1.3. Integrace metodou per partes

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme poznali, že integrování součtu funkcí lze provést jednoduše, známe-li integrály jednotlivých sčítanců (věta 1.2.1). Součin funkcí už obvykle nelze integrovat jednoduše. Problém je v tom, že neexistuje univerzální algoritmus pro integrování součinu funkcí (to je podstatný rozdíl proti derivování součinu funkcí!). V některých případech lze integrovat součin funkcí metodou per partes (čili po částech).

Cíle

Seznámíte se s principem integrace metodou per partes a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu).

Výklad

Pro integrování součinu dvou funkcí $f(x)\cdot g(x)$

$\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ **obecně neplatí!!!**

Avšak ze vztahu pro derivování součinu dvou funkcí

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ dostaneme $u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$

a odtud integrováním

$$\int u'\cdot v\, dx = \int \left[(u\cdot v)' - u\cdot v'\right] dx = u\cdot v - \int u\cdot v' dx .$$

Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a,b) spojitou derivaci, pak v (a,b) platí

$$\int u'(x)\cdot v(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x) dx \ .$$

Poznámka

Integrační metoda se nazývá per partes (po částech), neboť se integrál z funkce $f(x) = u'(x)\cdot v(x)$ vypočte jen zčásti. Zbývá totiž vypočíst další integrál z funkce

$g(x) = u(x) \cdot v'(x)$ *. Integrování metodou per partes vyžaduje určitou „prozíravost“, abychom volili funkce* $u'(x)$ *a* $v(x)$ *tak, aby byl integrál* $\int g(x)dx = \int u(x) \cdot v'(x)dx$*, pokud možno, jednodušší.*

Řešené úlohy

Příklad 1.3.1. Vypočtěte integrál $\int (x^2 + x)\cos x \, dx$

Řešení:

Použijeme metodu per partes, přičemž položíme

$u' = \cos x$, $v = x^2 + x$,

takže $u = \sin x$, $v' = 2x + 1$.

Proto je $\int (x^2 + x)\cos x \, dx = (x^2 + x)\sin x - \int (2x + 1)\sin x \, dx$.

K výpočtu posledního integrálu opět použijeme metody per partes, přičemž položíme

$u' = \sin x$, $v = 2x + 1$,

takže $u = -\cos x$, $v' = 2$.

Dostaneme $\int (2x+1)\sin x \, dx = -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x \, dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C_1$.

Je tedy $\int (x^2 + x)\cos x \, dx = (x^2 + x)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x + C$.

Kdybychom v daném integrálu zvolili $u' = x^2 + x$, $v = \cos x$,

bylo by $u = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $v' = -\sin x$ a daný integrál bychom dostali ve tvaru

$\int (x^2 + x)\cos x \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\cos x + \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\sin x \, dx$, což je integrál složitější než původní.

Příklad 1.3.2. Vypočtěte integrál $\int x^2 \ln x \, dx$

Pokud bychom stejně jako v úloze a) volili

$u' = \ln x$, $v = x^2$, dostaneme $u = \int \ln x dx$. Tento integrál je však pro nás v tomto okamžiku obtížný. Proto volíme

$u' = x^2$, $v = \ln x$,

takže $u = \dfrac{x^3}{3}$, $v' = \dfrac{1}{x}$.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Pro jednoduché typy integrálů postupujeme podle následujícího schématu:

Jednoduché typy integrálů řešitelných metodou per partes.

Je-li $P(x)$ polynom stupně $n \geq 1$, pak u integrálů typu:

$$\int P(x) \sin x \, dx,$$

$$\int P(x) \cos x \, dx,$$

$$\int P(x) e^x dx,$$

$$\int P(x) \mathrm{a}^x \, dx$$

položíme $v = P(x)$, takže $v' = P'(x)$,

kdežto u integrálů typu:

$$\int P(x) \ln x \, dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x \, dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arccotg} x \, dx,$$

$$\int P(x) \arcsin x \, dx,$$

$$\int P(x) \arccos x \, dx$$

položíme $u' = P(x)$, takže $u = \int P(x) dx$,

kde $P(x)$ je polynom stupně $n \geq 0$ (tedy i konstanta).

Řešené úlohy

Příklad 1.3.3. Vypočtěte integrál $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

Řešení:

Integrovanou funkci můžeme výhodně zapsat ve tvaru $\operatorname{arctg} x = 1 \cdot \operatorname{arctg} x$.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \operatorname{arctg} x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Při výpočtu druhého integrálu jsme použili vztah [13] z tabulky 1.2.1.

Příklad 1.3.4. Vypočtěte integrál $\int x^2 e^{-x} dx$.

Řešení:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = x^2 \\ u = -e^{-x} & v' = 2x \end{vmatrix} = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = 2x \\ u = -e^{-x} & v' = 2 \end{vmatrix} = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Příklad 1.3.5. Vypočtěte integrál $\int x^n \ln x \, dx$

Řešení:

$$\int x^n \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u' = x^n & v = \ln x \\ u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & v' = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

Speciálně pro $n = 0$ dostáváme

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Příklad 1.3.6. Vypočtěte integrál $\int e^{-x}\cos(2x) dx$.

Řešení:

V tomto případě lze volit $u' = e^{-x}$. K cíli však povede i volba $u' = \cos(2x)$.

$$\int e^{-x}\cos(2x) dx = \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = \cos(2x) \\ u = -e^{-x} & v' = -2\sin(2x) \end{vmatrix} = -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x) dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = \sin(2x) \\ u = -e^{-x} & v' = 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -e^{-x}\cos(2x) - 2\left[-e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x) dx\right] =$$

$$-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)-4\int e^{-x}\cos(2x)dx.$$

Jestliže hledaný integrál označíme symbolem $I=\int e^{-x}\cos(2x)dx$, dostáváme rovnici

$$I=-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)-4I.$$

Z této rovnice vypočteme neznámou I

$$5I=-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x),$$

$$I=\frac{1}{5}\left[-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)\right]=\frac{e^{-x}}{5}\left[2\sin(2x)-\cos(2x)\right]+C.$$

Poznámka

Stejně jako v příkladu 1.3.6 se někdy stává, že při použití metody per partes dostaneme násobek hledaného integrálu: $\int f(x)dx=F(x)+k\int f(x)dx$ *(k je konstanta). Je-li* $k\neq 1$, *lze hledaný integrál vypočítat převedením integrálů na stejnou stranu rovnice. Tedy*

$(1-k)\int f(x)dx=F(x)$, *odkud*

$$\int f(x)dx=\frac{1}{1-k}F(x)+C.$$

Kontrolní otázky

1. Proč se integrační metoda nazývána per partes?
2. Lze integrál $\int e^{2x}\cdot e^{3x}dx=\int e^{2x}dx\cdot\int e^{3x}dx$ počítat naznačeným způsobem? Čemu se rovná tento integrál?
3. Jak by se podle věty 1.3. vypočítal integrál typu $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x^3\sin x\,dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x^3\ln x\,dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int \ln^2 x\,dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int e^{2x}\sin x\,dx$?
8. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=x$ a výsledný integrál je $I=\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+C$.

9. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=\sin 3x$ a výsledný integrál je

$$I=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C.$$

10. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=1$ a výsledný integrál je $I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int x^2\sin x\,dx$ b) $\int(2x+3)\cos 2x dx$ c) $\int 3x\cos\frac{x}{2}dx$

c) $\int xe^{2x}dx$ d) $\int\left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{3}}dx$ e) $\int x^2 2^{-x}dx$

2. a) $\int x^2\ln x dx$ b) $\int 2x\operatorname{arctg} x dx$ c) $\int\sqrt{x}\ln 2x dx$

c) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$ d) $\int x\ln^2 x dx$ e) $\int 4x^3\operatorname{arctg} x dx$

3. a) $\int\ln x dx$ b) $\int\ln^2 x dx$ c) $\int\operatorname{arctg} x dx$

c) $\int\operatorname{arccotg} x dx$ d) $\int\arcsin x dx$ e) $\int\arccos x dx$

4. a) $\int e^x\cos x dx$ b) $\int e^{-2x}\sin 3x dx$ c) $\int 2^x\cos 2x dx$

c) $\int\cos(\ln x)dx$ d) $\int\sin(\ln 2x)dx$ e) $\int e^{-x}\sin^2 x dx$

5. a) $\int\frac{2x}{\sin^2 x}dx$ b) $\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$ c) $\int\operatorname{arctg}(2x+3)dx$

d) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e) $\int\ln^3 x dx$ f) $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x+C$; b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$;

c) $6\left(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)+C$; d) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$; e) $3e^{\frac{x}{3}}\left(x^2-4x+12\right)+C$;

f) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\left(x^2+\frac{2x}{\ln 2}+\frac{2}{\ln^2 2}\right)$. **2.** a) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$; b) $\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x-x+C$;

c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln 2x-\frac{2}{3}\right)+C$; d) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x+\frac{3}{2}\right)+C$; e) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$;

f) $\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg} x-\frac{x^3}{3}+x+C$. **3.** a) $x\ln x-x+C$; b) $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$;

c) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; d) $x\operatorname{arccotg} x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; e) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

f) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **4.** a) $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$;

b) $-\frac{1}{13}e^{-2x}\left(3\cos 3x+2\sin 3x\right)+C$; c) $\frac{2^{x+2}\ln 2}{4+\ln^2 2}\left(\cos 2x-\ln 2\sin 2x\right)+C$;

d) $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+C$; e) $\frac{x}{2}\left(\sin\left(\ln x\right)-\cos\left(\ln x\right)\right)+C$;

f) $e^{-x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos 2x\right)+C$. **5.** a) $2\ln\left|\sin x\right|-2x\operatorname{cotg} x+C$;

b) $\operatorname{tg} x\left(\ln\left(\cos x\right)+1\right)-x+C$; c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(2x+3\right)-\frac{1}{4}\ln\left(4x^2+12x+10\right)+C$;

d) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; e) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+6\right)+C$; f) $\frac{e^x}{x+1}+C$.

Kontrolní test

1. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=x$ a výsledný integrál je $I=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

   a) $v(x)=\sin 2x$, b) $v(x)=\sin x\cos x$,

   c) $v(x)=x\sin 2x$, d) $v(x)=\sin\frac{x}{2}$.

2. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=1$ a výsledný integrál je $I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

   a) $v(x)=\ln 2x$, b) $v(x)=2\ln x$, c) $v(x)=\ln x^2$, d) $v(x)=\ln^2 x$.

3. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$?

   a) $u'=x,\quad v=\operatorname{arctg} x$, b) $u'=\operatorname{arctg} x,\quad v=x$,

   c) $u'=1,\quad v=x\operatorname{arctg} x$. d) $u'=x\operatorname{arctg} x,\quad v=1$

4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int\frac{x^3}{e^x}dx$?

   a) $u'=x^3,\quad v=e^x$, b) $u'=x^3,\quad v=e^{-x}$,

   c) $u'=\frac{1}{e^x},\quad v=x^3$, d) $u'=1,\quad v=x^3e^{-x}$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

a) $x\operatorname{cotg} x - \ln|\sin x| + C$, b) $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$,

c) $x\operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C$, d) $x\operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}dx$.

a) $-\operatorname{cotg} x \ln\cos x - x + C$, b) $-\operatorname{cotg} x \ln\cos x + x + C$,

c) $\operatorname{cotg} x \ln\cos x - x + C$, d) $\operatorname{cotg} x \ln\cos x + x + C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int (x^2 - x)\sin 2x dx$.

a) $(-\frac{x^2}{2} + x)\cos 2x - \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$,

b) $(x^2 - 2x)\cos 2x - (x-1)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$,

c) $(-\frac{x^2}{2} + x)\cos 2x + (x-1)\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$,

d) $(-\frac{x^2}{2} + x)\cos 2x + \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

8. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int x3^x dx$?

a) $x3^x \ln 3 - 3^x \ln^2 3 + C$, b) $\frac{3^x}{\ln 3}(x - \frac{1}{\ln 3}) + C$,

c) $x3^x - 3^x \ln 3 + C$, d) $\frac{x3^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln 3^2} + C$.

9. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int x\ln(1-x)dx$?

a) $\frac{x^2-1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$, b) $\frac{x^2-1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$,

c) $\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) + C$, d) $\frac{-x}{1-x} + \ln(1-x) + C$.

10. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int e^{2x} \sin x dx$?

a) $\frac{1}{5} e^{2x} (2\sin x + \cos x) + C$, b) $\frac{1}{5} e^{2x} (2\sin x - \cos x) + C$,

c) $\frac{1}{2} e^{2x} (\sin x - \cos x) + C$, d) $\frac{1}{5} e^{2x} (\cos x + 2\sin x) + C$.

Výsledky testu

1. b); 2. d); 3. a); 4. c); 5.b); 6. a); 7. d); 8. b); 9. a); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.3 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

Pro integraci součinu dvou funkcí $f(x) \cdot g(x)$ nelze nalézt obecnou formuli (na rozdíl od derivování součinu funkcí). Při integraci součinu funkce a derivace jiné funkce lze často užít metodu per partes (po částech). Nejčastěji je tato metoda využívána při výpočtu integrálů typu $\int P(x) \cdot f(x)\, dx$, kde $P(x)$ je polynomická funkce (může být i $P(x) = 1$) a $f(x)$ je trigonometrická, exponenciální, logaritmická nebo cyklometrická funkce. Metoda bude úspěšná, pokud zbývající integrál bude jednodušší než integrál původní.