STA 3 2017 

## TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

**DEF:** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je prostor s mírou a $P(\Omega) = 1$.

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazveme pravděpodobnostním prostorem.
- $P$ nazveme pravděpodobnostní mírou (na $(\Omega, \mathcal{A})$), krátce pravděpodobností.
- Prvky $\sigma$-algebry $\mathcal{A}$ nazveme náhodnými jevy.
- Zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazveme náhodnou veličinou (na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$).
- Zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, kde $n \in \mathbb{N}$, nazveme náhodným vektorem.
- Je-li $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ měřitelný prostor a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, nazveme pravděpodobnostní míru $P_X$ na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ indukovanou zobrazením $X$ z $P$ (tj. $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$ pro $A \in \mathcal{B}$) rozdělením pravděpodobnosti (distribucí) měřitelného zobrazení (náhodné veličiny, náhodného vektoru) $X$.

**POZN:** V aplikacích budeme označení náhodná veličina používat i pro náhodné vektory a měřitelná zobrazení, bude-li prostor $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ zřejmý z kontextu.

DEF: Řekneme, že $F : \mathbb{R} \to \langle 0,1 \rangle$ je distribuční funkce, jestliže platí

1) F je neklesající,
2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
3) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
4) F je zprava spojitá.

V: Nechť X je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak funkce $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_X(x) := P(X^{-1}(-\infty, x\rangle) = P_X((-\infty, x\rangle)$ je distribuční funkce.

Dk: 1) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow (-\infty, x\rangle \subset (-\infty, y\rangle \Rightarrow X^{-1}(-\infty, x\rangle \subset X^{-1}(-\infty, y\rangle$
$\Rightarrow P(X^{-1}(-\infty, x\rangle) \leq P(X^{-1}(-\infty, y\rangle)$.

2) Nechť $x_n \to -\infty$. Označme $\tilde{x}_n := \sup\{x_m \mid m \geq n\}$.
Zřejmě $\tilde{x}_n \searrow -\infty$ a tedy $\forall n \in \mathbb{N} : (-\infty, \tilde{x}_{n+1}\rangle \subset (-\infty, \tilde{x}_n\rangle$
a $\bigcap_n (-\infty, \tilde{x}_n\rangle = \emptyset$. Navíc $P(X^{-1}(-\infty, x_1\rangle) < +\infty$. Ze spojitosti míry plyne:
$F_X(x_n) = P(X^{-1}(-\infty, x_n\rangle) \leq P(X^{-1}(-\infty, \tilde{x}_n\rangle) \to P(\emptyset) = 0$.

3), 4) obdobně jako 2) ze spojitosti míry. $\square$

DEF: Distribuční funkce z předchozí věty se nazývá distribuční funkcí náhodné veličiny X.

<u>POZN:</u> Je-li $F$ distribuční funkce, pak existuje právě 1 míra $\mu$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taková, že pro každý interval $(a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ platí $\mu((a, b\rangle) = F(b) - F(a)$.
Je-li $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, pak integrál

$\int f(x)\, d\mu(x)$ zapisujeme $\int f(x)\, dF(x)$.

**DEF:** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \nu)$ je prostor s mírou a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Předpokládejme dále, že pro indukovanou míru $P_X$ platí $P_X \ll \nu$. Pak (každou) Radonovu-Nikodymovu derivaci $\frac{dP_X}{d\nu}$ nazýváme hustotou pravděpodobnosti měřitelného zobrazení $X$ vzhledem k míře $\nu$.

**POZN:** Hustota pravděpodobnosti je určena jednoznačně až na množinu $\nu$-míry 0. Pro libovolnou verzi hustoty n.v. $X$ budeme používat označení $f_X$.

**DEF:** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrovatelná náhodná veličina. Pak $\int X \, dP$ nazveme střední hodnotou náhodné veličiny $X$, značíme $E(X)$.

Je-li $Y = (Y_1, \dots, Y_m) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, kde $Y_1, \dots, Y_m$ jsou integrovatelné náhodné veličiny, pak střední hodnotou náhodného vektoru $Y$ rozumíme vektor $(E(Y_1), \dots, E(Y_m))$, značíme $E(Y)$.

**POZN:** $E(X) = \int X(\omega)\, dP(\omega) = \int x \, dP_X(x) = \int x \, dF_X(x) = \int x f_X(x)\, d\nu(x)$

Je-li $f_X$ hustota $P_X$ vzhledem k $\nu$

# PODMÍNĚNÁ STŘEDNÍ HODNOTA

ÚVOD: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor,

$\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_m\}$, $\mathcal{Y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ libovolné konečné podmnožiny $\mathbb{R}$.

Uvažujme náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

$Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takové, že $X(\Omega) = \mathcal{X}$, $Y(\Omega) = \mathcal{Y}$

Definujme běžným způsobem podmíněnou pravděpodobnost $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) := \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$ (předpokládejme $P(Y = y_j) \neq 0$)

Pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ je funkce $\tilde{P}_j(x_i) := P(X = x_i \mid Y = y_j)$

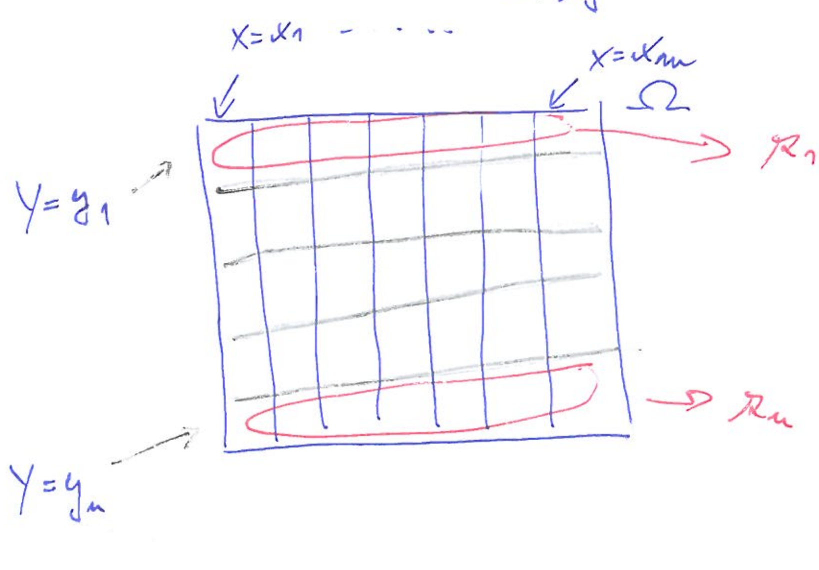
určena pravděpodobnost na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definujme dále běžným způsobem podmíněnou

střední hodnotu $E(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i \mid Y = y_j)$.

Definujme dále $Z : \Omega \to \mathbb{R}$

$$Z(\omega) := \underbrace{E(X \mid Y = y_j)}_{=: z_j} \quad \text{pro} \quad \omega \in Y^{-1}(\{y_j\})$$



Podmíněnou střední hodnotu $E(X|Y)$ tedy můžeme chápat jako náhodnou veličinu. Označme $\mathcal{F} := \sigma Y$.

Veličina $Z$ je konstantní na množinách $Y^{-1}(\{y_j\})$

a proto $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dále platí: $$\int_{Y^{-1}(\{y_j\})} Z \, dP = z_j \cdot P(Y = y_j) =$$

$Z$ je konstantní na $Y^{-1}(\{y_j\})$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i / Y = y_j) \cdot P(Y = y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i \cap Y = y_j) = \int_{Y^{-1}(\{y_j\})} X \, dP \qquad (*)$$

Označme $F_j := Y^{-1}(\{y_j\})$. Vztah $(*)$ pak lze zapsat ve tvaru

$$E(Z I_{F_j}) = E(X I_{F_j}).$$

Protože každé $F \in \mathcal{F}$ je sjednocením nějakých množin $F_j$,

dostaneme $E(Z I_F) = E(X I_F)$, a tedy

$$\int_F Z \, dP = \int_F X \, dP.$$

Shrnutí:
- $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- $\mathcal{F}$ je $\sigma$-algebra, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$

Podmíněnou střední hodnotu vzhledem k $\mathcal{F}$ lze chápat jako náhodnou veličinu $Z$, $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pro kterou platí

$$\forall F \in \mathcal{F}: \quad \int_F X \, dP = \int_F Z \, dP .$$

V: Nechť $X$ je integrovatelná náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je $\sigma$-algebra.
Pak existuje $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pro kterou platí

$$\forall B \in \mathcal{F} : \quad \int_B Z \, dP = \int_B X \, dP.$$

Dk: Na $(\Omega, \mathcal{F})$ definujme míry $\mu^+, \mu^-$:

$$\mu^+(B) := \int_B X^+ \, dP \quad , \quad \mu^-(B) := \int_B X^- \, dP.$$

Platí $\mu^+ \ll P$, $\mu^- \ll P$. Z Radonovy-Nikodymovy věty plyne existence funkcí $Z^+, Z^- : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takových, že $\mu^+(B) = \int_B Z^+ \, dP$, $\mu^-(B) = \int_B Z^- \, dP$.

$\int_B X \, dP = \mu^+(B) - \mu^-(B) \implies Z := Z^+ - Z^-$ splňuje tvrzení věty. $\square$

**DEF:** Nechť $X$ je integrovatelná náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je $\sigma$-algebra.

Každou funkci $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pro kterou platí

$$\forall B \in \mathcal{F} : \int_B Z \, dP = \int_B X \, dP$$

nazveme podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny $X$ vzhledem k $\sigma$-algebře $\mathcal{F}$, značíme $E(X \mid \mathcal{F})$.

Je-li $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ a $\mathcal{F} = \sigma Y$,

nazýváme $E(X \mid \mathcal{F})$ podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny $X$ vzhledem k $Y$, značíme $E(X \mid Y)$, tj. $E(X \mid Y) = E(X \mid \sigma Y)$.

Jestliže navíc $\mathcal{C}$ obsahuje všechny jednobodové podmnožiny $\mathcal{Y}$, pak definujeme $E(X \mid Y = t) := h(t)$, kde $h : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ je funkce, pro kterou platí $\forall \omega \in \Omega : Z(\omega) = h(Y(\omega))$.

**POZN:** Existence funkce $h$ z předchozí definice je

! zaručena větou z I/10.

POZN: Věta z I/10 nestačí! (viz Štěpán I.4.10)

(Na $\mathcal{Y} \setminus Y(\Omega)$ možno $h$ dodefinovat lib. konstantou.)

POZN: Jednotlivé funkce $E(X/\mathcal{F})$ budeme nazývat verzemi střední hodnoty $E(X/\mathcal{F})$.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ je měřitelný prostor takový, že $\mathcal{C}$ obsahuje všechny jednobodové podmnožiny $\mathcal{Y}$, $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$. Označme $P_Y$ rozdělení měřitelného zobrazení $Y$. Pak $g : (\mathcal{Y}, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je verze $E(X/Y=t)$, právě když $\forall B \in \mathcal{C} : \int_B g(t)\, dP_Y(t) = E(X I_B(Y))$.

DK: $E(X I_B(Y)) = \int X(\omega) I_B(Y(\omega))\, dP(\omega) = \int X(\omega) I_{Y^{-1}(B)}(\omega)\, dP(\omega) =$

$$= \int_{Y^{-1}(B)} X(\omega)\, dP(\omega) = \int_{Y^{-1}(B)} E(X/Y)(\omega)\, dP(\omega) =$$

$Y^{-1}(B) \in \sigma Y$ ... libovolná verze

$$= \int E(X/Y)(\omega)\, I_B(Y(\omega))\, dP(\omega) \quad = (*)$$

„$\Rightarrow$": Je-li $g(t)$ verze $E(X/Y=t)$, pak $E(X/Y) = g(Y)$.

a platí $(*) = \int g(Y(\omega)) I_B(Y(\omega))\, dP(\omega) =$

$$= \int ((g \cdot I_B) \circ Y)(\omega)\, dP(\omega) = \int (g \cdot I_B)(t)\, dP_Y(t)$$

$$= \int_B g(t)\, dP_Y(t).$$

„$\Leftarrow$": Nechť platí $\forall B \in \mathcal{C}$: $\int_B g(t)\, dP_Y(t) = E(X I_B(Y))$.

Pak $\int_B g(t)\, dP_Y(t) = \int_{Y^{-1}(B)} g(Y(\omega))\, dP(\omega) = E(X I_B(Y)) = \int_{Y^{-1}(B)} X(\omega)\, dP(\omega)$

viz „$\Rightarrow$"

$\underset{(\square)}{=}$

POZN:

$\left( \sigma Y = \{ Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{C} \},\ g \circ Y : (\Omega, \sigma Y) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \right)$

$(\square) \Rightarrow g \circ Y$ je verze $E(X \mid Y) \Rightarrow g(t)$ je verze $E(X \mid Y = t)$.

$\square$

<u>POZN:</u> Je-li $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor, budeme místo „skoro všude", „pro skoro všechna", ... říkat skoro jistě ($P$-skoro jistě) a zkráceně zapisovat s.j.

<u>V:</u> (Vlastnosti podmíněné stř. hodnoty)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrovatelné náhodné veličiny a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ $\sigma$-algebra. Pak platí

1) Jsou-li $Z, W$ verze $E(X/\mathcal{F})$, pak $Z = W$ s.j.

2) Je-li $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pak $E(X/\mathcal{F}) = X$ s.j.

   (tj: je-li $Z$ verze $E(X/\mathcal{F})$, pak $Z = X$ s.j.)

3) $E(E(X/\mathcal{F})) = E(X)$

4) $E(X / \{\emptyset, \Omega\}) = EX$ (s.j.)

5) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{R}$, pak

   $E(aX + bY + c/\mathcal{F}) = a\,E(X/\mathcal{F}) + b\,E(Y/\mathcal{F}) + c$ s.j.

6) Je-li $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ $\sigma$-algebra, pak

   $E(E(X/\mathcal{F})/\mathcal{G}) = E(X/\mathcal{G})$ s.j.

Dk: 1) Nechť $Z, W$ jsou verze $E(X|\mathcal{F})$. Pak

$$\forall B \in \mathcal{F}: \int_B Z\, dP = \int_B W\, dP \Rightarrow \int_B Z - W\, dP = 0 \qquad (*)$$

POZN: ($Z, W$ jsou integrovatelné)

Předpokládejme dále, že neplatí $Z = W$ s.j.

Pak $\exists A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$: $Z > W$ na $A$ nebo $Z < W$ na $A$

(POZN: množiny $\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) > W(\omega)\}$, $\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) < W(\omega)\}$ jsou $\mathcal{F}$-měřitelné)

Předpokládejme BÚNO, že $Z > W$ na $A$.

Označme pro $n = 1, 2, \dots$ $\quad A_n := \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) > W(\omega) + \frac{1}{n}\}$.

(POZN: $\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{F}$)

Pak $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Odtud plyne

$$P(A_n) \to P(A) > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: P(A_{n_0}) > 0.$$

$$\int_{A_{n_0}} Z - W\, dP \geq \int_{A_{n_0}} \frac{1}{n_0}\, dP = \frac{1}{n_0} P(A_{n_0}) > 0$$

SPOR s $(*)$.

2) $X$ je verzí $E(X|\mathcal{F})$ $\quad$ + 1)

3) Je-li $Z$ verze $E(X|\mathcal{F})$, pak

$$E(Z) = \int_\Omega Z\, dP = \int_\Omega X\, dP = E(X). \qquad (\Omega \in \mathcal{F})$$

4) Je-li $Z$ verze $E(X|\{\emptyset, \Omega\})$, pak platí

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): Z^{-1}(B) = \emptyset \vee Z^{-1}(B) = \Omega$. Odtud plyne,

že $Z$ je konstantní na $\Omega$. Navíc $\int_\Omega Z\, dP = \int_X X\, dP = EX$.

5) jsou-li $Z$ verze $E(aX+bY+c\,|\,\mathcal{F})$, $Z_1$ verze $E(X|\mathcal{F})$, $Z_2$ verze $E(Y|\mathcal{F})$ pak pro každou $B\in\mathcal{F}$

$$\int_B Z\,dP = \int_B aX+bY+c\,dP$$

$$\int_B aZ_1+bZ_2+c\,dP = a\int_B Z_1\,dP + b\int_B Z_2\,dP + \int_B c\,dP =$$

$$= a\int_B X\,dP + b\int_B Y\,dP + \int_B c\,dP$$

$$= \int_B aX+bY+c\,dP$$

tj. $\forall B\in\mathcal{F}:\ \int_B Z\,dP = \int_B aZ_1+bZ_2+c\,dP$

$$\Downarrow$$

$Z = aZ_1+bZ_2+c$ s.j.

6) Nechť $Z_1$ je verze $E(X/\mathcal{F})$, $Z_2$ je verze $E(Z_1/\mathcal{G})$, $U$ je verze $E(X/\mathcal{G})$.
Pak pro každou $B\in\mathcal{G}$ platí:

$$\left.\begin{aligned}&\int_B Z_2\,dP = \int_B Z_1\,dP = \int_B X\,dP,\\ &\int_B U\,dP = \int_B X\,dP\end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_2 = U \text{ s.v.}$$

$\square$

<u>DEF:</u> Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je $\sigma$-algebra.

Pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ definujeme podmíněnou pravděpodobnost $P(A/\mathcal{F}) := E(I_A/\mathcal{F})$.

Jestliže pro každé $\omega \in \Omega$ je $P(\cdot/\mathcal{F})$ pravděpodobnost na $(\Omega, \mathcal{A})$, nazveme funkce $P(\cdot/\mathcal{F})(\omega), \omega \in \Omega$, regulární podmíněnou pravděpodobností (vzhledem k $\mathcal{F}$).

Jestliže dále $Y: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$, definujeme $P(A/Y=y) = E(I_A/Y=y)$.

<u>POZN:</u> $Z$ je verze $P(A/\mathcal{F}) \iff Z: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a platí $\forall B \in \mathcal{F}: \; P(A \cap B) = \int_B Z \, dP$.

<u>V:</u> Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A \in \mathcal{A}$, $X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrovatelná náhodná veličina, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ $\sigma$-algebra. Označme $P_{\mathcal{F}}$ zúžení míry $P$ na $\mathcal{F}$. Nechť dále $B \in \mathcal{F}$ je atomická množina vzhledem k $P_{\mathcal{F}}$, tj. $P(B) > 0$ a $\forall D \in \mathcal{F}, D \subset B: \; P(D) = 0 \vee P(D) = P(B)$.

Pak $E(X/\mathcal{F}) = \dfrac{1}{P(B)} \int_B X \, dP$ a $P(A/\mathcal{F}) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

skoro jistě na $B$ vzhledem k míře $P_{\mathcal{F}}$.

Dk: Nechť $Z$ je verze $E(X/\mathcal{F})$. Protože $Z$ je $\mathcal{F}$-měřitelná a $B$ je atomická množina, platí $Z = c$ s.j. na $B$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ $\left( P(Z^{-1}(\{c\}) \cap B) = P(B) \right)$.

$$\int_B X \, dP = \int_B Z \, dP = \int_B c \, dP = c\, P(B) \Rightarrow c = \frac{1}{P(B)} \int_B X \, dP.$$

Rovnost $P(A/\mathcal{F}) = \frac{P(A \cap B)}{B}$ získáme volbou $X = I_A$. $\square$

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor, $X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je $\sigma$-algebra.

Pro $B \in \mathcal{B}$ definujme $P_{X/\mathcal{F}}(B) := P(A/\mathcal{F})$, kde $A = X^{-1}(B)$. Verzí podmíněného rozdělení měřitelného zobrazení $X$ vzhledem k $\mathcal{F}$ nazveme libovolnou množinu zobrazení $\Omega$ do $\langle 0,1 \rangle$ $\{P_{X/\mathcal{F}}(B)(\cdot) \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Jestliže pro každé $\omega \in \Omega$ je $P_{X/\mathcal{F}}(\cdot)(\omega)$ pravděpodobnost na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, nazveme systém funkcí $P_{X/\mathcal{F}}(\cdot)(\omega)$, $\omega \in \Omega$, regulárním podmíněným rozdělením $X$ vzhledem k $\mathcal{F}$.

Je-li $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ měřitelný prostor, $Y: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$, definujme pro $B \in \mathcal{B}$ a $y \in \mathcal{Y}$ $P_{X/Y}(B/Y=y) = P(A/Y=y)$, kde $A = X^{-1}(B)$. Jestliže pro každé $y \in \mathcal{Y}$ je $P_{X/Y}(\cdot/Y=y)$ pravděpodobnost na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, nazveme systém funkcí $P_{X/Y}(\cdot/Y=y)$, $y \in \mathcal{Y}$, podmíněným rozdělením $X$ při $Y$ ($=y$, ... za podmínky $Y=y$).

DEF: Nechť $(X, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor, $R \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Označme $\mathcal{B}(R) := \{R \cap B \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

(POZN: $\mathcal{B}(R)$ je $\sigma$-algebra podmnožin $R$.)

Existuje-li bijektivní (tj. prosté a na) zobrazení $\phi : X \to R$ takové, že $\phi : (X, \mathcal{B}) \to (R, \mathcal{B}(R))$ a $\phi^{-1} : (R, \mathcal{B}(R)) \to (X, \mathcal{B})$, řekneme, že $(X, \mathcal{B})$ je borelovský prostor.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je $\sigma$-algebra, $(X, \mathcal{B})$ je borelovský prostor a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$. Pak existuje regulární podmíněné rozdělení $X$ vzhledem k $\mathcal{F}$.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ je měřitelný prostor a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je integrovatelná náhodná veličina. Označme $P_Y$ míru indukovanou zobrazením $Y$ na $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ z $P$. Pak $g : (\mathcal{Y}, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je verze $E(X \mid Y = y)$, právě když

$$\forall B \in \mathcal{C} : \quad \int_B g(y)\, dP_Y(y) = E(X\, I_B(Y)) .$$

Dk: „$\Rightarrow$:" Nechť $g(y)$ je verze $E(X \mid Y = y)$. Pak pro $B \in \mathcal{B}$

$$E(X\, I_B(Y)) = \int X(\omega)\, I_B(Y(\omega))\, dP(\omega) =$$

$$= \int X(\omega)\, I_{Y^{-1}(B)}(\omega)\, dP(\omega) =$$

$$= \int_{Y^{-1}(B)} X(\omega)\, dP(\omega) =$$

$$= \int_{Y^{-1}(B)} E(X \mid Y)(\omega)\, dP(\omega) = \qquad (Y^{-1}(B) \in \sigma Y)$$

$$= \int_{Y^{-1}(B)} g(Y(\omega))\, dP(\omega) = \qquad (E(X \mid Y) = g(Y) \text{ s.j.})$$

$$= \int I_B(Y(\omega))\, g(Y(\omega))\, dP(\omega) =$$

$$= \int I_B(y)\, g(y)\, dP_Y(y) =$$

$$= \int_B g(y)\, dP_Y(y)$$

„$\Leftarrow$": Nechť $\forall B \in \mathcal{B}$ : $\int_B g(y)\, dP_Y(y) = E(X I_B(Y))$ .

Pak (viz „$\Rightarrow$") $\int\limits_{Y^{-1}(B)} E(X/Y)(\omega)\, dP(\omega) = \int\limits_{Y^{-1}(B)} g(Y(\omega))\, dP(\omega)$ .

$\left( E(X/Y),\ g(Y) \ :\ (\Omega, \sigma Y) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),\ \sigma Y = \{Y^{-1}(B) / B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \right)$

$\Rightarrow E(X/Y) = g(Y)$ P s.j. $\Rightarrow g(y)$ je verzí $E(X/Y=y)$ .

$\square$

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_1, \nu_X)$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_2, \nu_Y)$ jsou prostory se $\sigma$-konečnou mírou a $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_1)$ je navíc borelovský. Dále nechť $X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}_1)$, $Y: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{B}_2)$. Označme $P_{X,Y}$ pravděpodobnostní míru indukovanou zobrazením $(X, Y)$ na $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ z $P$.

Předpokládejme, že $P_{X,Y} \ll \nu_X \times \nu_Y$ a označme $f_{X,Y}(x,y) := \dfrac{dP_{X,Y}}{d\nu_X \times \nu_Y}$. Dále označme $P_Y$ pravděpodobnostní míru indukovanou zobrazením $Y$ na $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_2)$ z $P$. Pak

1) $P_Y \ll \nu_Y$ a $\dfrac{dP_Y}{d\nu_Y} = \int f_{X,Y}(x,y)\, d\nu_X(x)$.

2) Označme $f_Y(y) := \int f_{X,Y}(x,y)\, d\nu_X(x)$ a definujme $f_{X|Y}(\cdot/\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

$$f_{X|Y}(x/y) := \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{jestliže } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{jestliže } f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Pak pro $P_Y$-s.v. $y$ $P_{X|Y}(\cdot/Y=y) \ll \nu_X$ a $f_{X|Y}(x/Y=y)$ je hustotou podmíněného rozdělení $P_{X|Y}(\cdot/Y=y)$ vzhledem k vzhledem k $\nu_X$.

Dk: 1) Nechť $B \in \mathcal{B}_2$. Pak

$$P_Y(B) = P(Y^{-1}(B)) = P((X,Y)^{-1}(\mathcal{X}_1 \times B))$$

$$= P_{X,Y}(\mathcal{X}_1 \times B) = \int I_{\mathcal{X}_1 \times B}(x,y)\, dP_{X,Y}(x,y)$$

$$= \int \underbrace{I_{\mathcal{X}_1}(x)}_{=1} I_B(y)\, dP_{X,Y}(x,y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{dP_{X,Y}(x,y)}{d\nu_X \times \nu_Y(x,y)}$$

$$= \int I_B(y) f_{X,Y}(x,y)\, d\nu_X \times \nu_Y(x,y)$$

Fubiniho věta

$$= \int \left( \int I_B(y) f_{X,Y}(x,y)\, d\nu_X(x) \right) d\nu_Y(y)$$

$$= \int_B \left( \int f_{X,Y}(x,y)\, d\nu_X(x) \right) d\nu_Y(y)$$

$$\Rightarrow P_Y(B) \ll \nu_Y \quad \text{a} \quad \frac{dP_Y}{d\nu_Y} = \int f_{X,Y}(x,y)\, d\nu_X(x).$$

2) Nechť $A \in \mathcal{B}_1$, $B \in \mathcal{B}_2$.

$M := \{ y \in \mathcal{Y} / f_Y(y) > 0 \}$

$$\int_B \left( \int_A f_{X|Y}(x/y) \, d\nu_X(x) \right) dP_Y(y) =$$

$$\int_B \left( \int_A f_{X|Y}(x/y) \, d\nu_X(x) \right) f_Y(y) \, d\nu_Y(y) =$$

$$\int_{B \cap M} \left( \int_A \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \, d\nu_X(x) \right) f_Y(y) \, d\nu_Y(y) =$$

$$\int_{A \times (B \cap M)} f_{X,Y}(x,y) \, d\nu_X \times \nu_Y = P_{X,Y}((B \cap M) \times A) \qquad (\square)$$

Dále platí

$$P_{X,Y}(A \times (B \cap M^c)) = \int_{A \times (B \cap M^c)} f_{X,Y}(x,y) \, d\nu_X \times \nu_Y \leq$$

$$\int_{\mathcal{X} \times (B \cap M^c)} f_{X,Y}(x,y) \, d\nu_X \times \nu_Y =$$

$$\int_{B \cap M^c} \left( \int_{\mathcal{X}} f_{X,Y}(x,y) \, d\nu_X \right) d\nu_Y =$$

$$\int_{B \cap M^c} f_Y(y) \, d\nu_Y = \int_{B \cap M^c} 0 \, d\nu_Y = 0 \qquad (0)$$

$(\square) + (\circ) \Rightarrow$

$$\int_B \left( \int_A f_{X|Y}(x|y)\, d\nu_X(x) \right) dP_Y(y) = P(A \times B)$$

$$= E\left(I_A(X) \cdot I_B(Y)\right)$$

$\Downarrow$ věta z II/19

$$\int_A f_{X|Y}(x|y)\, d\nu_X(x) \underbrace{\quad}_{\text{je verzí}} E\left(I_A(X) / Y = y\right) = P_{X|Y}(A / Y = y)$$

$\Rightarrow$ pro $P_Y$ s.v. $y$ je $f_{X|Y}(x|y)$ hustotou $P_{X|Y}(\cdot / Y = y)$.

$\square$