

### 1.3. Integrace metodou per partes



#### Průvodce studiem



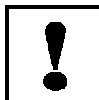
V předcházející kapitole jsme poznali, že integrování součtu funkcí lze provést jednoduše, známe-li integrály jednotlivých sčítanců (věta 1.2.1). Součin funkcí už obvykle nelze integrovat jednoduše. Problém je v tom, že neexistuje univerzální algoritmus pro integrování součinu funkcí (to je podstatný rozdíl proti derivování součinu funkcí!). V některých případech lze integrovat součin funkcí metodou per partes (čili po částech).



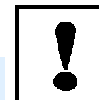
#### Cíle



Seznámíte se s principem integrace metodou per partes a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.



#### Předpokládané znalosti



Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu).



#### Výklad



Pro integrování součinu dvou funkcí  $f(x) \cdot g(x)$

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx \quad \text{obecně neplatí!!!}$$

Avšak ze vztahu pro derivování součinu dvou funkcí

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{dostaneme} \quad u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

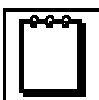
a odtud integrováním

$$\int u' \cdot v \, dx = \int [(u \cdot v)' - u \cdot v'] \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx.$$

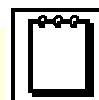
#### Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  v intervalu  $(a, b)$  spojitou derivaci, pak v  $(a, b)$  platí

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx.$$



#### Poznámka

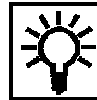


Integrační metoda se nazývá per partes (po částech), neboť se integrál z funkce  $f(x) = u'(x) \cdot v(x)$  vypočte jen zčásti. Zbývá totiž vypočítat další integrál z funkce

$g(x) = u(x) \cdot v'(x)$  . *Integrovaní metodou per partes vyžaduje určitou „prozíravost“, abychom volili funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  tak, aby byl integrál  $\int g(x)dx = \int u(x) \cdot v'(x)dx$ , pokud možno, jednodušší.*



### Řešené úlohy



**Příklad 1.3.1.** Vypočtete integrál  $\int (x^2 + x) \cos x \, dx$

#### Řešení:

Použijeme metodu per partes, přičemž položíme

$$u' = \cos x, \quad v = x^2 + x,$$

takže  $u = \sin x, \quad v' = 2x + 1.$

Proto je  $\int (x^2 + x) \cos x \, dx = (x^2 + x) \sin x - \int (2x + 1) \sin x \, dx.$

K výpočtu posledního integrálu opět použijeme metody per partes, přičemž položíme

$$u' = \sin x, \quad v = 2x + 1,$$

takže  $u = -\cos x, \quad v' = 2.$

Dostaneme  $\int (2x + 1) \sin x \, dx = -(2x + 1) \cos x + 2 \int \cos x \, dx = -(2x + 1) \cos x + 2 \sin x + C_1.$

Je tedy  $\int (x^2 + x) \cos x \, dx = (x^2 + x) \sin x + (2x + 1) \cos x - 2 \sin x + C.$

Kdybychom v daném integrálu zvolili  $u' = x^2 + x, \quad v = \cos x,$

bylo by  $u = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}, \quad v' = -\sin x$  a daný integrál bychom dostali ve tvaru

$$\int (x^2 + x) \cos x \, dx = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \cos x + \int \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \sin x \, dx, \text{ což je integrál složitější než}$$

původní.

**Příklad 1.3.2.** Vypočtete integrál  $\int x^2 \ln x \, dx$

Pokud bychom stejně jako v úloze a) volili

$$u' = \ln x, \quad v = x^2, \text{ dostaneme } u = \int \ln x \, dx. \text{ Tento integrál je však pro}$$

nás v tomto okamžiku obtížný. Proto volíme

$$u' = x^2, \quad v = \ln x,$$

takže  $u = \frac{x^3}{3}, \quad v' = \frac{1}{x}.$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Pro jednoduché typy integrálů postupujeme podle následujícího schématu:

### Jednoduché typy integrálů řešitelných metodou per partes.

Je-li  $P(x)$  polynom stupně  $n \geq 1$ , pak u integrálů typu:

$$\int P(x) \sin x \, dx,$$

$$\int P(x) \cos x \, dx,$$

$$\int P(x) e^x \, dx,$$

$$\int P(x) a^x \, dx$$

položíme  $v = P(x)$ , takže  $v' = P'(x)$ ,

kdežto u integrálů typu:

$$\int P(x) \ln x \, dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x \, dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arccotg} x \, dx,$$

$$\int P(x) \arcsin x \, dx,$$

$$\int P(x) \arccos x \, dx$$

položíme  $u' = P(x)$ , takže  $u = \int P(x) dx$ ,

kde  $P(x)$  je polynom stupně  $n \geq 0$  (tedy i konstanta).



### Řešené úlohy



**Příklad 1.3.3.** Vypočtěte integrál  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

**Řešení:**

Integrovanou funkci můžeme výhodně zapsat ve tvaru  $\operatorname{arctg} x = 1 \cdot \operatorname{arctg} x$ .

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \operatorname{arctg} x \\ u = x \quad v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Při výpočtu druhého integrálu jsme použili vztah [13] z tabulky 1.2.1.

**Příklad 1.3.4.** Vypočtěte integrál  $\int x^2 e^{-x} dx$ .

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= \left. \begin{array}{l} u' = e^{-x} \quad v = x^2 \\ u = -e^{-x} \quad v' = 2x \end{array} \right| = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = \\ &= \left. \begin{array}{l} u' = e^{-x} \quad v = 2x \\ u = -e^{-x} \quad v' = 2 \end{array} \right| = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C. \end{aligned}$$

**Příklad 1.3.5.** Vypočtěte integrál  $\int x^n \ln x dx$

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \left. \begin{array}{l} u' = x^n \quad v = \ln x \\ u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \end{aligned}$$

Speciálně pro  $n=0$  dostáváme

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C.$$

**Příklad 1.3.6.** Vypočtěte integrál  $\int e^{-x} \cos(2x) dx$ .

**Řešení:**

V tomto případě lze volit  $u' = e^{-x}$ . K cíli však povede i volba  $u' = \cos(2x)$ .

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos(2x) dx &= \left. \begin{array}{l} u' = e^{-x} \quad v = \cos(2x) \\ u = -e^{-x} \quad v' = -2 \sin(2x) \end{array} \right| = -e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx = \\ &= \left. \begin{array}{l} u' = e^{-x} \quad v = \sin(2x) \\ u = -e^{-x} \quad v' = 2 \cos(2x) \end{array} \right| = -e^{-x} \cos(2x) - 2 \left[ -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) dx \right] = \end{aligned}$$

$$-e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x) - 4 \int e^{-x} \cos(2x) dx .$$

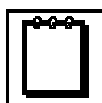
Jestliže hledaný integrál označíme symbolem  $I = \int e^{-x} \cos(2x) dx$ , dostáváme rovnici

$$I = -e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x) - 4I .$$

Z této rovnice vypočteme neznámou  $I$

$$5I = -e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x) ,$$

$$I = \frac{1}{5} \left[ -e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x) \right] = \frac{e^{-x}}{5} [2 \sin(2x) - \cos(2x)] + C .$$



### Poznámka

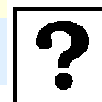
Stejně jako v příkladu 1.3.6 se někdy stává, že při použití metody per partes dostaneme násobek hledaného integrálu:  $\int f(x) dx = F(x) + k \int f(x) dx$  ( $k$  je konstanta). Je-li  $k \neq 1$ , lze hledaný integrál vypočítat převedením integrálů na stejnou stranu rovnice. Tedy

$$(1-k) \int f(x) dx = F(x), \text{ odkud}$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{1-k} F(x) + C .$$



### Kontrolní otázky

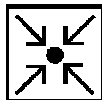


1. Proč se integrační metoda nazývána per partes?
2. Lze integrál  $\int e^{2x} \cdot e^{3x} dx = \int e^{2x} dx \cdot \int e^{3x} dx$  počítat naznačeným způsobem? Čemu se rovná tento integrál?
3. Jak by se podle věty 1.3. vypočítal integrál typu  $\int u(x) \cdot v'(x) dx$ ?
4. Jak volit funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  při výpočtu integrálu  $\int x^3 \sin x dx$ ?
5. Jak volit funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  při výpočtu integrálu  $\int x^3 \ln x dx$ ?
6. Jak volit funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  při výpočtu integrálu  $\int \ln^2 x dx$ ?
7. Jak volit funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  při výpočtu integrálu  $\int e^{2x} \sin x dx$ ?
8. Doplňte funkci  $v(x)$ , je-li  $u'(x) = x$  a výsledný integrál je  $I = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$ .

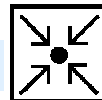
9. Doplňte funkci  $v(x)$ , je-li  $u'(x) = \sin 3x$  a výsledný integrál je

$$I = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$$

10. Doplňte funkci  $v(x)$ , je-li  $u'(x) = 1$  a výsledný integrál je  $I = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$ .



### Úlohy k samostatnému řešení



- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. a) $\int x^2 \sin x dx$                    | b) $\int (2x+3) \cos 2x dx$               | c) $\int 3x \cos \frac{x}{2} dx$         |
| c) $\int x e^{2x} dx$                         | d) $\int (x^2 + 2x) e^{\frac{x}{3}} dx$   | e) $\int x^2 2^{-x} dx$                  |
| 2. a) $\int x^2 \ln x dx$                     | b) $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$    | c) $\int \sqrt{x} \ln 2x dx$             |
| c) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$        | d) $\int x \ln^2 x dx$                    | e) $\int 4x^3 \operatorname{arctg} x dx$ |
| 3. a) $\int \ln x dx$                         | b) $\int \ln^2 x dx$                      | c) $\int \operatorname{arctg} x dx$      |
| c) $\int \operatorname{arccotg} x dx$         | d) $\int \arcsin x dx$                    | e) $\int \arccos x dx$                   |
| 4. a) $\int e^x \cos x dx$                    | b) $\int e^{-2x} \sin 3x dx$              | c) $\int 2^x \cos 2x dx$                 |
| c) $\int \cos(\ln x) dx$                      | d) $\int \sin(\ln 2x) dx$                 | e) $\int e^{-x} \sin^2 x dx$             |
| 5. a) $\int \frac{2x}{\sin^2 x} dx$           | b) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$ | c) $\int \operatorname{arctg}(2x+3) dx$  |
| d) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | e) $\int \ln^3 x dx$                      | f) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$       |



### Výsledky úloh k samostatnému řešení



- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. a) $(2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C;$   | b) $\left(x + \frac{3}{2}\right) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C;$ |  |
| c) $6 \left(x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}\right) + C;$                    | d) $\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C;$            | e) $3e^{\frac{x}{3}} \left(x^2 - 4x + 12\right) + C;$              |
| f) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2} \left(x^2 + \frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{\ln^2 2}\right).$ | 2. a) $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C;$          | b) $(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - x + C;$                     |
| c) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln 2x - \frac{2}{3}\right) + C;$                  | d) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \left(\ln x + \frac{3}{2}\right) + C;$ | e) $\frac{x^2}{2} \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C;$ |

- f)  $(x^4 - 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + x + C$ .      3. a)  $x \ln x - x + C$ ;      b)  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$ ;
- c)  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$ ;      d)  $x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$ ;      e)  $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$ ;
- f)  $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$ .      4. a)  $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$ ;
- b)  $-\frac{1}{13} e^{-2x} (3 \cos 3x + 2 \sin 3x) + C$ ;      c)  $\frac{2^{x+2} \ln 2}{4 + \ln^2 2} (\cos 2x - \ln 2 \sin 2x) + C$ ;
- d)  $\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$ ;      e)  $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$ ;
- f)  $e^{-x} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \sin 2x + \frac{1}{10} \cos 2x \right) + C$ .      5. a)  $2 \ln |\sin x| - 2x \cotg x + C$ ;
- b)  $\operatorname{tg} x (\ln(\cos x) + 1) - x + C$ ;      c)  $\left( x + \frac{3}{2} \right) \operatorname{arctg}(2x + 3) - \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 12x + 10) + C$ ;
- d)  $x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C$ ;      e)  $x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x - 6 \ln x + 6) + C$ ;      f)  $\frac{e^x}{x+1} + C$ .



### Kontrolní test



- Doplňte funkci  $v(x)$ , je-li  $u'(x) = x$  a výsledný integrál je  $I = -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C$ .
  - $v(x) = \sin 2x$ ,
  - $v(x) = \sin x \cos x$ ,
  - $v(x) = x \sin 2x$ ,
  - $v(x) = \sin \frac{x}{2}$ .
- Doplňte funkci  $v(x)$ , je-li  $u'(x) = 1$  a výsledný integrál je  $I = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$ .
  - $v(x) = \ln 2x$ ,
  - $v(x) = 2 \ln x$ ,
  - $v(x) = \ln x^2$ ,
  - $v(x) = \ln^2 x$ .
- Jak volit funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  při výpočtu integrálu  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ?
  - $u' = x$ ,  $v = \operatorname{arctg} x$ ,
  - $u' = \operatorname{arctg} x$ ,  $v = x$ ,
  - $u' = 1$ ,  $v = x \operatorname{arctg} x$ .
  - $u' = x \operatorname{arctg} x$ ,  $v = 1$
- Jak volit funkce  $u'(x)$  a  $v(x)$  při výpočtu integrálu  $\int \frac{x^3}{e^x} dx$ ?
  - $u' = x^3$ ,  $v = e^x$ ,
  - $u' = x^3$ ,  $v = e^{-x}$ ,
  - $u' = \frac{1}{e^x}$ ,  $v = x^3$ ,
  - $u' = 1$ ,  $v = x^3 e^{-x}$ .

5. Vypočtěte neurčitý integrál  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ .

a)  $x \cotg x - \ln |\sin x| + C$ ,

b)  $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$ ,

c)  $x \operatorname{tg} x - \ln |\cos x| + C$ ,

d)  $x \cotg x + \ln |\sin x| + C$ .

6. Vypočtěte neurčitý integrál  $\int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx$ .

a)  $-\cotg x \ln \cos x - x + C$ ,

b)  $-\cotg x \ln \cos x + x + C$ ,

c)  $\cotg x \ln \cos x - x + C$ ,

d)  $\cotg x \ln \cos x + x + C$ .

7. Vypočtěte neurčitý integrál  $\int (x^2 - x) \sin 2x dx$ .

a)  $(-\frac{x^2}{2} + x) \cos 2x - \frac{1}{2}(x-1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ ,

b)  $(x^2 - 2x) \cos 2x - (x-1) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$ ,

c)  $(-\frac{x^2}{2} + x) \cos 2x + (x-1) \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$ ,

d)  $(-\frac{x^2}{2} + x) \cos 2x + \frac{1}{2}(x-1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ .

8. Čemu se rovná neurčitý integrál  $\int x 3^x dx$  ?

a)  $x 3^x \ln 3 - 3^x \ln^2 3 + C$ ,

b)  $\frac{3^x}{\ln 3} (x - \frac{1}{\ln 3}) + C$ ,

c)  $x 3^x - 3^x \ln 3 + C$ ,

d)  $\frac{x 3^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln 3^2} + C$ .

9. Čemu se rovná neurčitý integrál  $\int x \ln(1-x) dx$  ?

a)  $\frac{x^2-1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$ ,

b)  $\frac{x^2-1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$ ,

c)  $\frac{x^2}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) + C$ ,

d)  $\frac{-x}{1-x} + \ln(1-x) + C$ .



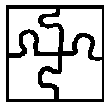
10. Čemu se rovná neurčitý integrál  $\int e^{2x} \sin x dx$  ?

a)  $\frac{1}{5}e^{2x}(2 \sin x + \cos x) + C$ ,

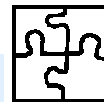
b)  $\frac{1}{5}e^{2x}(2 \sin x - \cos x) + C$ ,

c)  $\frac{1}{2}e^{2x}(\sin x - \cos x) + C$ ,

d)  $\frac{1}{5}e^{2x}(\cos x + 2 \sin x) + C$ .



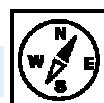
### Výsledky testu



1. b); 2. d); 3. a); 4. c); 5. b); 6. a); 7. d); 8. b); 9. a); 10. b).

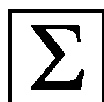


### Průvodce studiem



Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.3 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.



### Shrnutí lekce



Pro integraci součinu dvou funkcí  $f(x) \cdot g(x)$  nelze nalézt obecnou formuli (na rozdíl od derivování součinu funkcí). Při integraci součinu funkce a derivace jiné funkce lze často užít metodu per partes (po částech). Nejčastěji je tato metoda využívána při výpočtu integrálů typu  $\int P(x) \cdot f(x) dx$ , kde  $P(x)$  je polynomická funkce (může být i  $P(x)=1$ ) a  $f(x)$  je trigonometrická, exponenciální, logaritmická nebo cyklometrická funkce. Metoda bude úspěšná, pokud zbývající integrál bude jednodušší než integrál původní.