů se snažíme integrand upravit na dva činitele, z nichž jeden je složenou funkcí proměnné x s vnitřní funkcí $\varphi(x)$ a druhý je derivací této funkce $\varphi'(x)$. Tedy se snažíme integrál upravit na tvar $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Jestliže nyní položíme $\varphi(x) = u$, je $\varphi'(x)dx = du$ a daný integrál převedeme na integrál $\int f(u)\,du$. Méně často používáme druhý typ substituce. Integrál $\int f\left(x\right)dx$ lze někdy substitucí $x = \varphi(t)$, a tedy $dx = \varphi'(t)\,dt$, převést na jednodušší integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Uvedené metody budou úspěšné, pokud umíme vypočítat nové integrály. Tento postup lze realizovat, pokud jsou splněny podmínky uvedené ve větách v této kapitole. Při výpočtu integrálů substituční metodou obvykle počítáme formálně podle uvedených vztahů, dokud nenalezneme primitivní funkci. Obvykle teprve potom zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady použité věty. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit derivováním nalezené primitivní funkce. Úspěch při integrování substituční metodou závisí na obratnosti a zkušenosti, abychom dopředu viděli, na jaký integrál určitou substitucí upravíme původní integrál, případně jak integrál upravit, abychom v integrované funkci viděli tvar $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. V některých případech můžeme integrál řešit pomocí různých substitucí.