DEF (σ-algebra): Nechť Ω je libovolná neprázdná množina, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra (podmnožin Ω), platí-li

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
3) $(\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

V: Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Pak $(\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

DK: Platí $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}}$.

$(\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}: \overline{A_n} \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$ $\square$

PŘ: Nechť $\Omega \neq \emptyset$. 2^{Ω}, $\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$, kde $A \subset \Omega$, jsou σ-algebry.

CV: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Najděte σ-algebru $\mathcal{A} \neq 2^{\Omega}$ s více než 4 prvky.

DEF (měřitelný prostor): Uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin Ω, nazveme měřitelný prostor. Prvky množiny $\mathcal{A}$ nazveme měřitelnými množinami.

V: Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$, $\forall t \in T$: $\mathcal{A}_t$ je σ-algebra v Ω. Pak $\bigcap_{t \in T} \mathcal{A}_t$ je σ-algebra.

DK: 1) $(\forall t \in T: \Omega \in \mathcal{A}_t) \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{A}_t$

2) $A \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{A}_t \Rightarrow \forall t \in T: A \in \mathcal{A}_t \Rightarrow \forall t \in T: \overline{A} \in \mathcal{A}_t \Rightarrow \overline{A} \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{A}_t$

3) obdobně jako 2 $\square$

POZN: Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $S \subset 2^{\Omega}$, $C := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ je σ-algebra v $\Omega \wedge S \subset \mathcal{A}\}$.

Platí:

1) $C \neq \emptyset$ (2^{Ω} je σ-algebra v Ω obsahující S),
2) C je σ-algebra,
3) $S \subset C$,
4) (D je σ-algebra v $\Omega \wedge S \subset D) \Rightarrow C \subset D$.

Tj. C je nejmenší σ-algebra (ve smyslu inkluze) obsahující S.

DEF: Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $S \subset 2^{\Omega}$. Nejmenší σ-algebru v Ω obsahující S nazveme σ-algebrou generovanou množinou S, značíme σS.

PŘ: Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $C \in 2^{\Omega}$, $S = \{C\} \Rightarrow \sigma S = \{\emptyset, C, \overline{C}, \Omega\}$.

CV: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $S = \{\{1,3,5\},\{2,3,5\}\}$. Kolik prvků má σS?

DEF: σ-algebra generovaná systémem všech otevřených množin v $\mathbb{R}^n$ se nazývá borelovská σ-algebra (v $\mathbb{R}^n$), značíme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

POZN: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generována rovněž těmito systémy množin:

- všechny uzavřené množiny v $\mathbb{R}^n$
- všechny otevřené intervaly v $\mathbb{R}^n$
- všechny uzavřené intervaly v $\mathbb{R}^n$
- množiny typu $(-\infty, a_1\rangle \times (-\infty, a_2\rangle \times \cdots \times (-\infty, a_n\rangle$, kde $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ obsahuje všechny jednobodové množiny v $\mathbb{R}^n$.

<u>DEF</u> (míra): Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.

Funkce $\mu : \mathcal{A} \to \langle 0; +\infty) \cup \{+\infty\}$, pro kterou platí:

1) $\mu(\emptyset) = 0$,

2) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

se nazývá mírou (na σ-algebře $\mathcal{A}$).

Uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nazveme prostor s mírou.

Platí-li navíc, že $\mu(\Omega) < +\infty$, řekneme, že μ je konečná míra.

Řekneme, že μ je σ-konečná, jestliže existují $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{A}$ takové, že $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \Omega$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(C_n) < +\infty$.

<u>POZN:</u> V definici míry lze axiom 1) nahradit požadavkem „μ není identicky rovno $+\infty$".

<u>CV:</u> Dokažte, že „obě definice" míry jsou ekvivalentní.

<u>PŘ:</u> Nechť Ω je libovolná množina, $\Omega \neq \emptyset$, $x \in \Omega$.

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \in A \\ 0, & \text{je-li } x \in \bar{A} \end{cases}$$

δ_x nazveme Diracova míra v x.

$\delta_x(\Omega) = 1 \Rightarrow \delta_x$ je konečná míra.

PŘ: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, $p_1, p_2, \ldots \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\mu(A) := \sum_{i \in A} p_i$$

μ je míra na $\mathcal{A}$.

$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}: \mu(\{n\}) = p_n < +\infty \Rightarrow \mu$ je σ-konečná.

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < +\infty$, pak μ je konečná.

PŘ: Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{počet prvků množiny } A, & \text{je-li } A \text{ konečná} \\ +\infty, & \text{je-li } A \text{ nekonečná} \end{cases}$$

μ se nazývá aritmetická (čítací) míra.

μ je konečná $\Leftrightarrow$ Ω je konečná množina.

μ je σ-konečná $\Leftrightarrow$ Ω je nejvýše spočetná množina.

V: (vlastnosti míry) Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak

1) $\forall A, B \in \mathcal{A}: \quad A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

2) $((\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{A}) \wedge A_1 \subset A_2 \subset \cdots) \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$,

3) $((\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{A}) \wedge A_1 \supset A_2 \supset \cdots \wedge \mu(A_1) < +\infty) \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

V: Na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, existuje právě 1 míra λ taková, že pro každý interval $I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ platí

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

STA 3 2017 I/5 n 3

DEF: Míra λ z předchozí věty se nazývá Lebesgueova-Borelova míra.

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je úplná míra, platí-li

$$\forall A, B \subset \Omega: (\mu(A) = 0 \wedge B \subset A) \Rightarrow B \in \mathcal{A}.$$

V (o zúplnění míry): Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

Nechť $\mathcal{A}_0 := \{E \subset \Omega \mid \exists A, B \in \mathcal{A}: A \subset E \subset B \wedge \mu(B \setminus A) = 0\}$.

Pro $E \in \mathcal{A}_0$ definujme $\mu_0(E) := \mu(A)$. Potom $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou. $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ nazýváme zúplněním $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

DEF: Buď $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n), \lambda_0)$ zúplněním $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$.

Míru λ_0 nazýváme Lebesgueovou mírou a $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ systémem lebesgueovsky měřitelných množin.

POZN: Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ nejvýše spočetná, pak $\lambda(M) = 0$.

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Uvažujme nějakou vlastnost V prvků Ω (tj. $V \subset \Omega$, „$x \in \Omega$ má (nemá) vlastnost V", jestliže $x \in V$ ($x \notin V$)).

Řekneme, že vlastnost V platí pro μ-skoro všechna $x \in \Omega$ (μ-skoro všude v Ω), jestliže $\exists A \in \mathcal{A}: \mu(A) = 0 \wedge V$ platí v $\overline{A}$.

POZN: Bude-li prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ zřejmý z kontextu, používáme termíny skoro všude, skoro všechna místo μ-skoro všude, μ-skoro všechna, případně jen s.v.

DEF: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ jsou měřitelné prostory.
Označme $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i := \sigma\{ \times_{i=1}^{n} A_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i \in \mathcal{A}_i \}$.
Měřitelný prostor $\left(\times_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \right)$ nazýváme součinovým měřitelným prostorem a značíme jej $\bigotimes_{i=1}^{n} (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ nazýváme součinovou σ-algebrou.

V: $\forall n \in \mathbb{N} : \bigotimes_{i=1}^{n} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

POZN: Uvedenou definici součinového prostoru lze rozšířit na libovolný systém měřitelných prostorů $\{(\Omega_t, \mathcal{A}_t)\}_{t \in T}$. Součinová σ-algebra je pak definována takto:

$$\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t := \sigma \Big\{ \times_{t \in T} A_t \;\Big|\; \forall t \in T : A_t \in \mathcal{A}_t \text{ a } A_t = \Omega_t \text{ až na konečně mnoho } t \Big\}.$$

ZNAČENÍ

$f: \Omega \to T$ ... zobrazení Ω do T

MĚŘITELNÉ FUNKCE

DEF (měřitelná funkce): Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$, $(T, \mathcal{C})$ jsou měřitelné prostory, $f: \Omega \to T$. Řekneme, že funkce f je měřitelná, jestliže $\forall A \in \mathcal{C}: f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, zapisujeme $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{C})$.

Funkci $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazýváme borelovsky měřitelnou.

POZN: Měřitelnost funkce $f: \Omega \to T$ závisí také na volbě σ-algeber $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$. Místo „měřitelná funkce" budeme někdy používat výstižnější označení „$(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-měřitelná funkce".

PŘ: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$, $(T, \mathcal{C})$ jsou měřitelné prostory, $f: \Omega \to T$.

je-li $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, pak $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{C})$.

je-li $\mathcal{C} = \{\emptyset, T\}$, pak $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{C})$.

PŘ: Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(POZN: až na větu $\mathcal{C} = \sigma\tilde{\mathcal{C}}$, $f^{-1}(\tilde{\mathcal{C}}) \subset \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$)

V: Nechť N, Ω, T jsou neprázdné množiny, $\{A_\alpha \mid \alpha \in N\}$ je systém podmnožin množiny T, $A \subset T$, $f: \Omega \to T$.

Pak platí:

1) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in N} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in N} f^{-1}(A_\alpha)$,

2) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in N} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in N} f^{-1}(A_\alpha)$,

3) $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

Důsledkem je následující věta.

V: Nechť $\Omega \neq \emptyset$, $(T, \mathcal{C})$ je měřitelný prostor, $f: \Omega \to T$. Pak $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{C}\}$ tvoří σ-algebru podmnožin Ω. Navíc platí, že $f^{-1}(\mathcal{C})$ je nejmenší σ-algebra podmnožin Ω, pro kterou je f měřitelná.

DEF: σ-algebra $f^{-1}(\mathcal{C})$ z předchozí věty se nazývá σ-algebra generovaná funkcí f.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $T \neq \emptyset$, $f: \Omega \to T$, $\emptyset \neq \tilde{\mathcal{C}} \subset 2^T$, $\mathcal{C} = \sigma\tilde{\mathcal{C}}$. Pak platí $f^{-1}(\tilde{\mathcal{C}}) \subset \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.
(Aj. $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{C}}: f^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{C}: f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$)

POZN: Předchozí věta říká, že k tomu, aby f byla $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-měřitelná stačí, aby měřitelné byly vzory množin z nějakého systému generujícího $\mathcal{C}$.

DK: Označme $\mathcal{D} := \{M \subset T \mid f^{-1}(M) \in \mathcal{A}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{D}$ je σ-algebra podmnožin T:

1) $f^{-1}(T) = \Omega$ (f je definována na Ω), $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow T \in \mathcal{D}$

2) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\underbrace{\overline{f^{-1}(A)}}_{= f^{-1}(\bar{A})} \in \mathcal{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{D}$

3) obdobně jako 2) s využitím $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in N} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in N} f^{-1}(A_\alpha)$

$\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{D}$ a $\mathcal{D}$ je σ-algebra $\Rightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ ($\mathcal{C}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\tilde{\mathcal{C}}$)

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{D}}}{f^{-1}(\mathcal{C}) \subset} f^{-1}(\mathcal{D}) \underset{\nwarrow \text{ viz def. } \mathcal{D}}{\subset} \mathcal{A}$$

$\square$

DŮSLEDEK: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f: \Omega \to \mathbb{R}$.
Pak $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \iff \forall x \in \mathbb{R}: f^{-1}((-\infty, x\rangle) \in \mathcal{A}$.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.

1) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}: ((T_i, C_i)$ je měřitelný prostor a $f_i: \Omega \to T_i)$. Definujme $f: \Omega \to \bigtimes_{i=1}^{n} T_i$, $f(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$.

Pak $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to \bigotimes_{i=1}^{n} (T_i, C_i) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}: f_i: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T_i, C_i)$

2) Nechť (T_1, C_1), (T_2, C_2) jsou měřitelné prostory a

$f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T_1, C_1)$, $g: (T_1, C_1) \to (T_2, C_2)$.

Pak $g(f): (\Omega, \mathcal{A}) \to (T_2, C_2)$.

3) Nechť $f, g: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$.
Pak $f+g$, $af+b$ jsou měřitelné. Je-li $n=1$, pak $f \cdot g$ je měřitelná a je-li navíc $g \neq 0$ na Ω, pak $\frac{f}{g}$ je měřitelná.

4) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}: f_n: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$.
Pak $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$.

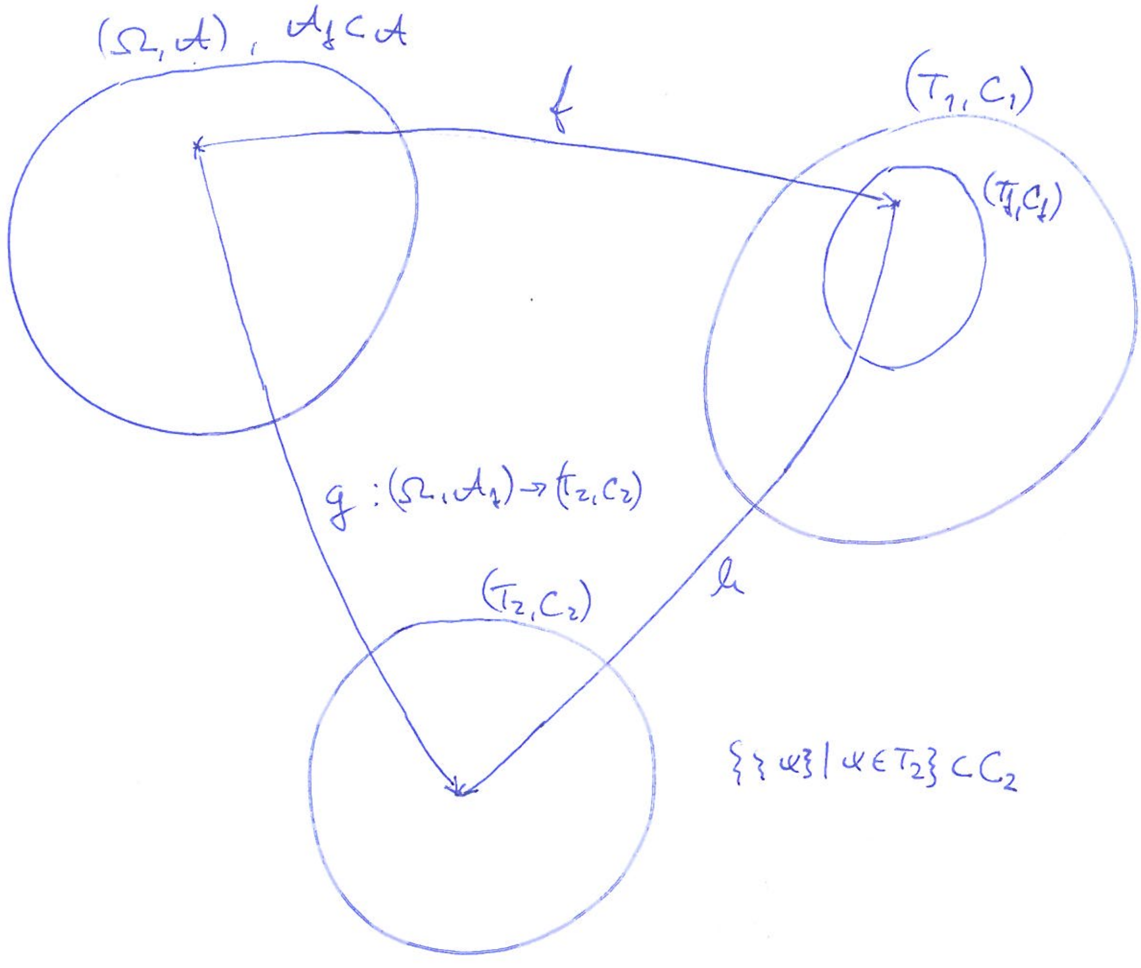
PŘ: Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Platí implikace
f, g jsou lebesgueovsky měřitelné $\Rightarrow f(g)$ je lebesgueovsky měřitelná?
(definice lebesgueovsky měřitelné funkce – viz variační metody)

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$, $(T_1, \mathcal{C}_1)$, $(T_2, \mathcal{C}_2)$ jsou měřitelné prostory a $\mathcal{C}_2$ obsahuje všechny jednobodové podmnožiny T_2.
Nechť dále $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (T_1, \mathcal{C}_1)$.
Označme $\mathcal{A}_f := \sigma f$, $T_f := f(\Omega)$, $\mathcal{C}_f := \{T_f \cap B \,/\, B \in \mathcal{C}_1\}$
(POZN: $\mathcal{C}_f$ je σ-algebra podmnožin T_f.)

Nechť $g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (T_2, \mathcal{C}_2)$.

Pak $g : (\Omega, \mathcal{A}_f) \to (T_2, \mathcal{C}_2) \Leftrightarrow \exists h : (T_f, \mathcal{C}_f) \to (T_2, \mathcal{C}_2)$,

$\forall \omega \in \Omega : \; g(\omega) = h(f(\omega))$.



PŘ: (k předchozí větě) Nechť $\Omega = T_1 = T_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
Pak $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: g je $(\mathcal{A}_f, \mathcal{C}_2)$-měřitelná, ale např. pro $g(\omega) = \omega$, $f(\omega) = \omega^2$ neexistuje h tak, aby $g = h(f)$. $\{\{x\} \,|\, x \in T_2\} \not\subset \mathcal{C}_2$!

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Řekneme, že funkce $f: \Omega \to \mathbb{R}$ je jednoduchá funkce, jestliže existují $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}$.

POZN: 1) Čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ani množiny $A_1, \dots, A_n$ v předchozí definici nejsou určeny jednoznačně.

2) Je-li $f: \Omega \to \mathbb{R}$ jednoduchá funkce, pak $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

V: Nechť $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ je nezáporná. Pak existuje posloupnost (f_n) nezáporných jednoduchých funkcí takových, že $f_n \nearrow f$.

ABSTRAKTNÍ LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Lebesgueův integrál pro měřitelné funkce vybudujeme ve třech krocích: pro nezáporné jednoduché funkce, pro nezáporné měřitelné a pro měřitelné funkce.

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f:(\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je nezáporná jednoduchá funkce, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+$ jsou její všechny navzájem různé hodnoty. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ označme $A_i := f^{-1}(\{\alpha_i\})$.

Integrál funkce f vzhledem k míře μ (značíme $\int f \, d\mu$, $\int f(s)\, d\mu(s)$) definujeme

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i)$$ s využitím konvence

$0 \cdot (+\infty) := 0$.

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f:(\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ je nezáporná funkce. Integrál funkce f vzhledem k míře μ je definován

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu \;\middle|\; g: \Omega \to \mathbb{R} \text{ je jednoduchá funkce} \wedge 0 \le g \le f \right\}$$

POZN: Konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$ budeme využívat i ve zbytku textu.

STA 3 2017

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$.
Definujme $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \max(-f, 0)$.
Integrál funkce f vzhledem k míře μ definujeme
$\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$, má-li pravá strana smysl. Řekneme, že funkce f je integrovatelná, jestliže $\int f \, d\mu$ existuje a je konečný.

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ a $A \in \mathcal{A}$. Integrál z funkce f přes množinu A vzhledem k míře μ definujeme

$$\int_A f \, d\mu = \int I_A f \, d\mu .$$

POZN: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f je definovaná μ-s.v. Pak $\exists \; E \in \mathcal{A} : E \subset \mathcal{D}f \wedge \mu(\Omega \setminus E) = 0$.
Označme $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in E, \\ 0 & \text{pro } x \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Definujeme $\int f \, d\mu := \int \tilde{f} \, d\mu$, má-li pravá strana smysl.
Existence (ani hodnota) $\int f \, d\mu$ na volbě E nezávisí.

POZN: $\int f \, d\mu$ budeme v případě potřeby značit $\int f(x) \, d\mu(x)$.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$.

1) $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$, je-li alespoň jeden z integrálů definován.

2) Je-li $\int f \, d\mu$ definován a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.

3) Jsou-li f a g integrovatelné a $\forall A \in \mathcal{A} : \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$, pak $f = g$ s.v.

4) Jsou-li f a g integrovatelné a $f \leq g$ s.v., pak $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

V: (Fatouovo lemma)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$, $g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ je integrovatelná a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \geq g$ s.v. Pak platí $\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$.

V: (Leviho, monotone convergence theorem)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$, $f_n \nearrow f$ skoro všude, $\int f_1 \, d\mu > -\infty$. Pak $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

V: (Lebesgueova, Dominated convergence theorem)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$, $f_n \to f$ s.v., $\exists\, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ integrovatelná taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. Pak f je integrovatelná a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$, $\int f \, d\mu$, $\int g \, d\mu$ existují a $\int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ je definován.

Pak $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nezáporná funkce. Pak $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$ pro $A \in \mathcal{A}$ je míra na $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dk: $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int f I_\emptyset \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$

Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ vzájemně disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme $g_n(x) := f(x) I_{A_n}(x)$, $f_n(x) := \sum_{i=1}^{n} g_n(x)$, $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

$\int f_1 \, d\mu > -\infty$, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost, $f_n \nearrow f I_A$

$(x \in \bar{A} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) = f(x) I_A(x).$ $x \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: x \in A_n \Rightarrow$
$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n: f_m(x) = f(x) I_A(x).)$

Z Leviho věty plyne: $\lim \int f_n(x) \, d\mu(x) = \int f(x) I_A(x) \, d\mu(x) =$
$= \nu(A)$.

V: $\int f+g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$, $\int g_n \, d\mu \geq 0$

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \int f_n(x) \, d\mu(x) = \int \sum_{i=1}^{n} g_n(x) \, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int g_i(x) \, d\mu(x)}_{= \nu(A_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)$$

$$\int f_n(x) \, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) \quad / \lim$$

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

□

Součinové prostory

L: Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ jsou prostory s mírou a μ_1, μ_2 jsou σ-konečné. Pak

- $\forall B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \forall x \in \Omega_1: B_x := \{y \in \Omega_2 : (x,y) \in B\} \in \mathcal{A}_2.$
  Definujme $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^*$, $f_1(x) := \mu_2(B_x)$.
  Pak $f_1 : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$.

- $\forall B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ \forall y \in \Omega_2: B^y := \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in B\} \in \mathcal{A}_1.$
  Definujme dále $f_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^*$, $f_2(y) := \mu_1(B^y)$.
  Pak $f_2 : (\Omega_2, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$.

Důsledek: Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2), (T, \mathcal{C})$ jsou měřitelné prostory,
$f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (T, \mathcal{C})$. Pak
$\forall x \in \Omega_1: f_x(y) := f(x,y) : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (T, \mathcal{C})$.

Dk: Nechť $B \in \mathcal{C}$. $f_x^{-1}(B) = \{y \in \Omega_2 \mid f(x,y) \in B\} = (f^{-1}(B))_x$
$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \Rightarrow (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{A}_2.$ $\square$

L: Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ jsou prostory s mírou a μ_1, μ_2 jsou σ-konečné. Pro každé $x \in \Omega_1, y \in \Omega_2, B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ definujme $B_x := \{y \in \Omega_2 \mid (x,y) \in B\}$, $B^y := \{x \in \Omega_1 \mid (x,y) \in B\}$,
$\nu_1(B) := \int \mu_2(B_x)\, d\mu_1(x)$, $\nu_2(B) := \int \mu_1(B^y)\, d\mu_2(y)$. Pak

- ν_1, ν_2 jsou míry na $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$,
- $\forall B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2: \nu_1(B) = \nu_2(B)$,
- $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2: \nu_1(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$.

DEF: Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou. Součinovou míru $\mu_1 \times \mu_2$ na měřitelném prostoru $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ definujeme $\mu_1 \times \mu_2 (B) := \int \mu_2(B_x) \, d\mu_1(x)$, kde $B_x := \{ y \in \Omega_2 \mid (x,y) \in B \}$.

POZN: Viz předchozí lemma. Ekvivalentně lze $\mu_1 \times \mu_2$ definovat $\mu_1 \times \mu_2 (B) := \int \mu_1(B^y) \, d\mu_2(y)$, kde $B^y := \{ x \in \Omega_1 \mid (x,y) \in B \}$.

POZN: Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou. Na $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ existuje právě 1 míra τ taková, že $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 : \tau(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$.

V: (Tonelli) Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou, $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ je nezáporná funkce. Pak

$$\int f(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 (x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

V: (Fubini) Nechť $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou. Jestliže $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ je integrovatelná, pak

$$\int f(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 (x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

ABSOLUTNÍ SPOJITOST, RADONOVA-NIKODYMOVA DERIVACE

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a μ_1, μ_2 jsou míry na $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť dále platí $\forall A \in \mathcal{A}: \mu_1(A) = 0 \Rightarrow \mu_2(A) = 0$.
Pak říkáme, že míra μ_2 je absolutně spojitá vzhledem k míře μ_1, značíme $\mu_2 \ll \mu_1$.
Míru μ_1 nazýváme dominující mírou k míře μ_2.

PŘ: měřitelný prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}o(\mathbb{R}))$. λ... Lebesgueova míra; pro $x \in \mathbb{R}$ definujme $\nu_x(A) := I_A(x)$ (Diracova míra v x na $\mathcal{B}o(\mathbb{R})$).
Neplatí $\nu_x \ll \lambda$, protože $\lambda(\{x\}) = 0$ a $\nu_x(\{x\}) = 1$.

PŘ: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f \geq 0$ s.v.. Definujme $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$ pro $A \in \mathcal{A}$.
ν je míra na $(\Omega, \mathcal{A})$, viz věta ... .
Platí $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, tedy $\nu \ll \mu$.

Dále lze dokázat, že $\mu \ll \nu \iff f > 0$ s.v.

„$\Rightarrow$": Nechť $\mu \ll \nu$ a neplatí $f > 0$ s.v.
Pak pro $M := f^{-1}(\{0\})$ platí $\mu(M) > 0$, neboť $\mu(f^{-1}((-\infty, 0))) = 0$ a $\mu(f^{-1}((-\infty, 0\rangle)) > 0$
(pozn: f je borelovsky měřitelná $\Rightarrow$ vzory intervalů jsou měřitelné).
Zároveň $\nu(M) = \int_M f \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$, což je spor s $\mu \ll \nu$.

„$\Leftarrow$": Nechť $f > 0$ s.v. Pak pro $M := f^{-1}((0, +\infty))$ platí $\mu(\overline{M}) = 0$. Označme $M_1 := f^{-1}(\langle 1, +\infty))$, $M_n := f^{-1}(\langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}))$ pro $n = 2, 3, \dots$.

Platí $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Nechť pro $A \in \mathcal{A}$ platí $\nu(A) = 0$. Pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí

$$0 = \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_{A \cap M} f \, d\mu = \int I_{A \cap M} f \, d\mu =$$

$$= \int I_{A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)} f \, d\mu \geq \int I_{A \cap M_i} f \, d\mu \geq \int \frac{1}{i} I_{A \cap M_i} \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{i} \mu(A \cap M_i) \geq 0.$$ Odtud plyne

$\forall i \in \mathbb{N}: \mu(A \cap M_i) = 0$.

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap M_n)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap M_n) = 0$$ a tedy $\mu \ll \nu$.

Poznámka: Je-li $f > 0$ s.v., pak $\nu \ll \mu$ a $\mu \ll \nu$ (míry μ a ν jsou navzájem absolutně spojité).

V (Radonova – Nikodymova):

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ_1, μ_2 jsou míry na $\mathcal{A}$, μ_1 je σ-konečná a $\mu_2 \ll \mu_1$.

Pak existuje $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ taková, že

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \mu_2(A) = \int_A f(x)\, d\mu_1(x).$$

Funkce f je určena jednoznačně až na množinu μ_1-míry 0 (tj. $\mu_2(A) = \int_A \tilde{f}(x)\, d\mu_1(x) \Rightarrow f = \tilde{f}$ μ_1-s.v.).

Je-li μ_2 σ-konečná, pak f je konečná μ_1-s.v.

Je-li navíc $g: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrovatelná, pak $\int g(x)\, d\mu_2(x) = \int g(x) f(x)\, d\mu_1(x)$.

DEF: Každou funkci f z předchozí věty nazýváme Radonovou – Nikodýmovou derivací μ_2 vzhledem k μ_1, značíme $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$.

STA 3 2017

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $(T, \mathcal{C})$ je měřitelný prostor a $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{C})$.

Definujme $\nu(A) := \mu(f^{-1}(A))$ pro $A \in \mathcal{C}$.

Pak ν je míra na $\mathcal{C}$.

Je-li navíc $g: (T, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrovatelná, pak $\int g(y)\, d\nu(y) = \int g(f(x))\, d\mu(x)$. $(\square)$

DK: 1) $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

2) Pro $A, B \subset T$ platí: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$

Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$ jsou vzájemně disjunktní.

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(f^{-1}(A_n)\right) =$$

věta ... $f^{-1}(A_n)$ disjunktní

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

1), 2) $\Rightarrow$ ν je míra na $\mathcal{C}$.

Důkaz rovnosti $(\square)$:

- Nechť $g(y) = I_A(y)$, kde $A \in \mathcal{C}$.

$$\int g(y)\, d\nu(y) = \int I_A(y)\, d\nu(y) = \nu(A) = \mu(f^{-1}(A)) =$$

$$= \int I_{f^{-1}(A)}(x)\, d\mu(x) = \int I_A(f(x))\, d\mu(x) = \int g(f(x))\, d\mu(x).$$

$(\square)$ platí pro charakteristické funkce měřitelných množin.

- Z vlastností Lebesgueova integrálu plyne, že (□) platí i pro nezáporné jednoduché funkce.

- Nechť g je nezáporná, integrovatelná. Pak existuje posloupnost (h_n) nezáporných jednoduchých funkcí takových, že $(h_n) \nearrow g$. (viz věta...)

Z Leviho věty plyne:

(□) platí pro jednoduché nezáporné

$$\int g(y)\, d\nu(y) = \int \lim h_n(y)\, d\nu(y) = \lim \int h_n(y)\, d\nu(y) =$$

$$= \lim \int h_n(f(x))\, d\mu(x) = \int \lim h_n(f(x))\, d\mu(x) =$$

Leviho věta

$$= \int g(f(x))\, d\mu(x) \Rightarrow$$ (□) platí pro nezáporné integrovatelné

- Je-li g integrovatelná, pak

$$\int g(y)\, d\nu(y) = \int g^+(y)\, d\nu(y) - \int g^-(y)\, d\nu(y) =$$

$$= \int g^+(f(x))\, d\mu(x) - \int g^-(f(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \int \big(g(f(x))\big)^+ d\mu(x) - \int \big(g(f(x))\big)^- d\mu(x) =$$

$$= \int g(f(x))\, d\mu(x).$$

□

DEF: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $(T, \mathcal{C})$ je měřitelný prostor a $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{C})$. Definujme
$\nu(A) := \mu(f^{-1}(A))$ pro $A \in \mathcal{C}$. (viz předchozí věta)
Míru ν na $(T, \mathcal{C})$ nazýváme mírou indukovanou zobrazením f z míry μ.

V: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $(T, \mathcal{C}, \nu)$ je prostor s mírou a $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{C})$. Označme $\mathcal{A}_f := \sigma f$, $U := f(\Omega)$. Předpokládejme dále, že $U \in \mathcal{C}$.

Definujme $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$, $\mu(A) := \nu(U \cap B)$, kde B je libovolná množina taková, že $A = f^{-1}(B)$.

Pak μ je míra na $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dk: Dokažme nejprve korektnost definice funkce μ.

Ukažeme, že platí $\forall A \in \mathcal{A}_f \ \exists!\, B_A \subset \mathcal{U} : A = f^{-1}(B_A)$

a navíc platí $B_A \in \mathcal{C}$.

Připomeňme, že $\mathcal{A}_f = \sigma f = \{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{C} \}$. Odtud plyne

$\forall A \in \mathcal{A}_f \ \exists\, \tilde{B}_A \in \mathcal{C} : A = f^{-1}(\tilde{B}_A)$. Pak platí

$A = f^{-1}(\tilde{B}_A) = f^{-1}(\tilde{B}_A \cap \mathcal{U})$. Označme $B_A := \tilde{B}_A \cap \mathcal{U}$.

Zřejmě platí $A = f^{-1}(B_A)$, $B_A \subset \mathcal{U}$, $B_A \in \mathcal{C}$.

Dokažme dále jednoznačnost B_A.

Předpokládejme, že pro $B_A^1, B_A^2 \subset \mathcal{U}$ platí

$A = f^{-1}(B_A^1) = f^{-1}(B_A^2)$. Označme $B_A^1 \triangle B_A^2 = (B_A^1 \setminus B_A^2) \cup (B_A^2 \setminus B_A^1)$

(symetrický rozdíl množin B_A^1, B_A^2).

Pak
$$A = f^{-1}(B_A^1) \cup f^{-1}(B_A^2) = f^{-1}(B_A^1 \cup B_A^2) =$$

$$= f^{-1}\big((B_A^1 \cap B_A^2) \cup (B_A^1 \triangle B_A^2)\big) =$$

disjunktní

$$= \underbrace{f^{-1}(B_A^1 \cap B_A^2)}_{f^{-1}(B_A^1) \cap f^{-1}(B_A^2) = A \cap A = A} \cup f^{-1}(B_A^1 \triangle B_A^2)$$

Tedy $A = A \cup f^{-1}(B_A^1 \triangle B_A^2) \Rightarrow f^{-1}(B_A^1 \triangle B_A^2) = \emptyset$.

$\Rightarrow (B_A^1 \triangle B_A^2) \cap \mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow B_A^1 \triangle B_A^2 = \emptyset \Rightarrow B_A^1 = B_A^2$

Tímto je dokázána jednoznačnost B_A.

($B \in T$: $A = f^{-1}(B)$ existuje a pro každé takové B platí

$U \cap B = B_A$)

Ukažme dále, že μ je míra na $(\Omega, \mathcal{A})$.

Zřejmě platí $\forall A \in \mathcal{A}_f : \mu(A) \geq 0$.

Dále $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$.

Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_f$ jsou navzájem disjunktní

a $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n = f^{-1}(B_{A_n})$.

Pro $i \neq j$ platí: $\emptyset = A_i \cap A_j = f^{-1}(B_{A_i}) \cap f^{-1}(B_{A_j}) = f^{-1}(B_{A_i} \cap B_{A_j})$

$B_{A_i} \cap B_{A_j} \subset U \Rightarrow \emptyset \quad \Rightarrow B_{A_1}, B_{A_2}, \ldots$ jsou navzájem disjunktní.

Dále platí $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_{A_n}) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{A_n}}_{\subset U}\Big) \Rightarrow B_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{A_n}$.

Pak $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \nu\left(B_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{A_n}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_{A_n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

$\Rightarrow \mu$ je σ-aditivní na $\mathcal{A}_f$.

$\square$