PŘÍKLAD č. 1

Náhodné jevy: N – prase je napadeno parazitem
T – výsledek testu je pozitivní

Ze zadání: $P(N) = 0{,}1 \Rightarrow P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 0{,}9$

$P(\overline{T}/N) = 0{,}04 \Rightarrow P(T/N) = 1 - P(\overline{T}/N) = 0{,}96$

$P(T/\overline{N}) = 0{,}03 \Rightarrow P(\overline{T}/\overline{N}) = 1 - P(T/\overline{N}) = 0{,}97$

1) $P(T) = P(T/N)\cdot P(N) + P(T/\overline{N})\cdot P(\overline{N}) =$ ← věta o úplné pravděpodobnosti, $\{N, \overline{N}\}$ je úplný systém disjunktních jevů

$= 0{,}96\cdot 0{,}1 + 0{,}03\cdot 0{,}9 = \underline{\underline{0{,}123}}$

Pravděpodobnost, že výsledek testu bude pozitivní, je 0,123.

2) Výsledek testu se shoduje se skutečností

$\Updownarrow$

Prase je nakaženo a výsledek pozitivní, nebo
– " – není – " – a – " – negativní
$\Leftrightarrow (N\cap T)\cup(\overline{N}\cap\overline{T})$

$P((N\cap T)\cup(\overline{N}\cap\overline{T})) = P(N\cap T) + P(\overline{N}\cap\overline{T}) =$ ← $(N\cap T)$ a $(\overline{N}\cap\overline{T})$ jsou disjunktní jevy

$= P(T/N)\cdot P(N) + P(\overline{T}/\overline{N})\cdot P(\overline{N}) =$

$= 0{,}96\cdot 0{,}1 + 0{,}97\cdot 0{,}9 = \underline{\underline{0{,}969}}$

Pravděpodobnost, že se výsledek shoduje se skutečností, je 0,969.

3) $P(N|T) = \dfrac{P(T/N)\cdot P(N)}{P(T/N)\cdot P(N) + P(T/\overline{N})\cdot P(\overline{N})} =$ ← Bayesova věta

$= \dfrac{0{,}96\cdot 0{,}1}{0{,}96\cdot 0{,}1 + 0{,}03\cdot 0{,}9} \doteq \underline{\underline{0{,}78}}.$

Byl-li výsledek testu pozitivní, je prase napadeno s pravděp. 0,78.

PŘÍKLAD Č. 2

Náhodná veličina X ... počet požadavků během 60 minut

— " — Y ... — " — 3 minut

Příchozí požadavky jsou události v Poissonově procesu s intenzitou λ.

$\Downarrow$

X, Y mají Poissonovo rozdělení s parametry $\lambda \cdot 60$ a $\lambda \cdot 3$.

Pro $X \sim Po(\lambda \cdot 60)$ platí $EX = \lambda \cdot 60$.
Ze zadání: $EX = 40$

$$\left.\begin{array}{l} EX = \lambda \cdot 60 \\ EX = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \cdot 60 = 40 \qquad \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$$

$$Y \sim Po\Big(\underbrace{\tfrac{2}{3} \cdot 3}_{2}\Big)$$

$$P(Y \le 1) = P(Y=0 \cup Y=1) = P(Y=0) + P(Y=1) =$$

$$= \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 3\, e^{-2} = \underline{\underline{0{,}406}}$$

dosazení do pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení, případně lze použít statistický software

PŘÍKLAD Č. 3

$Y \sim Bi(2,\ 0{,}5) \Rightarrow$

$$p_Y(0) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 = \frac{1}{4}$$

$$p_Y(1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 = \frac{1}{2}$$

$$p_Y(2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 = \frac{1}{4}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{jestliže } x = y-1 \text{ nebo } x = y+1 \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y):

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y)$$

1)

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
-1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\leftarrow$ $p_X(x) = \sum_{y=0}^{2} p_{X,Y}(x,y)$

$Y = 1 \cap X > -1$

2) $$P(Y=1 / X > -1) = \frac{P(Y=1 \cap X > -1)}{\underbrace{P(X > -1)}_{1 - P(X \le -1)}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

3) $EX = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ $\leftarrow$ $X \sim Bi(n, p) \Rightarrow EX = n \cdot p$

$EY = -1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1$

$E(X,Y) = (EX, EY) = (1,1)$

PŘÍKLAD č. 4

Náhodná veličina T ... doba do poruchy výtahu

Ze zadání: $T \sim Exp(\lambda)$

$ET = 2000$

Pro $T \sim Exp(\lambda)$ platí: $ET = \frac{1}{\lambda}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{\lambda} = 2000$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2000}}$$

Hledáme největší $A \in \mathbb{R}^+$, pro které platí

$$\underbrace{P(T \leq A)}_{F_T(A)} \leq 0{,}1 \qquad (*)$$

$F_T(A)$ .... distribuční funkce veličiny T

Pro největší A, které splňuje podmínku $(*)$, bude platit $F_T(A) = 0{,}1$. ← $F_T(A)$ je rostoucí a neobsahuje skoky (je spojitá)

Pro $T \sim Exp(\lambda)$ platí $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$$1 - e^{-\frac{1}{2000}t} = 0{,}1$$

$$t = -2000 \cdot \ln 0{,}9$$

$$\underline{\underline{t \doteq 210{,}7}}$$

Pomocí statistického softwaru lze t určit jako 0,1 kvantil exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 2000^{-1}$.

Hledaná doba, během které pravděpodobnost poruchy nepřekročí 0,1 je 210,7 hodin.

PŘÍKLAD Č. 5

Náhodná veličina X ... počet černých bodů

$X \sim Bi(60000, 0{,}18)$

$EX = 0{,}18 \cdot 60000 = 10800$

$DX = 0{,}18 \cdot (1-0{,}18) \cdot 60000 = 8856$

Aproximace binomického rozdělení pomocí centrální limitní věty: $X \dot{\sim} N(10800, 8856)$

distribuční funkce norm. rozdělení $N(10800, 8856)$

$$P(10740 \leq X \leq 10860) \doteq F(10860{,}5) - F(10739{,}5) =$$

$$= 0{,}7399 - 0{,}2601 = \underline{\underline{0{,}4798}}$$

Pravděpodobnost, že se počet černých bodů bude od střední hodnoty lišit nanejvýš o 0,001 všech bodů je přibližně 0,4798.