

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební



inovace
studijního programu

STAVEBNÍ INŽENÝRSTVÍ

STATIKA STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ II.

PODKLADY DO CVIČENÍ

Lenka Koubová
Petr Konečný



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

INOVACE STUDIJNÍHO PROGRAMU STAVEBNÍ INŽENÝRSTVÍ CZ.1.07/2.2.00/28.0260.
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

Předmluva

Tato učební pomůcka byla vytvořena v rámci projektu *Inovace studijního programu Stavební inženýrství*, který zahrnuje tvorbu výukových podkladů. Výukové materiály, jejichž přípravu garantuje Ing. Lenka Koubová, Ph.D., by měly sloužit jako doplňující prvek výuky předmětu Statika stavebních konstrukcí II. Podklady jsou určeny zejména pro prezenční formu studia na Fakultě stavební Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava, a to na oborech Dopravní inženýrství (3607R042), Dopravní stavby (3647R020), Geotechnika (3647R017), Konstrukce staveb (3607R037), Prostředí staveb (3607R040) a Stavební hmoty a diagnostika staveb (3647R019) studijního programu Stavební inženýrství (B3607).

Tato publikace je sestavena z podkladů do cvičení Statiky stavebních konstrukcí II doprovázených doplňujícím a vysvětlujícím textem.

V Ostravě 10. 4. 2015

Autoři

Obsah

Předmluva	i
Obsah	iii
Úvod	1
1 Obecná deformační metoda	2
1.1 Podstata obecné deformační metody	2
1.2 Tvorba výpočtového modelu	7
1.2.1 Výpočet stupně přetvárné neurčitosti n_p	8
1.2.2 Příklady výpočtových modelů	13
1.3 Analýza prutu	19
1.3.1 Lokální primární vektor koncových sil	19
1.3.2 Lokální matice tuhosti prutu	26
1.4 Analýza prutové soustavy	28
1.4.1 Matice tuhosti soustavy	28
1.4.2 Primární vektor soustavy	29
1.4.3 Řešení soustavy rovnic	29
1.4.4 Dokončení řešení	29
1.5 Řešení spojitých nosníků pomocí ODM	31
1.5.1 Příklad 1	31
1.5.2 Příklad 2	35
1.5.3 Příklad 3	39
1.5.4 Příklad 4	44
1.6 Řešení rovinných rámců pomocí ODM	48
1.6.1 Příklad 1	49
1.6.2 Příklad 2	55
1.7 Řešení rovinných příhradových konstrukcí pomocí ODM	61
1.7.1 Příklad	63

1.8	Testové otázky a odpovědi ODM	67
2	Zjednodušená deformační metoda	69
2.1	Postup řešení pomocí ZDM	70
2.1.1	Stupeň přetvárné neurčitosti $n_{p,ZDM}$	70
2.1.2	Poměrná tuhost prutu k_{ab}	70
2.1.3	Primární momenty a posouvající síly	70
2.1.4	Sekundární momenty a posouvající síly	71
2.1.5	Styčnicková rovnice	72
2.1.6	Patrová rovnice	72
2.1.7	Řešení soustavy rovnic	73
2.1.8	Koncové momenty	73
2.1.9	Posouvající síly	74
2.1.10	Normálové síly	75
2.2	Příklady určení stupně přetvárné neurčitosti pomocí ZDM	76
2.2.1	Příklad 1	76
2.2.2	Příklad 2	76
2.2.3	Příklad 3	77
2.2.4	Příklad 4	78
2.2.5	Příklad 5	79
2.3	Řešení spojitých nosníků pomocí ZDM	80
2.3.1	Příklad 1	80
2.3.2	Příklad 2	83
2.3.3	Příklad 3	86
2.4	Řešení rámců s neposuvnými styčníky pomocí ZDM	90
2.4.1	Příklad	90
2.5	Řešení rámců s posuvnými styčníky pomocí ZDM	95
2.5.1	Příklad 1	95
2.5.2	Příklad 2	102
2.5.3	Příklad 3	103
2.5.4	Příklad 4	104
2.5.5	Příklad 5	106
2.6	Testové otázky a odpovědi ZDM	108

Seznam obrázků

1.1	Lokální a globální souřadnicová soustava	6
1.2	Schémata styků prutů	7
1.3	Schémata uložení prutů	7
1.4	Schémata vnějších vazeb	7
1.5	Schéma spojitého nosníku	8
1.6	Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami	8
1.7	Rovinný rám	9
1.8	Schéma rovinného rámu s fiktivními vazbami	9
1.9	Schéma rámu	10
1.10	Schéma rámu s fiktivními vazbami	10
1.11	Schéma patrového rámu	11
1.12	Schéma patrového rámu s fiktivními vazbami	11
1.13	Schéma příhradového nosníku	12
1.14	Schéma příhradového nosníku s fiktivními vazbami	12
1.15	Schéma spojitého nosníku	13
1.16	Výpočtový model spojitého nosníku včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 4$	13
1.17	Schéma spojitého nosníku včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 5$	14
1.18	Výpočtový model spojitého nosníku včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 9$	14
1.19	Výpočtový model spojitého nosníku s náhradou převislého konce statickým mo- mentem v podpoře d s ponecháním neznámé φ_d , $n_p = 6$	15
1.20	Výpočtový model spojitého nosníku s náhradou převislého konce statickým mo- mentem v podpoře d s minimálním $n_p = 5$	15
1.21	Schéma rámu	16
1.22	Výpočtový model rámu včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 7$	17
1.23	Schéma rámu	18
1.24	Výpočetní model rámu včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 6$	18
1.25	Oboustranně monoliticky připojený, složky lokálních primárních koncových sil .	19

1.26	Pravostranně kloubově připojený, složky lokálních primárních koncových sil . . .	20
1.27	Prut levostranně kloubově připojený, složky lokálních primárních koncových sil .	20
1.28	Prut oboustranně kloubově připojený, složky lokálních primárních koncových sil	20
1.29	Zadání rovinného rámu	21
1.30	Prut 1 - schéma upnutí a zatížení	21
1.31	Prut 1 - základní staticky určitá soustava	21
1.32	Prut 1 - 0. a 1. zatěžovací stav	22
1.33	Prut 2 - schéma upnutí a zatížení	23
1.34	Prut 2 - základní staticky určitá soustava	23
1.35	Prut 2 - 0. a 1. zatěžovací stav	23
1.36	Prut 3 - schéma upnutí a zatížení	24
1.37	Lokální primární vektory koncových sil pro oboustranně monoliticky připojený prut	25
1.38	Lokální primární vektory koncových sil pro jednostranně kloubově připojený prut	25
1.39	Lokální primární vektory koncových sil pro oboustranně kloubově připojený prut	25
1.40	Schémata prutu zatíženého koncovými deformacemi	26
1.41	Příklad lokalizace matice \mathbf{K} pro spojitý nosník	28
1.42	Příklad lokalizace primárního vektoru pro spojitý nosník	29
1.43	Určení vnitřních sil pro prut ab	30
1.44	Příklad uvolněných složek interakcí a podmínek rovnováhy v bodě b	30
1.45	Spojité nosník	31
1.46	Výpočtový model pro příklad 1	31
1.47	Vykreslení vnitřních sil pro příklad 1	34
1.48	Spojité nosník	35
1.49	Výpočtový model pro příklad 2	35
1.50	Vykreslení vnitřních sil pro příklad 2	38
1.51	Spojité nosník	39
1.52	1. výpočtový model pro příklad 3	39
1.53	Vykreslení vnitřních sil pro příklad 3	42
1.54	2. výpočtový model pro příklad 3	43
1.55	3. výpočtový model pro příklad 3	43
1.56	Spojité nosník	44
1.57	Výpočtový model pro příklad 4	44
1.58	Vykreslení vnitřních sil pro příklad 4	47
1.59	Rámová konstrukce	49
1.60	Výpočtový model pro příklad 1	49

1.61	Vykreslení vnitřních sil pro příklad 1	54
1.62	Rovinný rám	55
1.63	Výpočtový model pro příklad 2	55
1.64	Vykreslení vnitřních sil pro příklad 2	60
1.65	Příhradová konstrukce	63
1.66	Výpočtový model příhradové konstrukce	63
2.1	Akce styčnicků na konce prutu (a), akce konců prutu na styčnický (b)	69
2.2	Primární momenty a posouvající síly pro oboustranně monoliticky připojený prut	71
2.3	Primární momenty a posouvající síly pro jednostranně kloubově připojený prut .	71
2.4	Schéma spojitého nosníku s jednou neznámou φ_b	72
2.5	Momentová interakce ve styčnicku b	72
2.6	Schéma vodorovného posunu rámu Δ	73
2.7	Schéma silové interakce na uvolněné rámové přičli	73
2.8	Superpozice posouvajících sil od vnějšího zatížení (V_{ab0}, V_{ba0}) a od koncových momentů ($\Delta V_{ab}, \Delta V_{ba}$)	74
2.9	Silová interakce ve styčnicku e pro rám na obr. 2.30	75
2.10	Schéma spojitého nosníku	76
2.11	Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami	76
2.12	Schéma spojitého nosníku	76
2.13	Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami	77
2.14	Schéma rovinného rámu	77
2.15	Schéma rovinného rámu s fiktivními vazbami	77
2.16	Schéma rámu	78
2.17	Schéma rámu s fiktivními vazbami	78
2.18	Schéma patrového rámu	79
2.19	Schéma patrového rámu s fiktivními vazbami	79
2.20	Spojité nosník	80
2.21	Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami dle ZDM	80
2.22	Schéma výpočtu reakcí u spojitého nosníku (zadání viz. oddíl 2.3.1)	82
2.23	Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.3.1)	82
2.24	Spojité nosník	83
2.25	Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami dle ZDM	83
2.26	Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.3.2)	85
2.27	Spojité nosník	86
2.28	Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami dle ZDM	86

2.29	Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.3.3)	89
2.30	Pravoúhlý rám s neposuvnými styčníky	90
2.31	Fiktivní vazby dle ZDM u rámu s neposuvnými styčníky	90
2.32	Vykreslení normálových a posouvajících sil (zadání viz. oddíl 2.5.1)	93
2.33	Vykreslení ohybových momentů (zadání viz. oddíl 2.5.1)	94
2.34	Pravoúhlý rám s posuvnými styčníky	95
2.35	Fiktivní vazby dle ZDM u rámu s posuvnými styčníky	95
2.36	Patrový posun dle ZDM u rámu s posuvnými styčníky	97
2.37	Patrový posun dle ZDM u rámu s posuvnými styčníky	98
2.38	Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.5.1)	101
2.39	Rám s posuvnými styčníky	102
2.40	Rám s posuvnými styčníky	103
2.41	Rám s posuvnými styčníky	104
2.42	Rám s posuvnými styčníky	106

Seznam tabulek

1.1	Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2	31
1.2	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1	32
1.3	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2	32
1.4	Vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	32
1.5	Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	32
1.6	Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}	33
1.7	Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}	33
1.8	Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2	33
1.9	Globální sekundární koncové síly prutů pro prut 1 a 2	33
1.10	Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2	33
1.11	Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb	34
1.12	Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2	35
1.13	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1	36
1.14	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2	36
1.15	Vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	36
1.16	Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	36
1.17	Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}	37
1.18	Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}	37
1.19	Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2	37
1.20	Globální sekundární koncové síly prutů pro prut 1 a 2	37
1.21	Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2	37
1.22	Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb	38
1.23	Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2	40
1.24	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1	40
1.25	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2	40
1.26	Vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	40
1.27	Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	41
1.28	Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}	41

1.29	Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}	41
1.30	Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2	41
1.31	Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2	41
1.32	Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb	42
1.33	Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2	44
1.34	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1	45
1.35	Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2	45
1.36	Vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	45
1.37	Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	45
1.38	Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}	46
1.39	Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}	46
1.40	Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2	46
1.41	Globální sekundární koncové síly prutů pro prut 1 a 2	46
1.42	Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2	46
1.43	Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb	47
1.44	Globální primární vektory pro prut 1, prut 2 a prut 3	50
1.45	Globální matice tuhosti pro prut 1	50
1.46	Globální matice tuhosti pro prut 2	50
1.47	Globální matice tuhosti pro prut 3	50
1.48	Vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	51
1.49	Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	51
1.50	Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}	51
1.51	Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}	52
1.52	Globální vektory deformací \mathbf{r}_{ab} pro prut 1, prut 2 a prut 3	52
1.53	Globální sekundární koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3	52
1.54	Globální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3	52
1.55	Lokální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3	53
1.56	Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb	53
1.57	Globální primární vektory pro prut 1, prut 2 a prut 3	56
1.58	Globální matice tuhosti pro prut 1	56
1.59	Globální matice tuhosti pro prut 2	56
1.60	Globální matice tuhosti pro prut 3	56
1.61	Vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	57
1.62	Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	57
1.63	Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}	57
1.64	Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}	58

1.65	Globální vektory deformací \mathbf{r}_{ab} pro prut 1, prut 2 a prut 3	58
1.66	Globální sekundární koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3	58
1.67	Globální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3	58
1.68	Lokální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3	59
1.69	Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb	59
1.70	Globální matice tuhosti pro vodorovné pruty 1, 6, 7	64
1.71	Globální matice tuhosti pro šikmé pruty 2, 4	64
1.72	Globální matice tuhosti pro šikmé pruty 3, 5	64
1.73	Globální vektor styčnickového zatížení \mathbf{S}	64
1.74	Celková matice tuhosti soustavy \mathbf{K}	65
1.75	Globální vektor deformací \mathbf{r}	65
1.76	Globální vektory deformací jednotlivých prutů	65
1.77	Globální koncové síly jednotlivých prutů	65
1.78	Lokální koncové síly jednotlivých prutů	66
1.79	Tabulka normálových sil	66

Úvod

Tato pomůcka má charakter cvičebnice a navazuje na knihu *Statika stavebních konstrukcí II* autorů J. Kadlčáka a J. Kytýra [1], která je základním podkladem při domácí přípravě do předmětu *Statika stavebních konstrukcí II*.

Studenti se v předložené pomůcce seznámí s postupy výpočtu a řešením staticky neurčitých konstrukcí deformační metodou při silovém zatížení. Je diskutováno určení stupně přetvárné neurčitosti konstrukce a sestavení vhodného výpočtového modelu pro řešení deformační metodou. Postup řešení je následně podrobně rozebrán na vybraných příkladech.

V kapitole 1 se materiál věnuje obecné deformační metodě, zatímco kapitola 2 popisuje zjednodušenou deformační metodu. Stručný popis podstaty obecné deformační uvedený v části 1.1 navazuje na práci [2].

Kapitola 1

Obecná deformační metoda

1.1 Podstata obecné deformační metody

Obecná deformační metoda (dále ODM) je metoda nepřímá, která řeší nejprve deformační stav prutové konstrukce a z něho pak odvozuje statický stav. Volí za neznámé přetvárně (deformačně) neurčité veličiny. K určení neznámých parametrů deformace (složek přemístění) uzlů jako výchozích hodnot pro stanovení vnitřních sil prutů využívá statické podmínky rovnováhy uvolněných styčníků. Pro podrobnější rozbor aplikace podmínek rovnováhy viz [1] na str. 239.

$$\begin{aligned}\sum_a F_x &= 0 \\ \sum_a F_z &= 0 \\ \sum_a M_y &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

Rovnice 1.1 se označují jako styčnickové rovnice (v zobecněném tvaru) a jejich počet je dán počtem neznámých parametrů deformace. Celkový počet neznámých přemístění u , w a natočení φ styčníků prutové soustavy udává stupeň přetvárné neurčitosti soustavy n_p .

Pro stanovení stupně přetvárné neurčitosti n_p rovinné prutové konstrukce lze použít vztah

$$n_p = 3t + 2k + p - p_v\tag{1.2}$$

kde

t ... počet monolitických (tuhých) styčníků,

k ... počet kloubových styčníků,

p ... počet jednoduchých posuvných podepření,

p_v ... počet vnějších vazeb (přepočtených na jednonásobné vazby).

Sestavené podmínky rovnováhy ještě neumožňují výpočet neznámých složek přemístění. Tyto neznámé složky totiž zatím nejsou v rovnicích uvedeny explicitně tak, aby je bylo možno vyřešit jako kořeny soustavy rovnic.

Abychom tedy mohli prutovou soustavu řešit obecnou deformační metodou, musíme nejprve provést analýzu všech prutů, z nichž se prutová soustava skládá.

Nejdříve řešíme primární stav každého prutu. Oba koncové uzly prutu a, b zcela znehybníme (tj. prohlásíme všech šest jejich složek přemístění za nulové). Tím změním prut v tomto případě na oboustranně dokonale vetknutý nosník, na kterém ponecháme zadané zatížení. Řešením oboustranně vetknutého nosníku vypočteme odpovídající složky interakcí, které nazveme primární složky interakcí $\bar{X}_{ab}, \bar{Z}_{ab}, \bar{M}_{ab}, \bar{X}_{ba}, \bar{Z}_{ba}, \bar{M}_{ba}$. Pokud není na zkoumaném prutu zadáno žádné zatížení, není prut v primárním stavu nijak namáhán a všechny jeho primární složky interakcí jsou nulové.

Poté řešíme sekundární stav každého prutu. Z prutu odstraníme zadané zatížení a koncovým uzlům prutu a, b udělíme jejich složky přemístění (obecně, neboť jejich velikosti zatím neznáme). Tím se do jinak nezatíženého prutu vnese deformace. Řešením tohoto deformačního zatěžovacího stavu prutu vyjádříme obecně tzv. sekundární složky interakcí jako lineární funkce složek přemístění.

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_{ab} &= k_{11}u_a + k_{12}w_a + k_{13}\varphi_a + k_{14}u_b + k_{15}w_b + k_{16}\varphi_b \\
 \hat{Z}_{ab} &= k_{21}u_a + k_{22}w_a + k_{23}\varphi_a + k_{24}u_b + k_{25}w_b + k_{26}\varphi_b \\
 \hat{M}_{ab} &= k_{31}u_a + k_{32}w_a + k_{33}\varphi_a + k_{34}u_b + k_{35}w_b + k_{36}\varphi_b \\
 \hat{X}_{ba} &= k_{41}u_a + k_{42}w_a + k_{43}\varphi_a + k_{44}u_b + k_{45}w_b + k_{46}\varphi_b \\
 \hat{Z}_{ba} &= k_{51}u_a + k_{52}w_a + k_{53}\varphi_a + k_{54}u_b + k_{55}w_b + k_{56}\varphi_b \\
 \hat{M}_{ba} &= k_{61}u_a + k_{62}w_a + k_{63}\varphi_a + k_{64}u_b + k_{65}w_b + k_{66}\varphi_b
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Konstanty úměrnosti k_{ij} ($i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, 6$) jsou tuhostní součinitelé. Sečtením primárního a sekundárního stavu získáme vzorce pro globální složky interakcí.

$$\begin{aligned}
 X_{ab} &= \bar{X}_{ab} + k_{11}u_a + k_{12}w_a + k_{13}\varphi_a + k_{14}u_b + k_{15}w_b + k_{16}\varphi_b \\
 Z_{ab} &= \bar{Z}_{ab} + k_{21}u_a + k_{22}w_a + k_{23}\varphi_a + k_{24}u_b + k_{25}w_b + k_{26}\varphi_b \\
 M_{ab} &= \bar{M}_{ab} + k_{31}u_a + k_{32}w_a + k_{33}\varphi_a + k_{34}u_b + k_{35}w_b + k_{36}\varphi_b \\
 X_{ba} &= \bar{X}_{ba} + k_{41}u_a + k_{42}w_a + k_{43}\varphi_a + k_{44}u_b + k_{45}w_b + k_{46}\varphi_b \\
 Z_{ba} &= \bar{Z}_{ba} + k_{51}u_a + k_{52}w_a + k_{53}\varphi_a + k_{54}u_b + k_{55}w_b + k_{56}\varphi_b \\
 M_{ba} &= \bar{M}_{ba} + k_{61}u_a + k_{62}w_a + k_{63}\varphi_a + k_{64}u_b + k_{65}w_b + k_{66}\varphi_b
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tyto vzorce lze přehledněji zapsat v maticovém tvaru. Proto definujeme následující matice¹:

1. sloupcový vektor výsledných globálních složek interakcí prutu

$$\mathbf{R}_{ab} = \{X_{ab} \quad Z_{ab} \quad M_{ab} \quad X_{ba} \quad Z_{ba} \quad M_{ba}\}^T \tag{1.5}$$

¹Matice a vektory jsou označeny tučným a tiskacím písmem s indexy označenými kurzívou. Vektor deformací \mathbf{r} prutu ab je tedy označen jako \mathbf{r}_{ab} a matice tuhosti soustavy je označena jako \mathbf{K} . V případě transponované matice či vektoru je označení transpozice provedeno atypicky kurzívou (viz 1.5).

2. sloupcový vektor primárních globálních složek interakcí prutu

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \{\bar{X}_{ab} \quad \bar{Z}_{ab} \quad \bar{M}_{ab} \quad \bar{X}_{ba} \quad \bar{Z}_{ba} \quad \bar{M}_{ba}\}^T \quad (1.6)$$

3. sloupcový vektor globálních složek uzlových přemístění prutu

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a \quad w_a \quad \varphi_a \quad u_b \quad w_b \quad \varphi_b\}^T \quad (1.7)$$

4. globální matice tuhosti prutu

$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Pomocí matic 1.5 až 1.8 pak lze vzorce 1.4 zapsat jedinou maticovou rovnicí 1.9.

$$\mathbf{R}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{k}_{ab}\mathbf{r}_{ab} \quad (1.9)$$

Cílem analýzy prutu je tedy určení globálních objektů každého prutu, tj. globálního vektoru primárních koncových sil $\bar{\mathbf{R}}_{ab}$ a globální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab} prutu ab .

Po ukončení analýzy prutů lze přistoupit k tzv. analýze prutové soustavy, pomocí které získáme řešitelnou soustavu n_p algebraických rovnic, které, jak již bylo řečeno, vyjadřují statické podmínky rovnováhy pro všechny uzly řešené prutové soustavy.

V maticové formě můžeme tuto soustavu rovnic zapsat ve tvaru

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (1.10)$$

kde \mathbf{K} je symetrická čtvercová matice soustavy rovnic řádu n_p a sestavuje se z globálních matic tuhosti \mathbf{k}_{ab} jednotlivých prutů. Vzhledem ke svému fyzikálnímu významu se matice \mathbf{K} nazývá maticí tuhostí prutové soustavy.

Vektor \mathbf{r} představuje globální vektor parametrů deformace prutové soustavy rozměru n_p a obsahuje všechny hledané složky přemístění uzlů celé konstrukce. Vektor \mathbf{F} na pravé straně soustavy rovnic označuje zatěžovací vektor prutové soustavy. Má taky rozměr n_p a vytvoří se superpozicí dvou vektorů stejných rozměrů.

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}} \quad (1.11)$$

V této rovnici vyjadřuje \mathbf{S} globální vektor uzlového zatížení a obsahuje hodnoty daného zatížení v uzlech, působící ve směrech a kladných smyslech každého z globálních parametrů deformace \mathbf{r} . Vektor $\bar{\mathbf{R}}$ je primární vektor prutové soustavy sestavený z globálních primárních vektorů $\bar{\mathbf{R}}_{ab}$ jednotlivých prutů.

Aby bylo možné sestavit matici tuhosti \mathbf{K} vyšetřované prutové soustavy a její výsledný vektor $\overline{\mathbf{R}}$, je nutné prvky matic \mathbf{k}_{ab} a vektorů $\overline{\mathbf{R}}_{ab}$ jednotlivých prutů konstrukce lokalizovat. Lokalizaci nazýváme umístění příslušných prvků matic \mathbf{k}_{ab} a vektorů prutů na odpovídající místa matice \mathbf{K} a vektoru $\overline{\mathbf{R}}$ prutové soustavy.

Uzly a podporové body v prutové soustavě se libovolně očíslovají. Jednotlivým uzlům i podporovým bodům přiřadíme trojici čísel pro tři parametry deformace v každém uzlu. V podporových bodech, kde jsou předepsány úložné podmínky, se vázaným parametrům deformace místo čísla přiřadí nula.

Nejběžnější je postup lokalizace pomocí kódového čísla prutu. Je to šestice čísel, která jednoznačně definuje globální parametry deformace v obou koncích každého prutu. Podle orientace prutu se kódové číslo vytvoří z trojic čísel definujících globální parametry deformace v počátečním a koncovém uzlu prutu ab . Číslice v kódových číslech odpovídají označení parametrů ve vektoru \mathbf{r} . Pořadové číslo, které má uvažovaná globální složka vektoru \mathbf{r} parametrů deformace prutové soustavy se nazývá lokalizační index. Dvojice lokalizačních indexů tvoří u matice v podstatě adresu, podle níž lze prvek matice jednoznačně přiřadit. Lokalizace s použitím kódových čísel probíhá tak, že lokalizační indexy příslušného kódového čísla označíme řádky a sloupce globální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab} každého prutu. Podle lokalizačních indexů i, j pak umístíme prvek k_{ij} z matice \mathbf{k}_{ab} do příslušné pozice matice \mathbf{K} .

Podobně jako lokalizace matic tuhostí \mathbf{k}_{ab} probíhá i lokalizace prvků globálních primárních vektorů $\overline{\mathbf{R}}_{ab}$. Rozdíl je v tom, že se jedná pouze o jeden sloupec a kódová čísla se uplatní pro označení řádků vektoru $\overline{\mathbf{R}}_{ab}$.

Vyřešením soustavy rovnic 1.10 získáme pro daný zatěžovací stav vektor deformací celé prutové soustavy \mathbf{r} .

$$\mathbf{r} = \{u_1 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad u_n \quad w_n \quad \varphi_n\}^T \quad (1.12)$$

Pro každý prut soustavy vybereme za použití kódových čísel z vektoru deformací \mathbf{r} celé prutové soustavy rozměru n_p příslušné složky přemístění a vytvoříme vektor globálních složek deformací prutu \mathbf{r}_{ab} , který má rozměr 6.

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a \quad w_a \quad \varphi_a \quad u_b \quad w_b \quad \varphi_b\}^T \quad (1.13)$$

Dalším krokem výpočtu je určení vektoru globálních koncových sil každého prutu

$$\mathbf{R}_{ab} = \overline{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{k}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \quad (1.14)$$

Pro určení vnitřních sil (tzn. normálových, posouvajících sil a ohybových momentů) je pak zapotřebí transformovat tento globální vektor koncových sil \mathbf{R}_{ab} do lokálního systému, čímž získáme lokální vektor koncových sil \mathbf{R}_{ab}^* prutu ab .

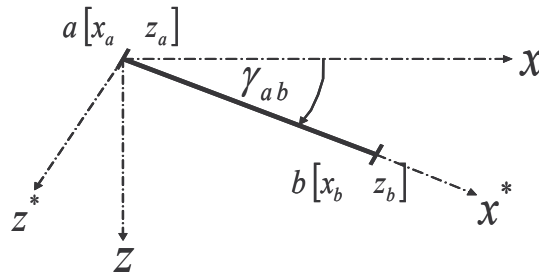
$$\mathbf{R}_{ab}^* = \{X_{ab}^* \quad Z_{ab}^* \quad M_{ab}^* \quad X_{ba}^* \quad Z_{ba}^* \quad M_{ba}^*\}^T \quad (1.15)$$

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{R}_{ab} \quad (1.16)$$

\mathbf{T}_{ab} je transformační matice, která má tvar

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

kde γ_{ab} je natočení prutu.



Obrázek 1.1: Lokální a globální souřadnicová soustava

Poznámka

Pro geometrický popis konstrukce jako celku používáme globální pravoúhlou souřadnicovou soustavu x, z . Pro usnadnění analýzy jednotlivých prutů zavádíme lokální souřadnicovou soustavu x^*, z^* pro každý vyšetřovaný prut.

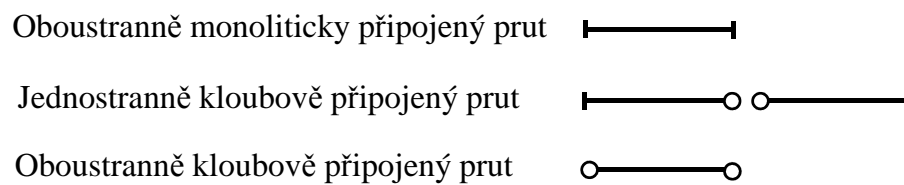
1.2 Tvorba výpočtového modelu

Při tvorbě výpočtového modelu se idealizuje:

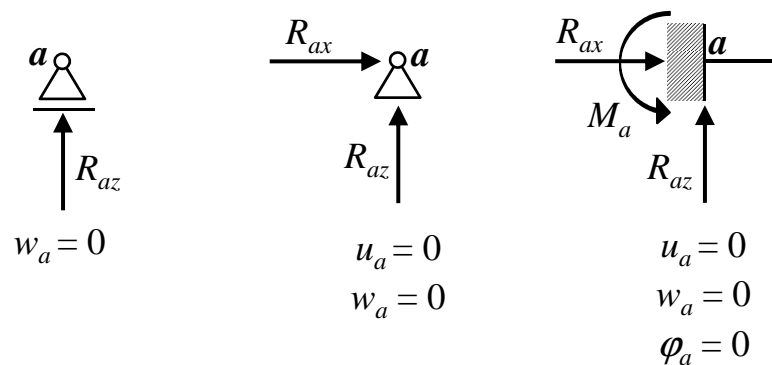
- tvar: tvořený střednicemi prutů (přisouzeny geometrické a průřezové charakteristiky a vlastnosti materiálu)
- styk prutů: styčníky monolitické (rámové), styčníky kloubové (nerámové)
- styk prutů a vnějších vazeb
- zatížení: silové, deformační



Obrázek 1.2: Schémata styků prutů



Obrázek 1.3: Schémata uložení prutů






Obrázek 1.4: Schémata vnějších vazeb

1.2.1 Výpočet stupně přetvárné neurčitosti n_p

K určení přetvárné neurčitosti je možno užít vztah 1.2 uvedený v kapitole 1 nebo jej lze určit pomocí tzv. fiktivních vazeb. Stupeň přetvárné neurčitosti je roven počtu fiktivních vazeb potřebných k vytvoření základní deformačně určité soustavy. Fiktivní silové vazby zabírají vodorovnému respektive svislému přemístění styčnicků a momentové fiktivní vazby zabírají pootočení styčnicků. Schémata fiktivních vazeb jsou uvedena níže následována příklady určení stupně přetvárné neurčitosti n_p pomocí fiktivních vazeb. Pro podrobnosti viz str. 325 učebnice [1].

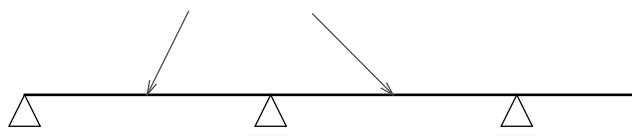
Fiktivní vazby

-  ... momentová (brání pootočení)
-  ... silová (brání svislému posunu)
-  ... silová (brání horizontálnímu posunu)

1.2.1.1 Příklad 1

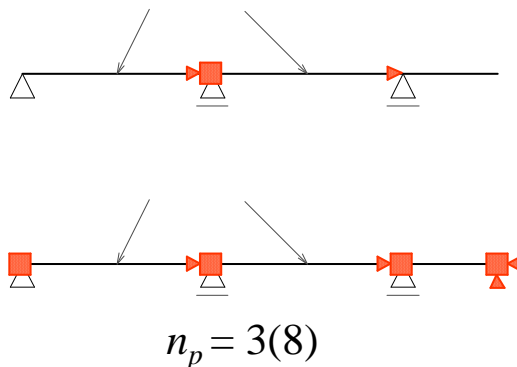
Zadání

Určete stupeň přetvárné neurčitosti u spojitého nosníku na obr. 1.5.



Obrázek 1.5: Schéma spojitého nosníku

Řešení

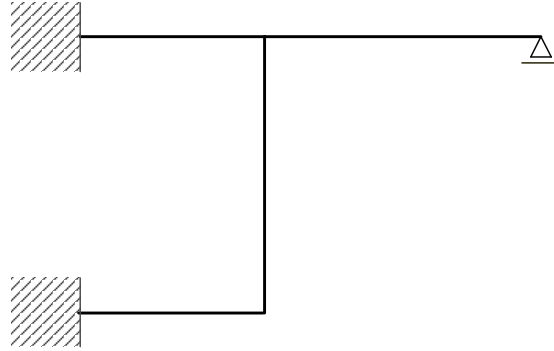


Obrázek 1.6: Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami

1.2.1.2 Příklad 2

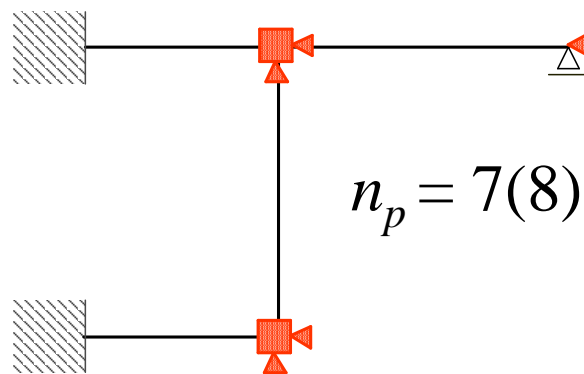
Zadání

Určete stupeň přetvárné neurčitosti u rovinného rámu na obr. 1.7.



Obrázek 1.7: Rovinný rám

Řešení

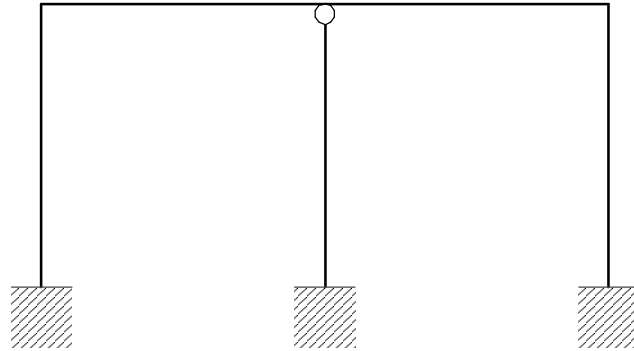


Obrázek 1.8: Schéma rovinného rámu s fiktivními vazbami

1.2.1.3 Příklad 3

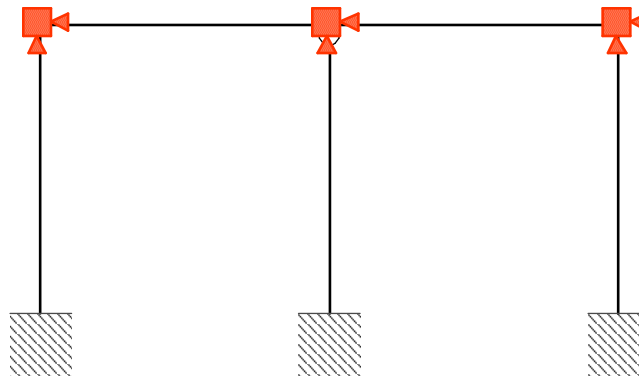
Zadání

Určete stupeň přetvárné neurčitosti u rovinného rámu na obr. 1.9.



Obrázek 1.9: Schéma rámu

Řešení



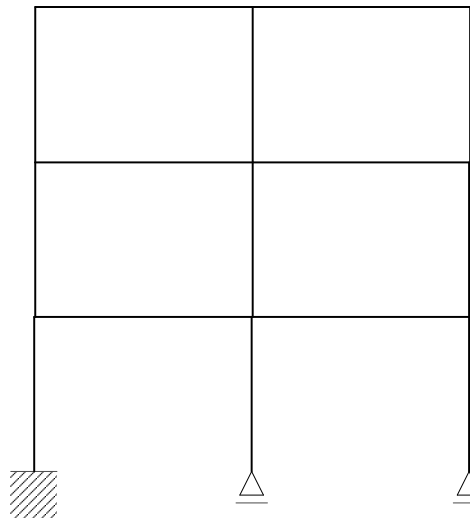
$$n_p = 9$$

Obrázek 1.10: Schéma rámu s fiktivními vazbami

1.2.1.4 Příklad 4

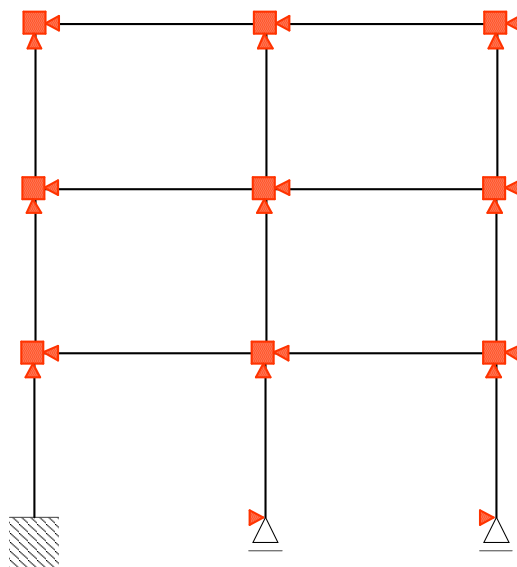
Zadání

Určete stupeň přetvárné neurčitosti u patrového rámu na obr. 1.11.



Obrázek 1.11: Schéma patrového rámu

Řešení



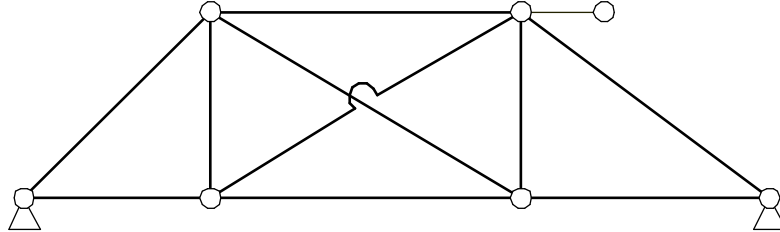
$$n_p = 29(31)$$

Obrázek 1.12: Schéma patrového rámu s fiktivními vazbami

1.2.1.5 Příklad 5

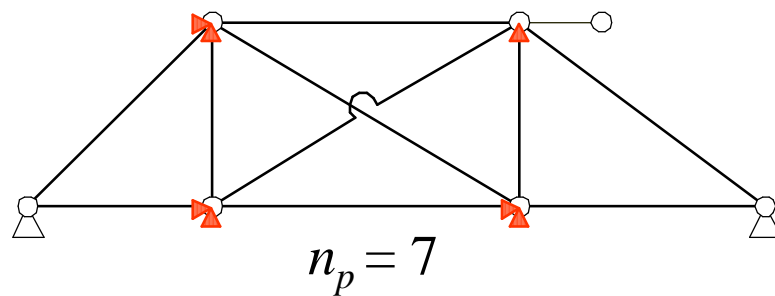
Zadání

Určete stupeň přetvárné neurčitosti u příhradové konstrukce na obr. 1.13.



Obrázek 1.13: Schéma příhradového nosníku

Řešení



Obrázek 1.14: Schéma příhradového nosníku s fiktivními vazbami

Poznámka

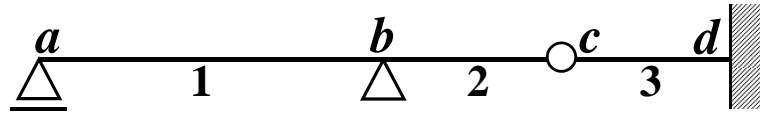
U příkladů 1, 2 a 4 jsou uvedeny dvě hodnoty stupně přetvárné neurčitosti. První hodnota uvádí minimální počet neznámých potřebných pro řešení (nejsou započítána natočení styčníků v bodech, kde známe hodnotu ohybového momentu). Druhá hodnota pak uvádí počet neznámých zahrnující i natočení, jejichž hodnoty nepotřebujeme znát pro řešení konstrukce.

1.2.2 Příklady výpočtových modelů

1.2.2.1 Příklad 1

Zadání

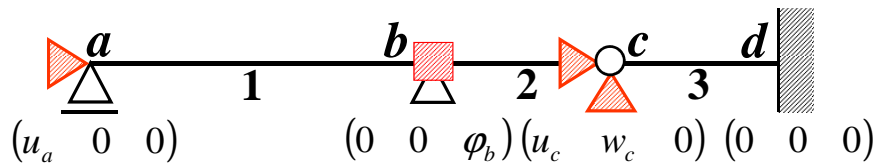
Určete výpočtový model spojitého nosníku na obr. 1.15.



Obrázek 1.15: Schéma spojitého nosníku

Řešení

Výpočtový model spojitého nosníku včetně fiktivních vazeb a neznámých parametrů deformace je uveden na obr. 1.16.



Obrázek 1.16: Výpočtový model spojitého nosníku včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 4$

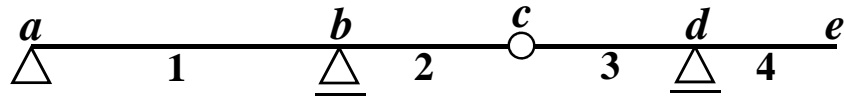
Uložení prutů včetně kódových čísel:

Prut 1	$a \circ \text{---} b$ $(1 \ 0 \ 0) \ (0 \ 0 \ 2)$
Prut 2	$b \text{---} \circ c$ $(0 \ 0 \ 2) \ (3 \ 4 \ 0)$
Prut 3	$c \circ \text{---} d$ $(3 \ 4 \ 0) \ (0 \ 0 \ 0)$

1.2.2.2 Příklad 2

Zadání

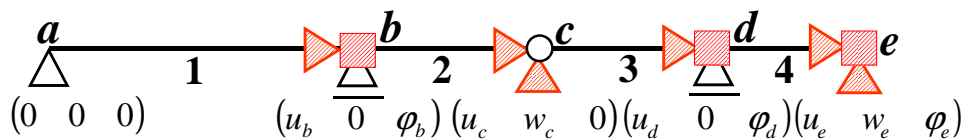
Určete výpočtový model spojitého nosníku s převislým koncem na obr. 1.17



Obrázek 1.17: Schéma spojitého nosníku včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 5$

Řešení 1

Výpočtový model spojitého nosníku s převislým koncem včetně fiktivních vazeb a neznámých parametrů deformace je uveden na obr. 1.18. Neznámé parametry posunů a pootočení jsou hledány i na volném konci.



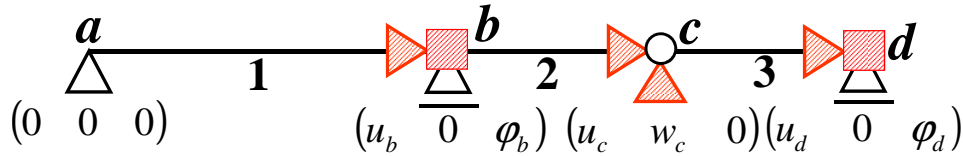
Obrázek 1.18: Výpočtový model spojitého nosníku včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 9$

Uložení prutů včetně kódových čísel:

- Prut 1 $a \text{---} b$
(0 0 0) (1 0 2)
- Prut 2 $b \text{---} c$
(1 0 2) (3 4 0)
- Prut 3 $c \text{---} d$
(3 4 0) (5 0 6)
- Prut 4 $d \text{---} e$
(5 0 6) (7 8 9)

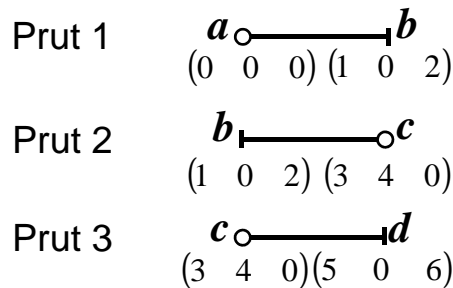
Řešení 2

Výpočtový model se sníženým počtem neznámých parametrů deformace. Spojitý nosník s převislým koncem včetně fiktivních vazeb a neznámých parametrů deformace je uveden na obr. 1.19. Převislý konec je nahrazen statickým momentem v podpoře d s ponecháním neznámé φ_d .



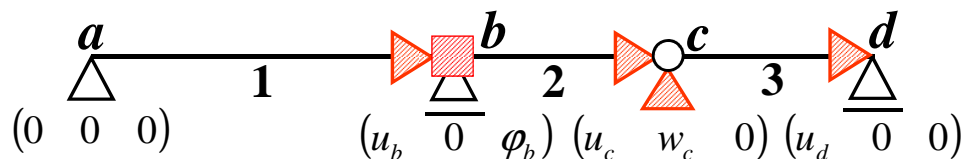
Obrázek 1.19: Výpočtový model spojitého nosníku s náhradou převislého konce statickým momentem v podpoře d s ponecháním neznámé φ_d , $n_p = 6$

Uložení prutů včetně kódových čísel:



Řešení 3

Výpočtový model při minimálním počtu neznámých parametrů deformace. Spojitý nosník s převislým koncem včetně fiktivních vazeb a neznámých parametrů deformace je uveden na obr. 1.20. Převislý konec je nahrazen statickým momentem v podpoře d . Pootočení φ_d v podpoře d se nepočítá.



Obrázek 1.20: Výpočtový model spojitého nosníku s náhradou převislého konce statickým momentem v podpoře d s minimálním $n_p = 5$

Uložení prutů včetně kódových čísel:

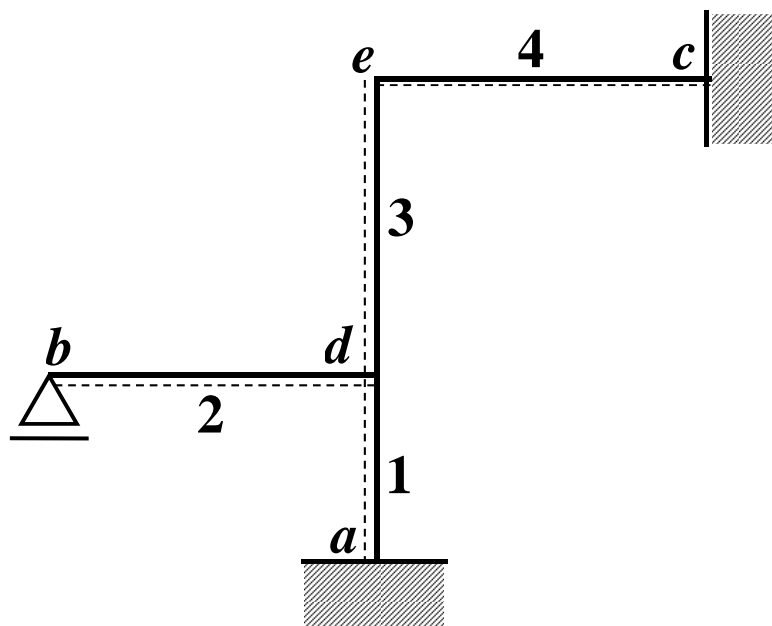
$$\begin{array}{l}
 \text{Prut 1} \quad \begin{array}{c} \mathbf{a} \text{---} \mathbf{b} \\ (0 \ 0 \ 0) \ (1 \ 0 \ 2) \end{array} \\
 \text{Prut 2} \quad \begin{array}{c} \mathbf{b} \text{---} \mathbf{c} \\ (1 \ 0 \ 2) \ (3 \ 4 \ 0) \end{array} \\
 \text{Prut 3} \quad \begin{array}{c} \mathbf{c} \text{---} \mathbf{d} \\ (3 \ 4 \ 0) \ (5 \ 0 \ 0) \end{array}
 \end{array}$$

Pro podrobnější řešení nosníku s převislým koncem viz kapitola 1.5.3 na str. 39.

1.2.2.3 Příklad 3

Zadání

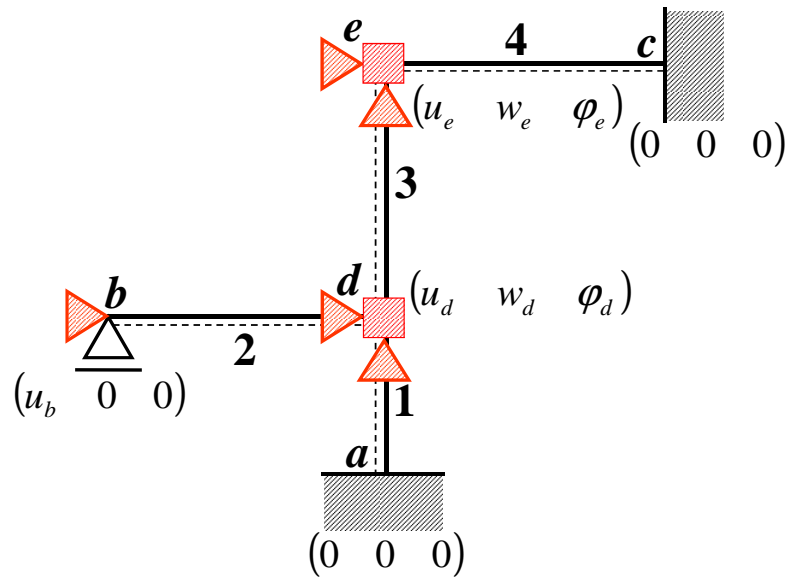
Určete výpočtový model rámu na obr. 1.21.



Obrázek 1.21: Schéma rámu

Řešení

Výpočtový model rámu včetně fiktivních vazeb a neznámých parametrů deformace je uveden na obr. 1.22.



Obrázek 1.22: Výpočtový model rámu včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 7$

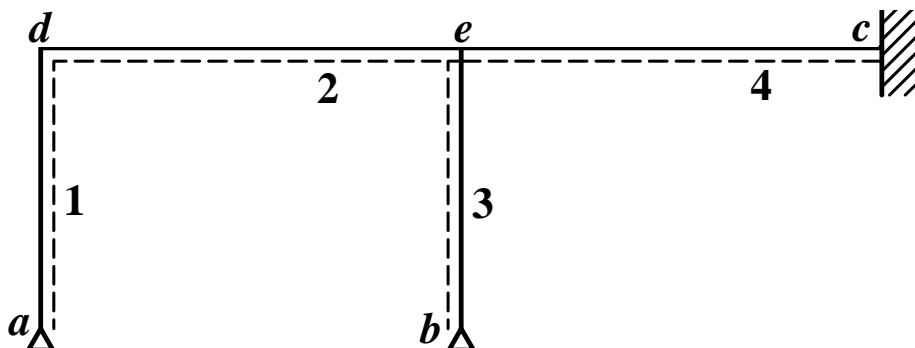
Uložení prutů včetně kódových čísel:

Prut 1	$d \text{---} a$ (4 5 6) (0 0 0)
Prut 2	$b \text{---} d$ (7 0 0) (4 5 6)
Prut 3	$e \text{---} d$ (1 2 3) (4 5 6)
Prut 4	$e \text{---} c$ (1 2 3) (0 0 0)

1.2.2.4 Příklad 4

Zadání

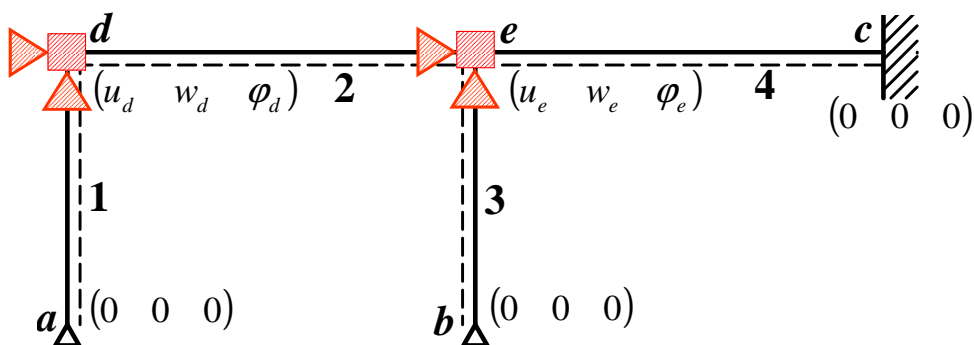
Určete výpočtový model rámu na obr. 1.23.



Obrázek 1.23: Schéma rámu

Řešení

Výpočtový model rámu včetně fiktivních vazeb a neznámých parametrů deformace je uveden na obr. 1.24.



Obrázek 1.24: Výpočetní model rámu včetně neznámých parametrů deformace, $n_p = 6$

Uložení prutů včetně kódových čísel:

Prut 1	$a \circ \text{---} d$ (0 0 0) (1 2 3)
Prut 2	$d \text{---} e$ (1 2 3) (4 5 6)
Prut 3	$e \text{---} \circ b$ (4 5 6) (0 0 0)
Prut 4	$e \text{---} c$ (4 5 6) (0 0 0)

1.3 Analýza prutu

Cílem analýzy prutu je určení globálních objektů každého prutu, tj. globálního vektoru primárních koncových sil $\overline{\mathbf{R}}_{ab}$ a globální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab} prutu ab .

Globální objekty získáme transformací lokálních objektů, tzn. lokálního primárního vektoru koncových sil $\overline{\mathbf{R}}_{ab}^*$ a lokální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab}^* prutu ab . Transformaci provedeme za použití transformační matice \mathbf{T}_{ab} 1.17 uvedené v kapitole 1.

$$\overline{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \overline{\mathbf{R}}_{ab}^* \quad (1.18)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \quad (1.19)$$

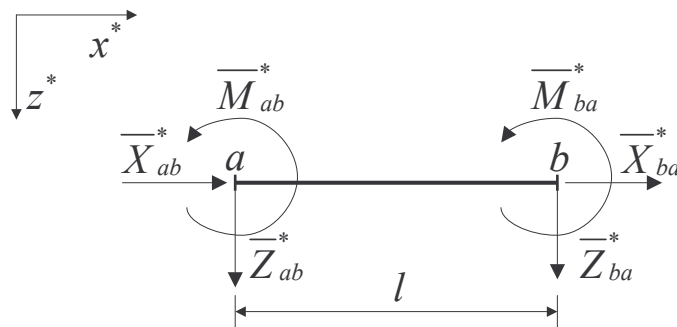
1.3.1 Lokální primární vektor koncových sil

Lokální primární vektor koncových sil $\overline{\mathbf{R}}_{ab}^*$ (pro prut konstantního průřezu) obdržíme řešením primárního stavu prutu - oba koncové uzly prutu zcela znehybníme a na prutu ponecháme zadané zatížení, řešením získaného nosníku vypočteme odpovídající složky interakcí, které nazveme primární složky interakcí. Primární vektor koncových sil je možno uvažovat rovněž jako reakce od zatížení na prutu uvolněném z konstrukce, který má odpovídající uložení.

Pokud není na zkoumaném prutu zadáno žádné zatížení, není prut v primárním stavu nijak namáhán a všechny jeho primární složky interakcí jsou nulové.

Prut oboustranně monoliticky připojený

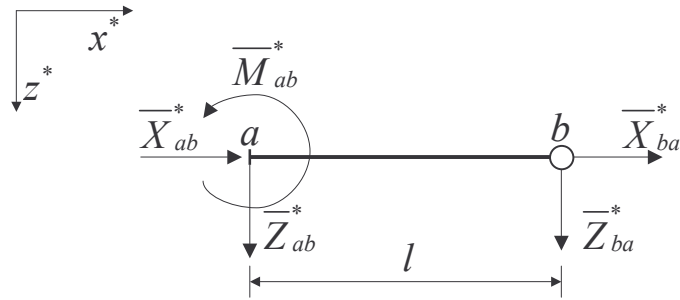
$$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \overline{X}_{ab}^* \quad \overline{Z}_{ab}^* \quad \overline{M}_{ab}^* \quad \overline{X}_{ba}^* \quad \overline{Z}_{ba}^* \quad \overline{M}_{ba}^* \right\}^T$$



Obrázek 1.25: Oboustranně monoliticky připojený, složky lokálních primárních koncových sil

Prut pravostranně kloubově připojený

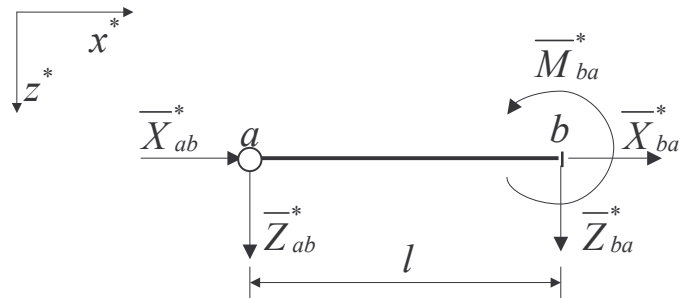
$$\overline{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \overline{X}_{ab}^* \quad \overline{Z}_{ab}^* \quad \overline{M}_{ab}^* \quad \overline{X}_{ba}^* \quad \overline{Z}_{ba}^* \quad 0 \right\}^T$$



Obrázek 1.26: Pravostranně kloubově připojený, složky lokálních primárních koncových sil

Prut levostranně kloubově připojený

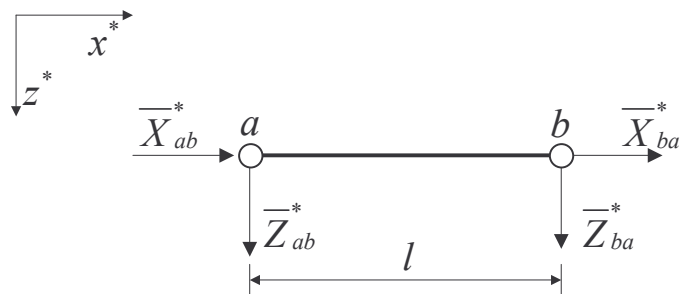
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \bar{X}_{ab}^* \quad \bar{Z}_{ab}^* \quad 0 \quad \bar{X}_{ba}^* \quad \bar{Z}_{ba}^* \quad \bar{M}_{ba}^* \right\}^T$$



Obrázek 1.27: Prut levostranně kloubově připojený, složky lokálních primárních koncových sil

Prut oboustranně kloubově připojený

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \bar{X}_{ab}^* \quad \bar{Z}_{ab}^* \quad 0 \quad \bar{X}_{ba}^* \quad \bar{Z}_{ba}^* \quad 0 \right\}^T$$

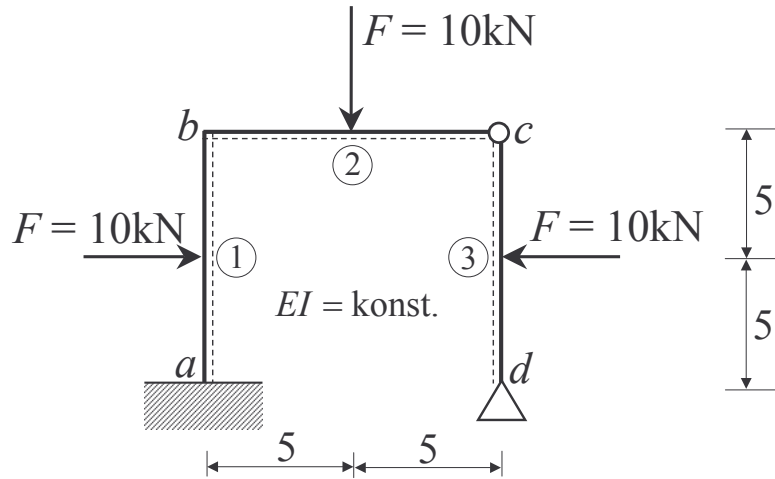


Obrázek 1.28: Prut oboustranně kloubově připojený, složky lokálních primárních koncových sil

Příklad

Zadání

U rámu zobrazeném na obr. 1.29 určete pomocí silové metody lokální primární vektory koncových sil pro pruty 1, 2 a 3.

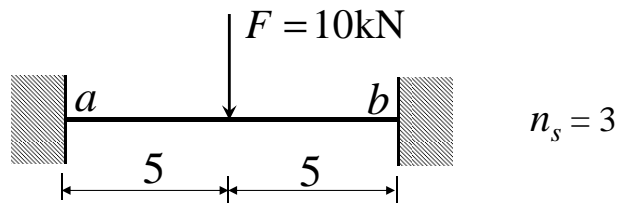


Obrázek 1.29: Zadání rovinného rámu

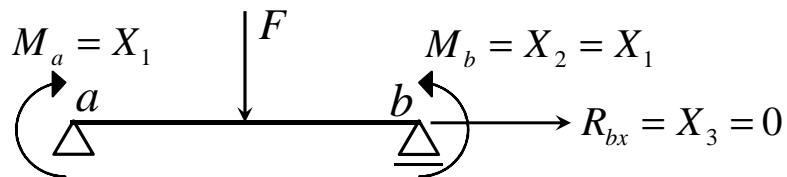
Řešení

- Prut 1 - oboustranně monoliticky uložený prut

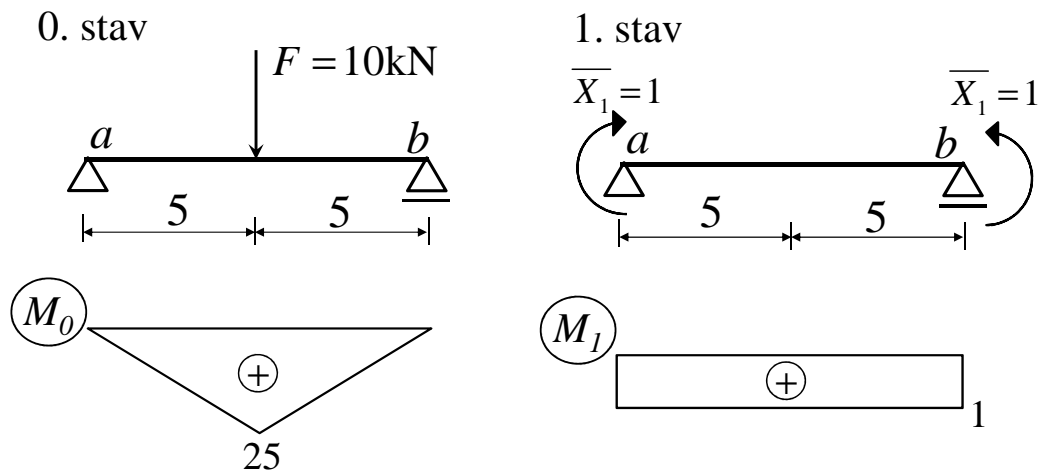
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \bar{X}_{ab}^* \quad \bar{Z}_{ab}^* \quad \bar{M}_{ab}^* \quad \bar{X}_{ba}^* \quad \bar{Z}_{ba}^* \quad \bar{M}_{ba}^* \right\}^T$$



Obrázek 1.30: Prut 1 - schéma upnutí a zatížení



Obrázek 1.31: Prut 1 - základní staticky určitá soustava



Obrázek 1.32: Prut 1 - 0. a 1. zatěžovací stav

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 = \frac{10}{EI}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 5 \cdot 1 = \frac{125}{EI}$$

Deformační podmínka:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{125}{EI}}{\frac{10}{EI}} = -12,5 \text{ kN} = M_a = M_b$$

Výpočet zbývajících reakcí z podmínek rovnováhy:

$$R_{ax} = R_{bx} = 0$$

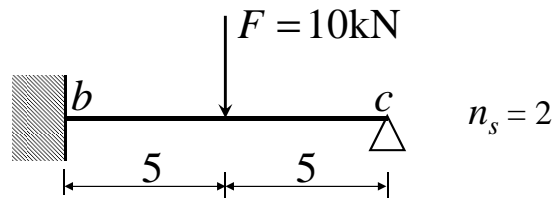
$$R_{az} = R_{bz} = \frac{F}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ kN} (\uparrow)$$

Výsledný lokální primární vektor koncových sil:

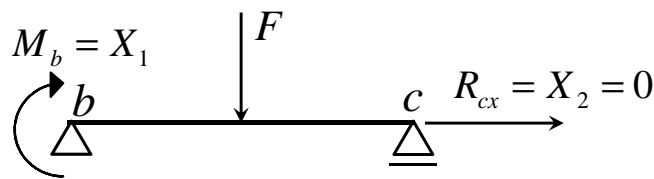
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{0 \quad -5 \quad 12,5 \quad 0 \quad -5 \quad -12,5\}^T$$

- Prut 2 - pravostranně kloubově uložený prut

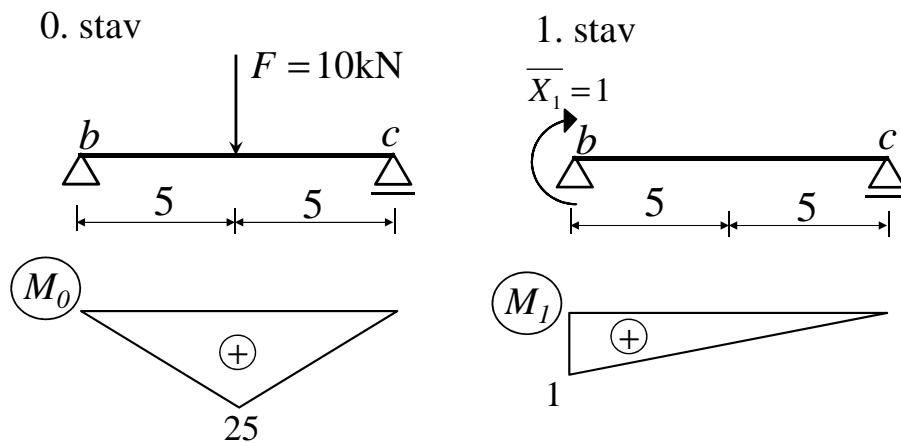
$$\overline{\mathbf{R}}_{bc}^* = \left\{ \overline{X}_{bc}^* \quad \overline{Z}_{bc}^* \quad \overline{M}_{bc}^* \quad \overline{X}_{cb}^* \quad \overline{Z}_{cb}^* \quad 0 \right\}^T$$



Obrázek 1.33: Prut 2 - schéma upnutí a zatížení



Obrázek 1.34: Prut 2 - základní staticky určitá soustava



Obrázek 1.35: Prut 2 - 0. a 1. zatěžovací stav

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3EI}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{62,5}{EI}$$

Deformační podmínka:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{62,5}{EI}}{\frac{10}{3EI}} = -18,75kN = M_b$$

Výpočet zbývajících reakcí z podmínek rovnováhy:

$$R_{bx} = R_{cx} = 0$$

$$R_{bz} = \frac{F}{2} + \frac{M_b}{l} = \frac{10}{2} + \frac{18,75}{10} = 6,875kN(\uparrow)$$

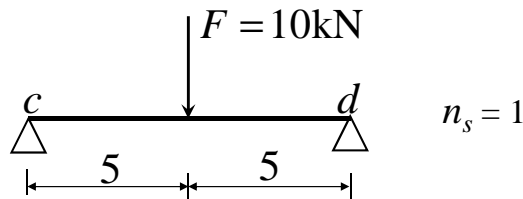
$$R_{cz} = \frac{F}{2} - \frac{M_b}{l} = \frac{10}{2} - \frac{18,75}{10} = 3,125kN(\uparrow)$$

Výsledný lokální primární vektor koncových sil:

$$\bar{\mathbf{R}}_{bc}^* = \{0 \quad -6,875 \quad 18,75 \quad 0 \quad -3,125 \quad 0\}^T$$

- Prut 3 - oboustranně kloubově uložený prut

$$\bar{\mathbf{R}}_{cd}^* = \left\{ \bar{X}_{cd}^* \quad \bar{Z}_{cd}^* \quad 0 \quad \bar{X}_{dc}^* \quad \bar{Z}_{dc}^* \quad 0 \right\}^T$$



Obrázek 1.36: Prut 3 - schéma upnutí a zatížení

Výpočet reakcí z podmínek rovnováhy:

$$R_{cx} = R_{dx} = 0$$

$$R_{cz} = R_{dz} = \frac{F}{2} = \frac{10}{2} = 5kN(\uparrow)$$

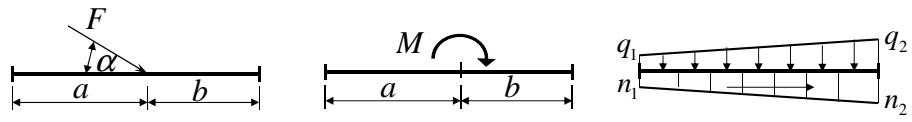
Výsledný lokální primární vektor koncových sil:

$$\bar{\mathbf{R}}_{cd}^* = \{0 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad -5 \quad 0\}^T$$

Poznámka

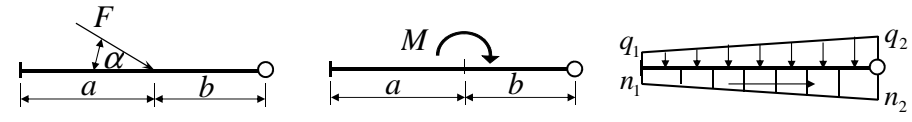
Nadále budeme při výpočtech využívat odvozené primární vektory koncových sil prutu konstantního průřezu uvedené na následující straně, a také v [1] na str. 262 (tab. 11.2.).

Lokální primární vektory koncových sil



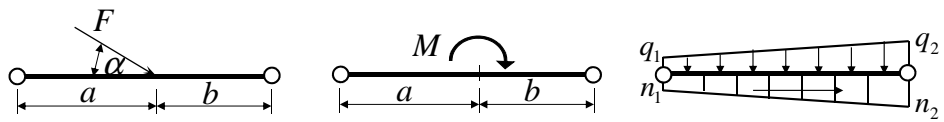
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b^2 (l + 2a) / l^3 \\ F_z a b^2 / l^2 \\ -F_x a / l \\ -F_z a^2 (l + 2b) / l^3 \\ -F_z a^2 b / l^2 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6Mab / l^3 \\ -Mb(2l - 3b) / l^2 \\ 0 \\ -6Mab / l^3 \\ -Ma(2l - 3a) / l^2 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l / 6 \\ -(7q_1 + 3q_2)l / 20 \\ (3q_1 + 2q_2)l^2 / 60 \\ -(n_1 + 2n_2)l / 6 \\ -(3q_1 + 7q_2)l / 20 \\ -(2q_1 + 3q_2)l^2 / 60 \end{Bmatrix}$$

Obrázek 1.37: Lokální primární vektory koncových sil pro oboustranně monoliticky připojený prut



$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b(3l^2 - b^2) / (2l^3) \\ F_z ab(l + b) / (2l^2) \\ -F_x a / l \\ -F_z a^2(3l - a) / (2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3M(l^2 - b^2) / (2l^3) \\ -M(l^2 - 3b^2) / (2l^2) \\ 0 \\ -3M(l^2 - b^2) / (2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l / 6 \\ -(16q_1 + 9q_2)l / 40 \\ (8q_1 + 7q_2)l^2 / 120 \\ -(n_1 + 2n_2)l / 6 \\ -(4q_1 + 11q_2)l / 40 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obrázek 1.38: Lokální primární vektory koncových sil pro jednostranně kloubově připojený prut

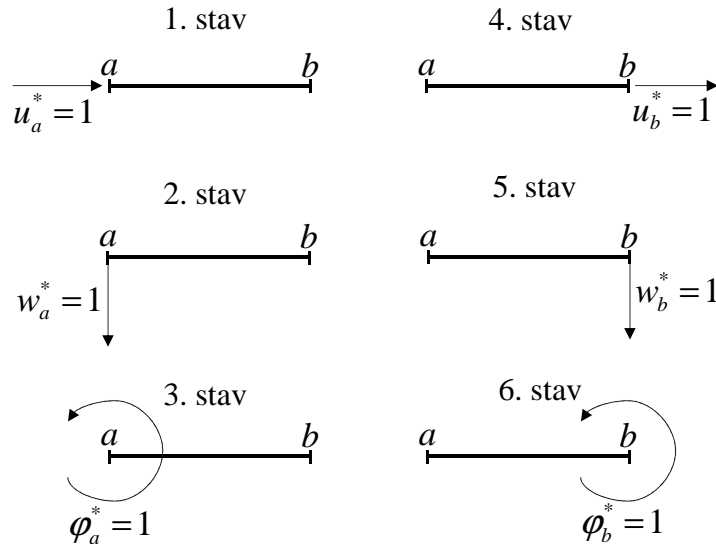


$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b / l \\ 0 \\ -F_x a / l \\ -F_z a / l \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ M / l \\ 0 \\ 0 \\ -M / l \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l / 6 \\ -(2q_1 + q_2)l / 6 \\ 0 \\ -(n_1 + 2n_2)l / 6 \\ -(q_1 + 2q_2)l / 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obrázek 1.39: Lokální primární vektory koncových sil pro oboustranně kloubově připojený prut

1.3.2 Lokální matice tuhosti prutu

Sekundární stav vytvoříme odstraněním zadaného zatížení z prutu a udělením složek přemístění koncovým uzlům prutu. Lokální matici tuhosti prutu získáme tak, že uvolněnému prutu (viz obr. 1.40) postupně udělíme jednotlivé složky deformace o jednotkové velikosti, přičemž ostatní složky zůstávají vždy nulové.



Obrázek 1.40: Schémata prutu zatíženého koncovými deformacemi

Při výpočtech budeme využívat odvozené lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu uvedené v [1] na str. 263 (tab. 11.3.) a pro podrobnější vysvětlení viz [1] str. 253.

- Prut oboustranně monoliticky připojený

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

- Prut pravostranně kloubově připojený

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

- Prut levostranně kloubově připojený

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

- Prut oboustranně kloubově připojený

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

1.4 Analýza prutové soustavy

Analýza prutové soustavy spočívá v tom, že příslušným seskupením objektů prutů podle jednotlivých parametrů deformace celé konstrukce získáme řešitelnou soustavu n_p lineárních rovnic. Jejich řešením určíme velikosti všech globálních složek parametrů deformace uzlů.

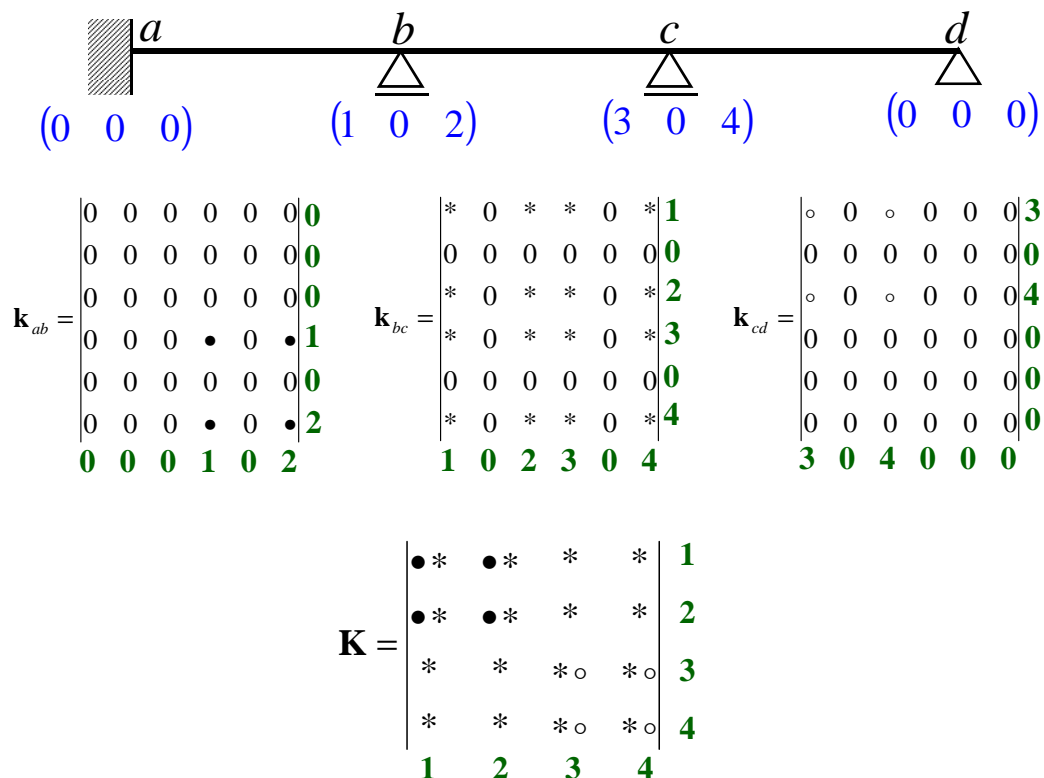
Převodem příslušných globálních parametrů deformace zpět do lokální souřadnicové soustavy získáme lokální složky parametrů deformace a následně také lokální koncové síly prutu i složky reakcí vnějších vazeb.

1.4.1 Matice tuhosti soustavy

Matici tuhosti soustavy \mathbf{K} získáme lokalizací globálních matic tuhosti \mathbf{k}_{ab} jednotlivých prutů.

Lokalizace s použitím kódových čísel - lokalizačními indexy příslušného kódového čísla označíme řádky a sloupce globální matice tuhosti \mathbf{k}_{ab} každého prutu. Podle lokalizačních indexů i, j pak umístíme prvek \mathbf{k}_{ij} z matice \mathbf{k}_{ab} do příslušné pozice matice \mathbf{K} .

Příklad lokalizace



Obrázek 1.41: Příklad lokalizace matice \mathbf{K} pro spojitý nosník

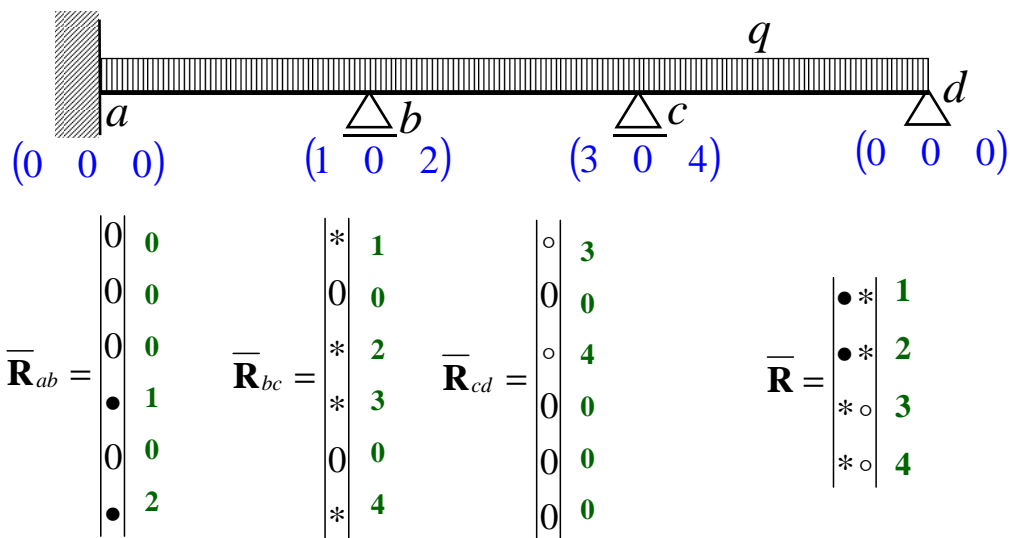
1.4.2 Primární vektor soustavy

Primární vektor soustavy $\bar{\mathbf{R}}$ získáme lokalizací primárních vektorů jednotlivých prutů.

Lokalizace probíhá podobně jako u matice tuhosti, rozdíl je v tom, že se jedná pouze o jeden sloupec a kódová čísla se uplatní pro označení řádků vektoru.

Lokalizací stanovený primární vektor soustavy umožní určit zatěžovací vektor \mathbf{F} , a to dle vztahu 1.11.

Příklad lokalizace



Obrázek 1.42: Příklad lokalizace primárního vektoru pro spojitý nosník

1.4.3 Řešení soustavy rovnic

Vyřešením soustavy rovnic 1.10 získáme pro daný zatěžovací stav vektor deformací celé prutové soustavy \mathbf{r} .

$$\mathbf{r} = \{u_1 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad u_n \quad w_n \quad \varphi_n\}^T \quad (1.24)$$

1.4.4 Dokončení řešení

Pro každý prut ab vybereme z vektoru \mathbf{r} příslušné složky přemístění a vytvoříme globální vektor složek deformací prutu (použijeme k tomu kódové číslo prutu).

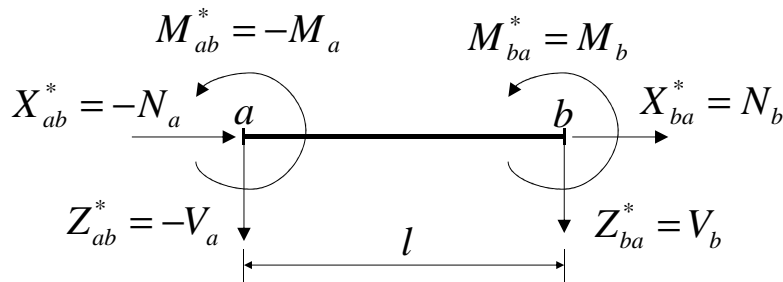
$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a \quad w_a \quad \varphi_a \quad u_b \quad w_b \quad \varphi_b\}^T \quad (1.25)$$

Pro každý prut ab dále určíme globální vektor koncových sil (uplatní se zejména u prutů s podporovými body při výpočtu složek reakcí vnějších vazeb).

$$\mathbf{R}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab} + \hat{\mathbf{R}}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{k}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \quad (1.26)$$

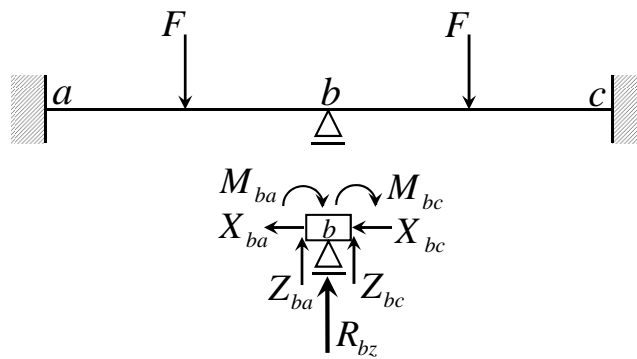
Pak určíme pro každý prut ab lokální vektor koncových sil (použijeme pro vykreslení diagramů vnitřních sil).

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ab}^* &= \mathbf{T}_{ab} \mathbf{R}_{ab} \\ \mathbf{R}_{ab}^* &= \{X_{ab}^* \quad Z_{ab}^* \quad M_{ab}^* \quad X_{ba}^* \quad Z_{ba}^* \quad M_{ba}^*\}^T \end{aligned} \quad (1.27)$$



Obrázek 1.43: Určení vnitřních sil pro prut ab

Složky reakcí určíme ze statických podmínek rovnováhy uvolněných vazeb s globálními složkami interakcí všech prutů, které jsou k vyšetřovanému podporovému body připojeny. Příklad výpočtu svíslé reakce v podporovém bodě viz. obr. 1.41.



$$\begin{aligned} \sum_b F_x = 0: & -X_{ba} - X_{bc} = 0 \\ \sum_b F_z = 0: & -Z_{ba} - R_{bz} - Z_{bc} = 0 \Rightarrow R_{bz} = -Z_{ba} - Z_{bc} \\ \sum_b M_y = 0: & -M_{ba} - M_{bc} = 0 \end{aligned}$$

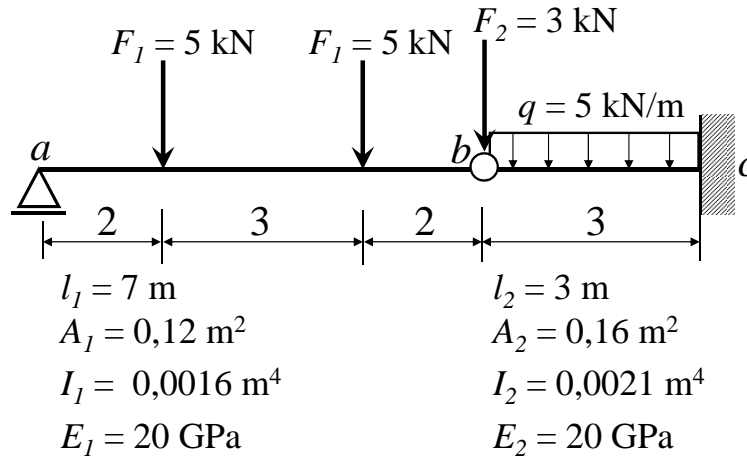
Obrázek 1.44: Příklad uvolněných složek interakcí a podmínek rovnováhy v bodě b

1.5 Řešení spojitých nosníků pomocí ODM

1.5.1 Příklad 1

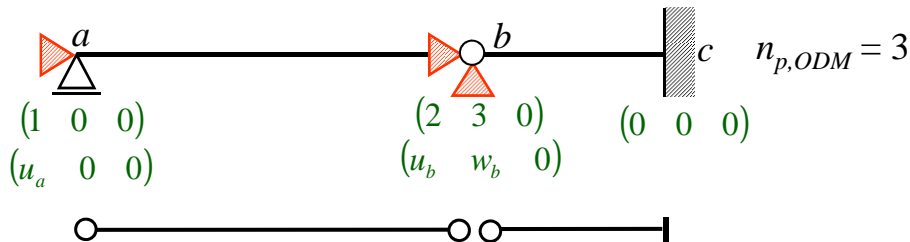
Zadání

Vyřešte pomocí ODM spojitý nosník uvedený na obr. 1.45.



Obrázek 1.45: Spojitý nosník

Řešení



Obrázek 1.46: Výpočtový model pro příklad 1

0,00	0,00
-5,00	-5,63
0,00	0,00
0,00	0,00
-5,00	-9,38
0,00	-5,63

Tabulka 1.1: Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2

342857,1	0	0	-342857	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0		0	0	0
-342857	0	0	342857,1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tabulka 1.2: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1

1066667	0	0	-1066667	0	0
0	4666,667	0	0	-4666,67	-14000
0	0	0	0	0	0
-1066667	0	0	1066667	0	0
0	-4666,67	0	0	4666,667	14000
0	-14000	0	0	14000	42000

Tabulka 1.3: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2

Kód.č.	S
0	0
0	0
0	0
2	0
3	3
0	0
0	0
0	0
0	0

Tabulka 1.4: Vektor styčnickového zatížení **S**

342857,14	-342857,1	0
-342857,1	1409523,8	0
0	0	4666,6667

Tabulka 1.5: Matice tuhosti soustavy **K**

$\bar{\mathbf{R}}$	\mathbf{S}	$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}$
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
-10,63	3,00	13,63

Tabulka 1.6: Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \{u_a \quad u_b \quad w_b\}^T$$

0,000000
0,000000
0,002920

Tabulka 1.7: Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}

0,000000	0,000000
0,000000	0,002920
0,000000	0,000000
0,000000	0,000000
0,002920	0,000000
0,000000	0,000000

Tabulka 1.8: Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2

0,00	0,00
0,00	13,63
0,00	0,00
0,00	0,00
0,00	-13,63
0,00	-40,88

Tabulka 1.9: Globální sekundární koncové síly prutů pro prut 1 a 2

0,00	0,00
-5,00	8,00
0,00	0,00
0,00	0,00
-5,00	-23,00
0,00	-46,50

Tabulka 1.10: Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2

	kód. č.	Prut 1	Prut 2	S	Reakce	
a	1	0,00		0,00	-	0,00
	0	-5,00		0,00	R_{az}	-5,00
	0	0,00		0,00	-	0,00
b	2	0,00	0,00	0,00	-	0,00
	3	-5,00	8,00	3,00	-	0,00
	0	0,00	0,00	0,00	-	0,00
c	0		0,00	0,00	R_{cx}	0,00
	0		-23,00	0,00	R_{cz}	-23,00
	0		-46,50	0,00	M_c	-46,50

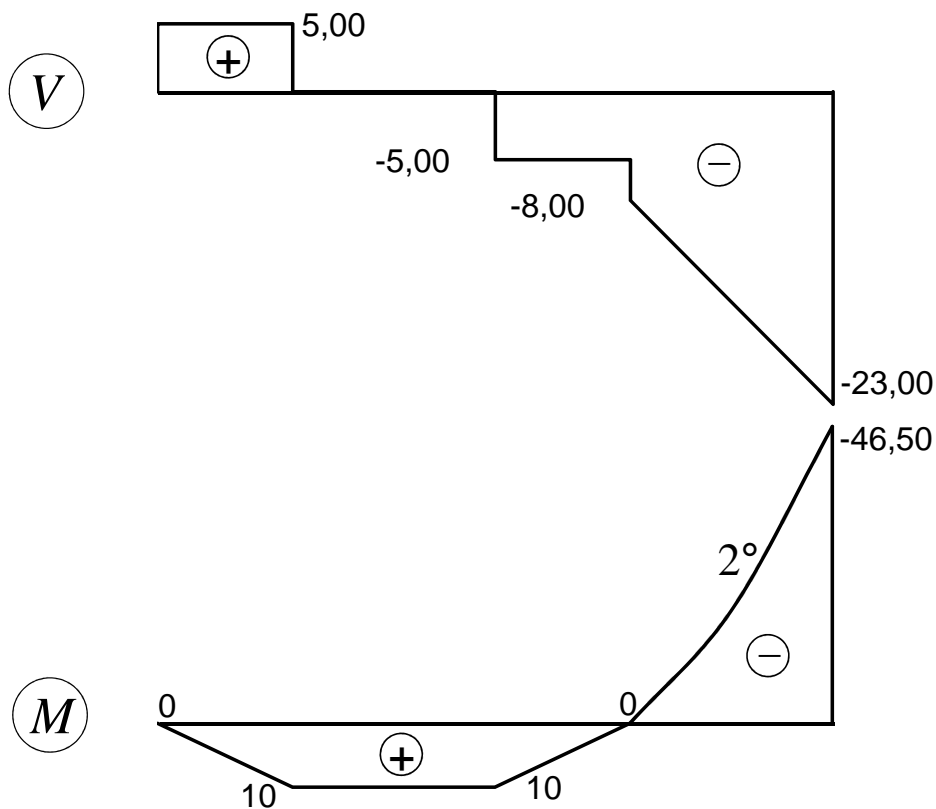
$$R_{az} = 5,0 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$R_{cx} = 0,0 \text{ kN}$$

$$R_{cz} = 23,0 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$M_c = 46,5 \text{ kNm } (\curvearrowleft)$$

Tabulka 1.11: Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb

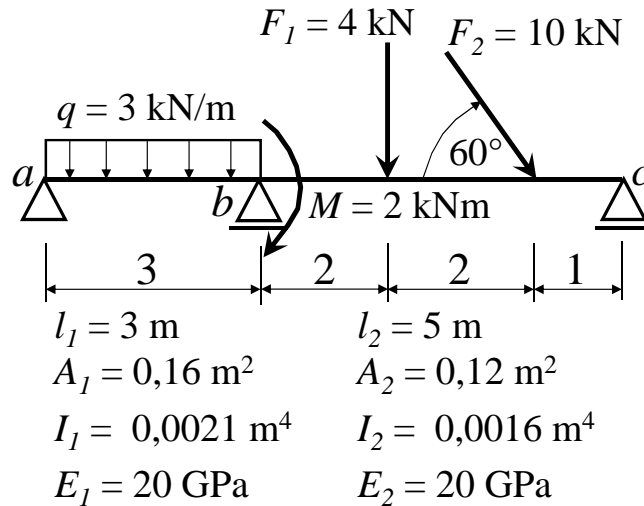


Obrázek 1.47: Vykreslení vnitřních sil pro příklad 1

1.5.2 Příklad 2

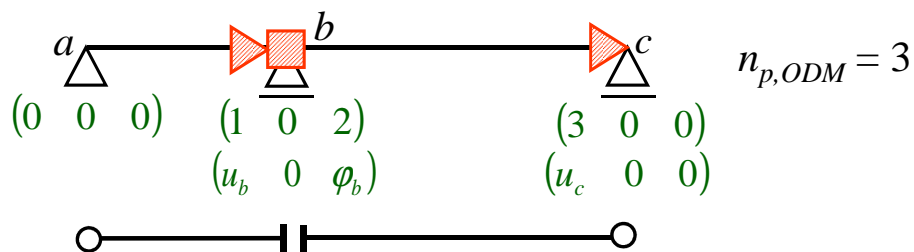
Zadání

Vyřešte pomocí ODM spojitý nosník uvedený na obr. 1.48.



Obrázek 1.48: Spojitý nosník

Řešení



Obrázek 1.49: Výpočtový model pro příklad 2

0,00	-1,00
-3,38	-5,73
0,00	8,00
0,00	-4,00
-5,63	-6,93
-3,38	0,00

Tabulka 1.12: Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2

1066667	0	0	-1066667	0	0
0	4666,667	0	0	-4666,667	-14000
0	0	0	0	0	0
-1066667	0	0	1066667	0	0
0	-4666,667	0	0	4666,667	14000
0	-14000	0	0	14000	42000

Tabulka 1.13: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1

480000	0	0	-480000	0	0
0	768	-3840	0	-768	0
0	-3840	19200	0	3840	0
-480000	0	0	480000	0	0
0	-768	3840	0	768	0
0	0	0	0	0	0

Tabulka 1.14: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2

Kód.č.	S
0	0,0
0	0,0
0	0,0
1	0,0
0	0,0
2	-2,0
3	0,0
0	0,0
0	0,0

Tabulka 1.15: Vektor styčnickového zatížení **S**

1546666,7	0	-480000
0	61200	0
-480000	0	480000

Tabulka 1.16: Matice tuhosti soustavy **K**

$\bar{\mathbf{R}}$	\mathbf{S}	$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}$
-1,00	0,00	1,00
4,62	-2,00	-6,62
-4,00	0,00	4,00

Tabulka 1.17: Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \{u_b \quad \varphi_b \quad u_c\}^T$$

0,0000047
-0,0001082
0,0000130

Tabulka 1.18: Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}

0,000000	0,000005
0,000000	0,000000
0,000000	-0,000108
0,000005	0,000013
0,000000	0,000000
-0,000108	0,000000

Tabulka 1.19: Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2

0,00	-1,00
-3,38	-5,73
0,00	8,00
0,00	-4,00
-5,63	-6,93
-3,38	0,00

Tabulka 1.20: Globální sekundární koncové síly prutů pro prut 1 a 2

-5,00	-5,00
-1,86	-5,32
0,00	5,92
5,00	0,00
-7,14	-7,34
-7,92	0,00

Tabulka 1.21: Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2

	kód. č.	Prut 1	Prut 2	S	Reakce	
a	0	-5,00		0,00	R_{ax}	-5,00
	0	-1,86		0,00	R_{az}	-1,86
	0	0,00		0,00	-	0,00
b	1	5,00	-5,00	0,00	-	0,00
	0	-7,14	-5,32	0,00	R_{bz}	-12,46
	2	-7,92	5,92	-2,00	-	0,00
c	3		0,00	0,00	-	0,00
	0		-7,34	0,00	R_{cz}	-7,34
	0		0,00	0,00	-	0,00

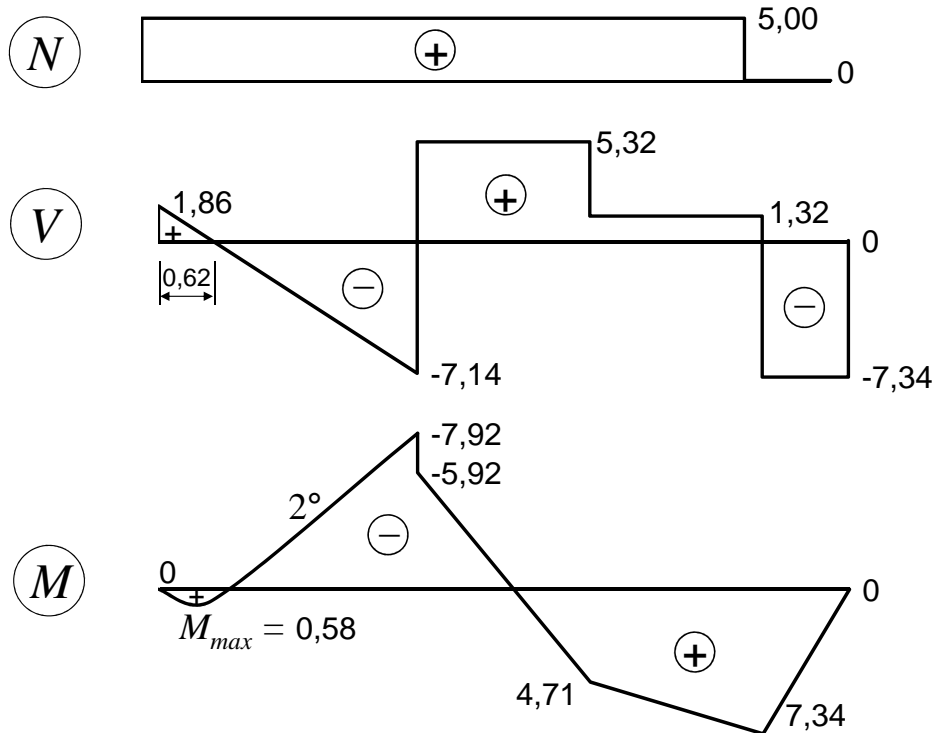
$$R_{ax} = 5,0 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{az} = 1,86 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{bz} = 12,46 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{cz} = 7,34 \text{ kN} (\uparrow)$$

Tabulka 1.22: Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb

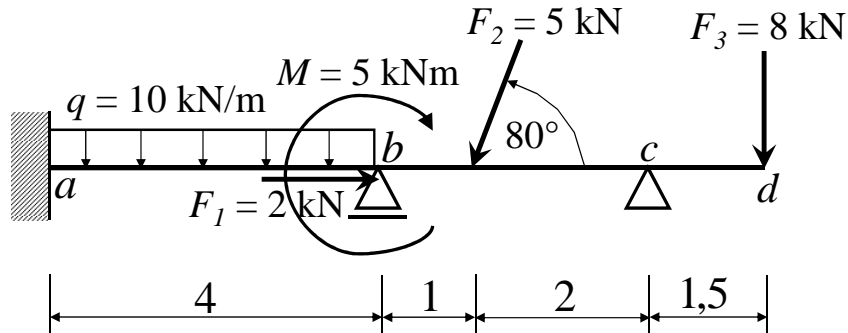


Obrázek 1.50: Vykreslení vnitřních sil pro příklad 2

1.5.3 Příklad 3

Zadání

Vyřešte pomocí ODM spojitý nosník uvedený na obr. 1.51.



$$l_1 = 4 \text{ m}$$

$$l_2 = 3 \text{ m}$$

$$A = \text{konst.} = 0,12 \text{ m}^2$$

$$I = \text{konst.} = 0,0016 \text{ m}^4$$

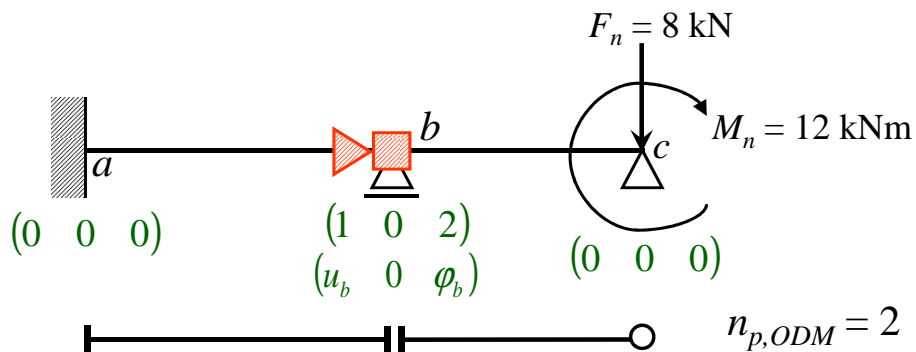
$$E = \text{konst.} = 20 \text{ GPa}$$

Obrázek 1.51: Spojitý nosník

Řešení

1. způsob řešení ... $n_p = 2$

- volný konec nahradíme $F_n = 8 \text{ kN}$ a $M_n = 8 \cdot 1,5 = 12 \text{ kNm}$ ve styčnicku c
- sílu F_n a moment M_n musíme zadat jako zatížení na konci prutu 2 (prut bc)



Obrázek 1.52: 1. výpočtový model pro příklad 3

0,00	0,58
-20,00	1,81
13,33	-3,26
0,00	0,29
-20,00	-14,73
-13,33	0,00

Tabulka 1.23: Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2

600000	0	0	-600000	0	0
0	6000	-12000	0	-6000	-12000
0	-12000	32000	0	12000	16000
-600000	0	0	600000	0	0
0	-6000	12000	0	6000	12000
0	-12000	16000	0	12000	32000

Tabulka 1.24: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1

800000	0	0	-800000	0	0
0	3555,556	-10666,7	0	-3555,56	0
0	-10666,7	32000	0	10666,67	0
-800000	0	0	800000	0	0
0	-3555,56	10666,67	0	3555,556	0
0	0	0	0	0	0

Tabulka 1.25: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2

Kód.č.	S
0	0,0
0	0,0
0	0,0
1	2,0
0	0,0
2	-5,0
0	0,0
0	0,0
0	0,0

Tabulka 1.26: Vektor styčnickového zatížení S

1400000	0
0	64000

Tabulka 1.27: Matice tuhosti soustavy \mathbf{K}

$\bar{\mathbf{R}}$	\mathbf{S}	$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}$
0,58	2,00	1,42
-16,60	-5,00	11,60

Tabulka 1.28: Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \{u_b \quad \varphi_b\}^T \quad \begin{array}{|c|} \hline 0,000001 \\ \hline 0,000181 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1.29: Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}

0,000000	0,000001
0,000000	0,000000
0,000000	0,000181
0,000001	0,000000
0,000000	0,000000
0,000181	0,000000

Tabulka 1.30: Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2

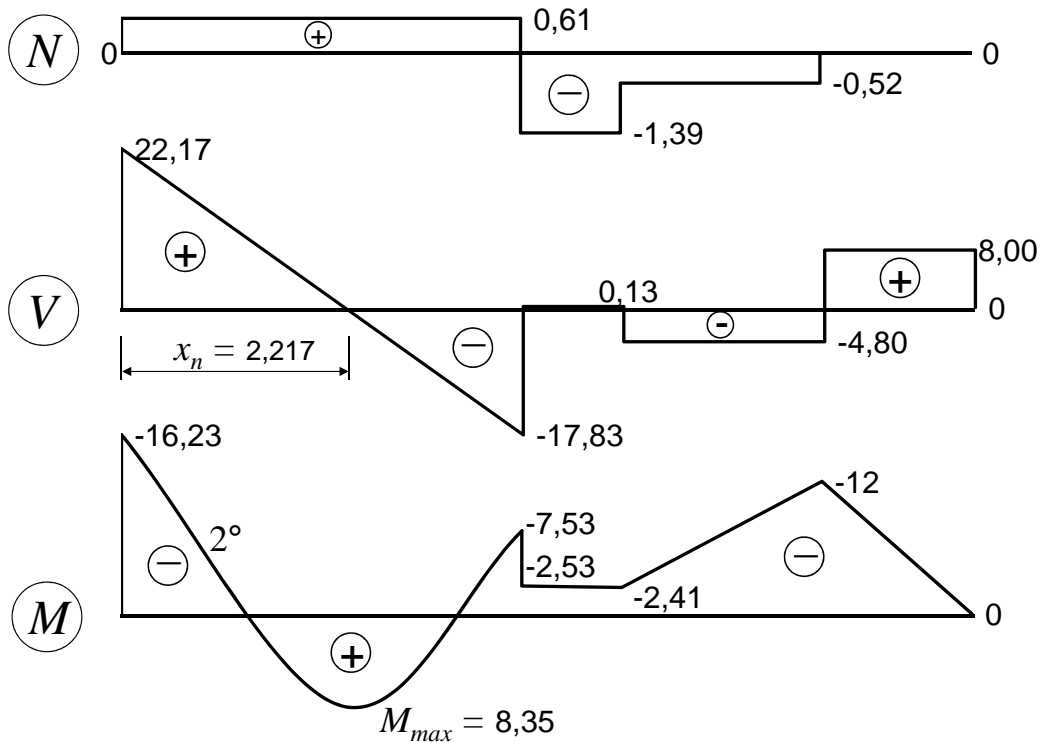
-0,61	1,39
-22,17	-0,13
16,23	2,53
0,61	-0,52
-17,83	-12,80
-7,53	0,00

Tabulka 1.31: Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2

	kód. č.	Prut 1	Prut 2	S	Reakce	
a	0	-0,61		0,00	R_{ax}	-0,61
	0	-22,17		0,00	R_{az}	-22,17
	0	16,23		0,00	M_a	16,23
b	1	0,61	1,39	2,00	-	0,00
	0	-17,83	-0,13	0,00	R_{bz}	-17,95
	2	-7,53	2,53	-5,00	-	0,00
c	0		-0,52	0,00	R_{cx}	-0,52
	0		-12,80	0,00	R_{cz}	-12,80
	0		0,00	0,00	-	0,00

$$\begin{aligned}
 R_{ax} &= 0,61 \text{ kN} (\leftarrow) & R_{bz} &= 17,95 \text{ kN} (\uparrow) \\
 R_{az} &= 22,17 \text{ kN} (\uparrow) & R_{cx} &= 0,52 \text{ kN} (\leftarrow) \\
 M_a &= 16,23 \text{ kNm} & R_{cz} &= 12,80 \text{ kN} (\uparrow)
 \end{aligned}$$

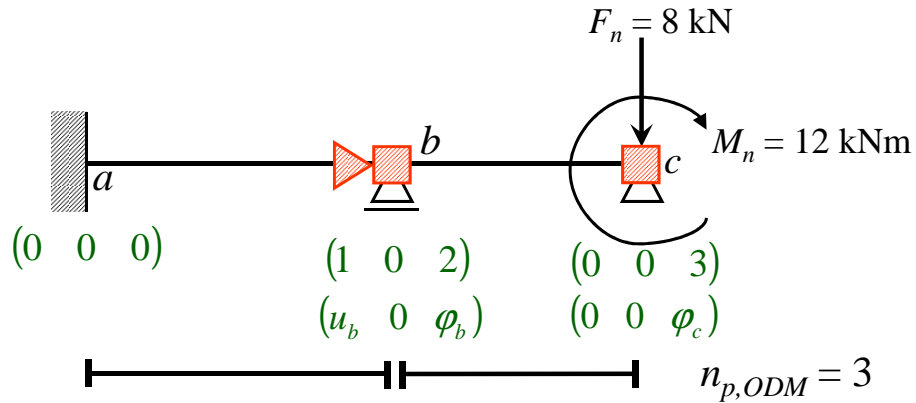
Tabulka 1.32: Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb



Obrázek 1.53: Vykreslení vnitřních sil pro příklad 3

2. způsob řešení

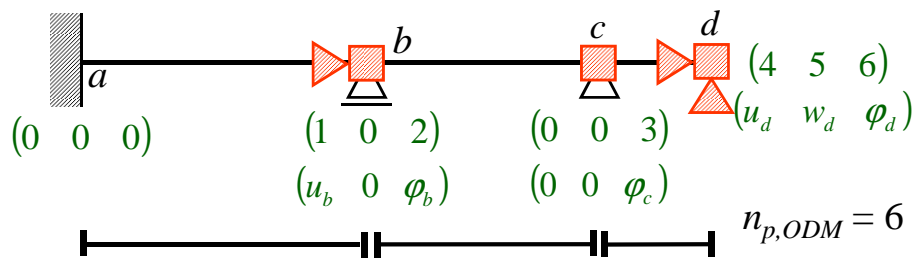
- $n_p = 3$ (počítáme pootočení ve styčnicku c)
- volný konec nahradíme opět silou $F_n = 8$ kN a momentem $M_n = 8 \cdot 1,5 = 12$ kNm ve styčnicku c
- sílu F_n a moment M_n můžeme zadat jako styčnickové zatížení ve styčnicku c



Obrázek 1.54: 2. výpočtový model pro příklad 3

3. způsob řešení

- $n_p = 6$ (počítáme i posunutí a pootočení volného konce)
- oproti předcházejícím způsobům řešení máme místo dvou prutů tři pruty

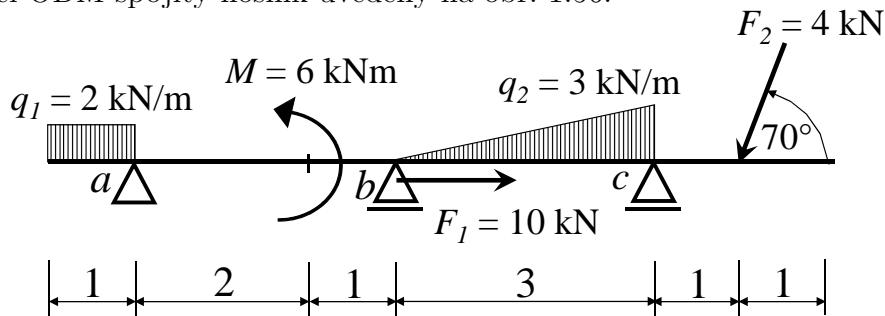


Obrázek 1.55: 3. výpočtový model pro příklad 3

1.5.4 Příklad 4

Zadání

Vyřešte pomocí ODM spojité nosník uvedený na obr. 1.56.



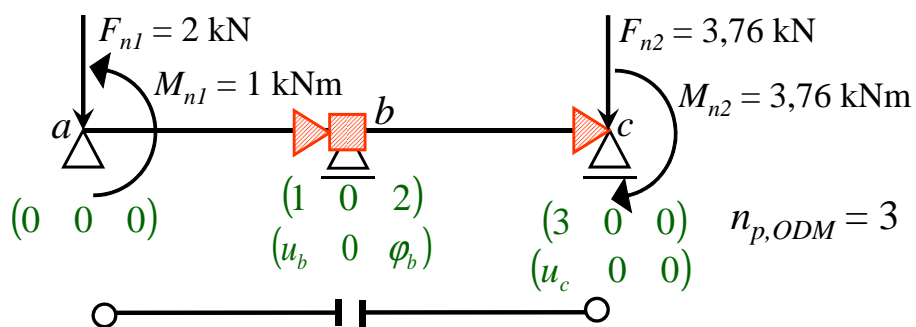
$$A_I = \text{konst.} = 0,16 \text{ m}^2$$

$$I_I = \text{konst.} = 0,0024 \text{ m}^4$$

$$E_I = \text{konst.} = 23 \text{ GPa}$$

Obrázek 1.56: Spojitý nosník

Řešení



Obrázek 1.57: Výpočtový model pro příklad 4

0,00	0,00
-4,17	-0,15
0,00	-0,30
0,00	1,37
2,17	-8,11
-0,50	0,00

Tabulka 1.33: Globální (lokální) primární vektory pro prut 1 a prut 2

1226666,7	0	0	-1226666,7	0	0
0	6133,333	0	0	-6133,333	-18400
0	0	0	0	0	0
-1226666,7	0	0	1226666,7	0	0
0	-6133,333	0	0	6133,333	18400
0	-18400	0	0	18400	55200

Tabulka 1.34: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 1

1226666,7	0	0	-1226666,7	0	0
0	6133,333	-18400	0	-6133,333	0
0	-18400	55200	0	18400	0
-1226666,7	0	0	1226666,7	0	0
0	-6133,333	18400	0	6133,333	0
0	0	0	0	0	0

Tabulka 1.35: Globální (lokální) matice tuhosti pro prut 2

Kód.č.	S
0	0,0
0	0,0
0	0,0
1	10,0
0	0,0
2	0,0
3	0,0
0	0,0
0	0,0

Tabulka 1.36: Vektor styčnickového zatížení **S**

2453333,3	0	-1226666,7
0	110400	0
-1226666,7	0	1226666,7

Tabulka 1.37: Matice tuhosti soustavy **K**

$\bar{\mathbf{R}}$	\mathbf{S}	$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}$
0,00	10,00	10,00
-0,80	0,00	0,80
1,37	0,00	-1,37

Tabulka 1.38: Zatěžovací vektor soustavy \mathbf{F}

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \{u_b \quad \varphi_b \quad u_c\}^T$$

0,0000070
0,0000073
0,0000059

Tabulka 1.39: Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}

0,0000000	0,0000070
0,0000000	0,0000000
0,0000000	0,0000073
0,0000070	0,0000059
0,0000000	0,0000000
0,0000073	0,0000000

Tabulka 1.40: Globální vektory deformací prutů \mathbf{r}_{ab} pro prut 1 a 2

-8,63	1,37
-0,13	-0,13
0,00	0,40
8,63	-1,37
0,13	0,13
0,40	0,00

Tabulka 1.41: Globální sekundární koncové síly prutů pro prut 1 a 2

-8,63	1,37
-4,30	-0,28
0,00	0,10
8,63	0,00
2,30	-7,98
-0,10	0,00

Tabulka 1.42: Globální celkové koncové síly prutů pro prut 1 a 2

	kód. č.	Prut 1	Prut 2	S	Reakce	
a	0	-8,63		0,00	R_{ax}	-8,63
	0	-4,30		0,00	R_{az}	-4,30
	0	0,00		0,00	-	0,00
b	1	8,63	1,37	10,00	-	0,00
	0	2,30	-0,28	0,00	R_{bz}	2,02
	2	-0,10	0,10	0,00	-	0,00
c	3		0,00	0,00	-	0,00
	0		-7,98	0,00	R_{cz}	-7,98
	0		0,00	0,00	-	0,00

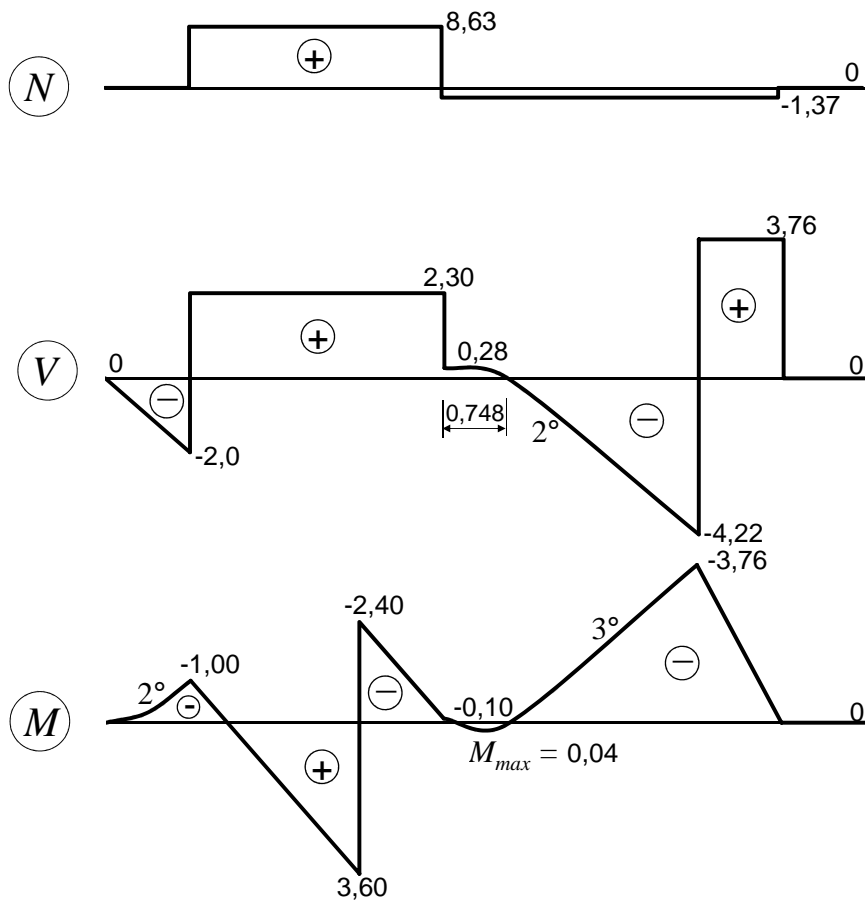
$$R_{ax} = 8,63 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{az} = 4,30 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{bz} = 2,02 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$R_{cz} = 7,98 \text{ kN} (\uparrow)$$

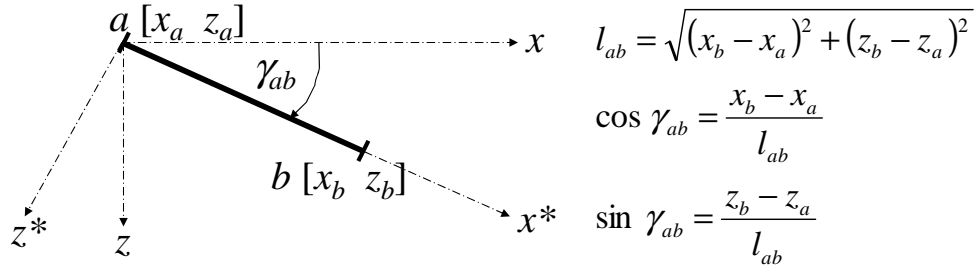
Tabulka 1.43: Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb



Obrázek 1.58: Vykreslení vnitřních sil pro příklad 4

1.6 Řešení rovinných rámu pomocí ODM

Při řešení rovinných rámu je nutné rozlišovat globální a lokální souřadný systém.



$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Globální primární vektor prutu:

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* \quad (1.29)$$

Globální matice tuhosti prutu:

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \quad (1.30)$$

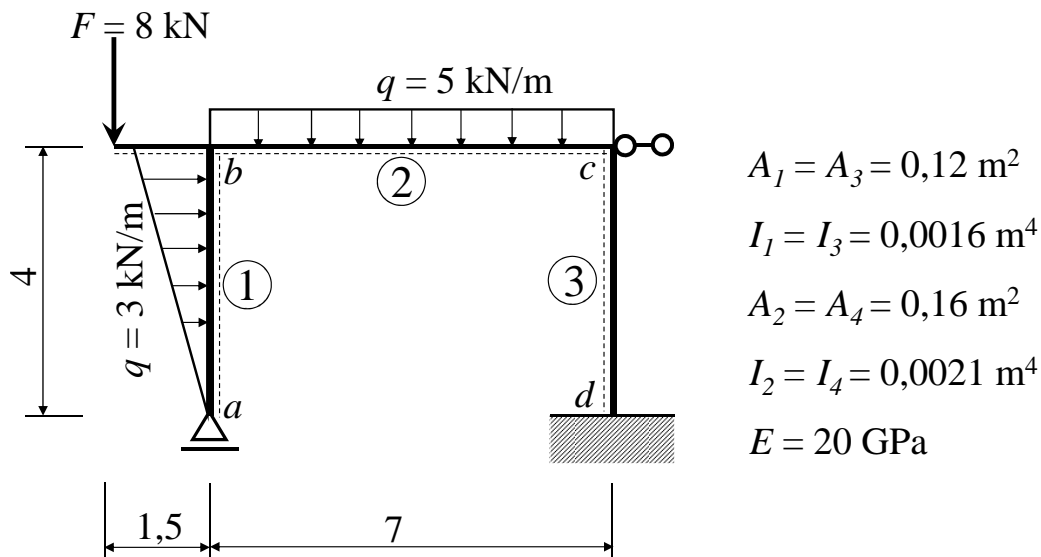
Lokální celkové koncové síly prutu:

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{R}_{ab} \quad (1.31)$$

1.6.1 Příklad 1

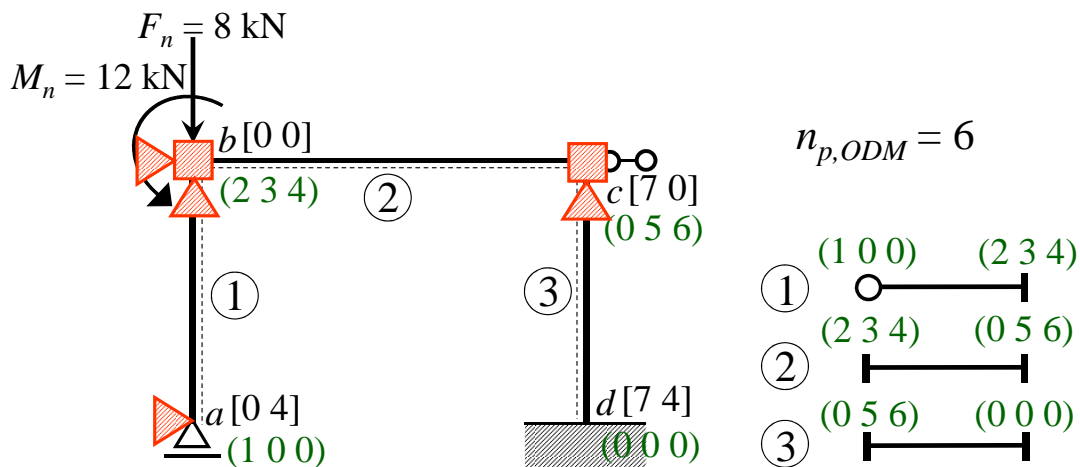
Zadání

Vyřešte pomocí ODM rámovou konstrukci uvedenou na obr. 1.59.



Obrázek 1.59: Rámová konstrukce

Řešení



Obrázek 1.60: Výpočtový model pro příklad 1

-1,20	0,00	0,00
0,00	-17,50	0,00
0,00	20,42	0,00
-4,80	0,00	0,00
0,00	-17,50	0,00
-3,20	-20,42	0,00

Tabulka 1.44: Globální primární vektory pro prut 1, prut 2 a prut 3

1500	0	0	-1500	0	-6000
0	600000	0	0	-600000	0
0	0	0	0	0	0
-1500	0	0	1500	0	6000
0	-600000	0	0	600000	0
-6000	0	0	6000	0	24000

Tabulka 1.45: Globální matice tuhosti pro prut 1

457143	0	0	-457143	0	0
0	1469,39	-5142,9	0	-1469,4	-5142,9
0	-5142,9	24000	0	5142,86	12000
-457143	0	0	457143	0	0
0	-1469,4	5142,86	0	1469,39	5142,86
0	-5142,9	12000	0	5142,86	24000

Tabulka 1.46: Globální matice tuhosti pro prut 2

6000	0	12000	-6000	0	12000
0	600000	0	0	-600000	0
12000	0	32000	-12000	0	16000
-6000	0	-12000	6000	0	-12000
0	-600000	0	0	600000	0
12000	0	16000	-12000	0	32000

Tabulka 1.47: Globální matice tuhosti pro prut 3

Kód.č.	S
1	0,0
0	0,0
0	0,0
2	0,0
3	8,0
4	12,0
0	0,0
5	0,0
6	0,0
0	0,0
0	0,0
0	0,0

Tabulka 1.48: Vektor styčnickového zatížení **S**

1500,0	-1500,0	0,0	-6000,0	0,0	0,0
-1500,0	458642,9	0,0	6000,0	0,0	0,0
0,0	0,0	601469,4	-5142,9	-1469,4	-5142,9
-6000,0	6000,0	-5142,9	48000,0	5142,9	12000,0
0,0	0,0	-1469,4	5142,9	601469,4	5142,9
0,0	0,0	-5142,9	12000,0	5142,9	56000,0

Tabulka 1.49: Matice tuhosti soustavy **K**

$\bar{\mathbf{R}}$	S	$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}$
-1,20	0,00	1,20
-4,80	0,00	4,80
-17,50	8,00	25,50
17,22	12,00	-5,22
-17,50	0,00	17,50
-20,42	0,00	20,42

Tabulka 1.50: Zatěžovací vektor soustavy **F**

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \\ w_c \\ \varphi_c \end{Bmatrix} = \begin{array}{|c|} \hline -0,000069 \\ \hline 0,000013 \\ \hline 0,000044 \\ \hline -0,000220 \\ \hline 0,000028 \\ \hline 0,000413 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1.51: Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}

-0,000069	0,000013	0,000000
0,000000	0,000044	0,000028
0,000000	-0,000220	0,000413
0,000013	0,000000	0,000000
0,000044	0,000028	0,000000
-0,000220	0,000413	0,000000

Tabulka 1.52: Globální vektory deformací \mathbf{r}_{ab} pro prut 1, prut 2 a prut 3

1,20	6,00	4,96
-26,47	-0,97	16,53
0,00	-0,42	13,23
-1,20	-6,00	-4,96
26,47	0,97	-16,53
-4,80	7,19	6,61

Tabulka 1.53: Globální sekundární koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3

0,00	6,00	4,96
-26,47	-18,47	16,53
0,00	20,00	13,23
-6,00	-6,00	-4,96
26,47	-16,53	-16,53
-8,00	-13,23	6,61

Tabulka 1.54: Globální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3

26,47	6,00	16,53
0,00	-18,47	-4,96
0,00	20,00	13,23
-26,47	-6,00	-16,53
-6,00	-16,53	4,96
-8,00	-13,23	6,61

Tabulka 1.55: Lokální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3

	kód.č.	Prut 1	Prut 2	Prut 3	S	Reakce	
a	1	0,00			0,00	-	0,00
	0	-26,47			0,00	R_{az}	-26,47
	0	0,00			0,00	-	0,00
b	2	-6,00	6,00		0,00	-	0,00
	3	26,47	-18,47		8,00	-	0,00
	4	-8,00	20,00		12,00	-	0,00
c	0		-6,00	4,96	0,00	R_{cx}	-1,04
	5		-16,53	16,53	0,00	-	0,00
	6		-13,23	13,23	0,00	-	0,00
d	0			-4,96	0,00	R_{dx}	-4,96
	0			-16,53	0,00	R_{dz}	-16,53
	0			6,61	0,00	M_d	6,61

$$R_{az} = 26,47 \text{ kN } (\uparrow)$$

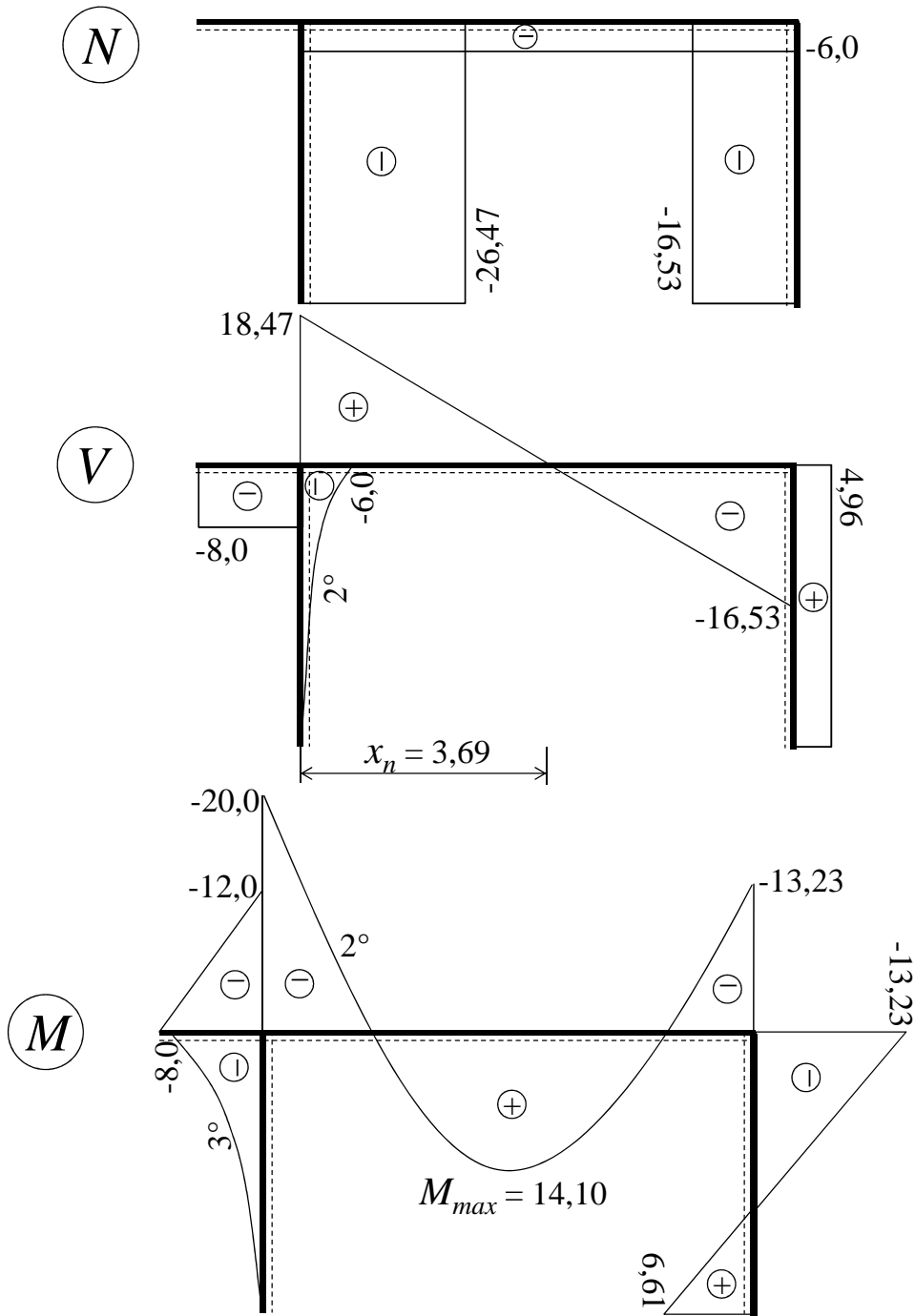
$$R_{cx} = 1,04 \text{ kN } (\leftarrow)$$

$$R_{dx} = 4,96 \text{ kN } (\leftarrow)$$

$$R_{dz} = 16,53 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$M_d = 6,61 \text{ kNm}$$

Tabulka 1.56: Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb

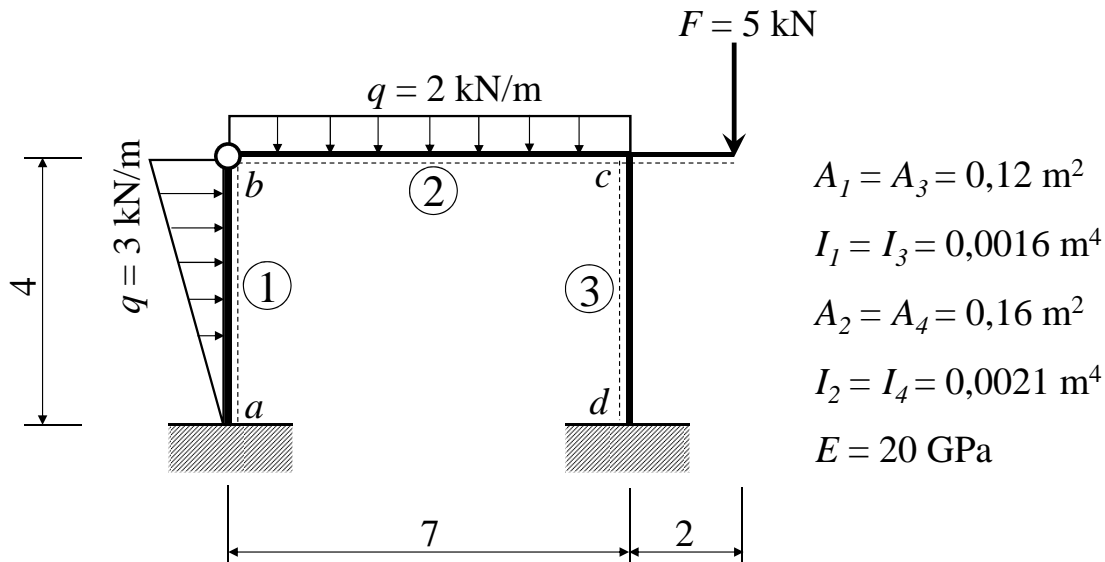


Obrázek 1.61: Vykreslení vnitřních sil pro příklad 1

1.6.2 Příklad 2

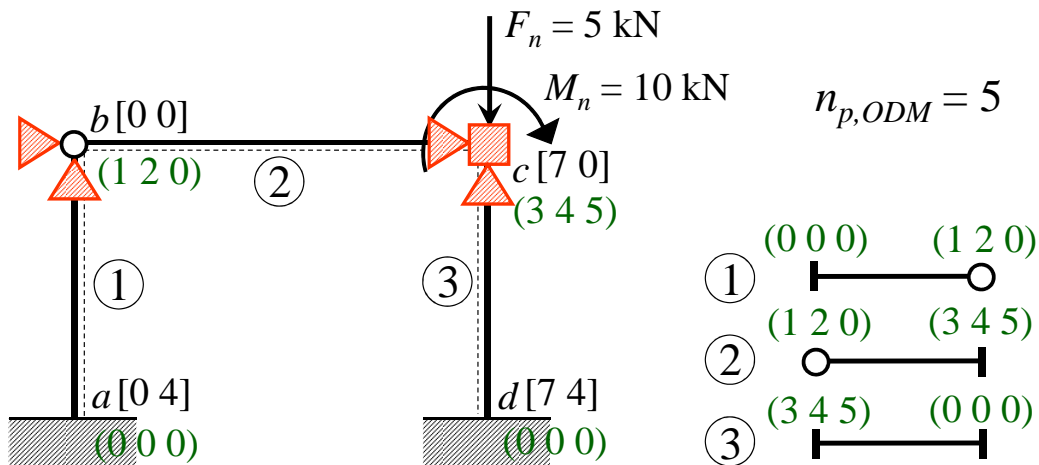
Zadání

Řešte pomocí ODM pravoúhlý rovinný rám uvedený na obr. 1.62.



Obrázek 1.62: Rovinný rám

Řešení



Obrázek 1.63: Výpočtový model pro příklad 2

-2,70	0,00	0,00
0,00	-5,25	0,00
2,80	0,00	0,00
-3,30	0,00	0,00
0,00	-8,75	0,00
0,00	-12,25	0,00

Tabulka 1.57: Globální primární vektory pro prut 1, prut 2 a prut 3

1500	0	-6000	-1500	0	0
0	600000	0	0	-600000	0
-6000	0	24000	6000	0	0
-1500	0	6000	1500	0	0
0	-600000	0	0	600000	0
0	0	0	0	0	0

Tabulka 1.58: Globální matice tuhosti pro prut 1

457143	0	0	-457143	0	0
0	367,347	0	0	-367,35	-2571,4
0	0	0	0	0	0
-457143	0	0	457143	0	0
0	-367,35	0	0	367,347	2571,43
0	-2571,4	0	0	2571,43	18000

Tabulka 1.59: Globální matice tuhosti pro prut 2

6000	0	12000	-6000	0	12000
0	600000	0	0	-600000	0
12000	0	32000	-12000	0	16000
-6000	0	-12000	6000	0	-12000
0	-600000	0	0	600000	0
12000	0	16000	-12000	0	32000

Tabulka 1.60: Globální matice tuhosti pro prut 3

Kód.č.	S
0	0,0
0	0,0
0	0,0
1	0,0
2	0,0
0	0,0
3	0,0
4	5,0
5	-10,0
0	0,0
0	0,0
0	0,0

Tabulka 1.61: Vektor styčnickového zatížení **S**

458642,9	0,0	-457142,9	0,0	0,0
0,0	600367,3	0,0	-367,3	-2571,4
-457142,9	0,0	463142,9	0,0	12000,0
0,0	-367,3	0,0	600367,3	2571,4
0,0	-2571,4	12000,0	2571,4	50000,0

Tabulka 1.62: Matice tuhosti soustavy **K**

$\bar{\mathbf{R}}$	S	$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}}$
-3,30	0,00	3,30
-5,25	0,00	5,25
0,00	0,00	0,00
-8,75	5,00	13,75
-12,25	-10,00	2,25

Tabulka 1.63: Zatěžovací vektor soustavy **F**

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ u_c \\ w_c \\ \varphi_c \end{Bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline 0,000603 \\ \hline 0,000008 \\ \hline 0,000598 \\ \hline 0,000023 \\ \hline -0,000099 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1.64: Řešení soustavy rovnic, globální vektor deformací \mathbf{r}

0,000000	0,000603	0,000598
0,000000	0,000008	0,000023
0,000000	0,000000	-0,000099
0,000603	0,000598	0,000000
0,000008	0,000023	0,000000
0,000000	-0,000099	0,000000

Tabulka 1.65: Globální vektory deformací \mathbf{r}_{ab} pro prut 1, prut 2 a prut 3

-0,90	2,40	2,40
-5,00	0,25	14,00
3,62	0,00	4,00
0,90	-2,40	-2,40
5,00	-0,25	-14,00
0,00	-1,75	5,58

Tabulka 1.66: Globální sekundární koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3

-3,60	2,40	2,40
-5,00	-5,00	14,00
6,42	0,00	4,00
-2,40	-2,40	-2,40
5,00	-9,00	-14,00
0,00	-14,00	5,58

Tabulka 1.67: Globální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3

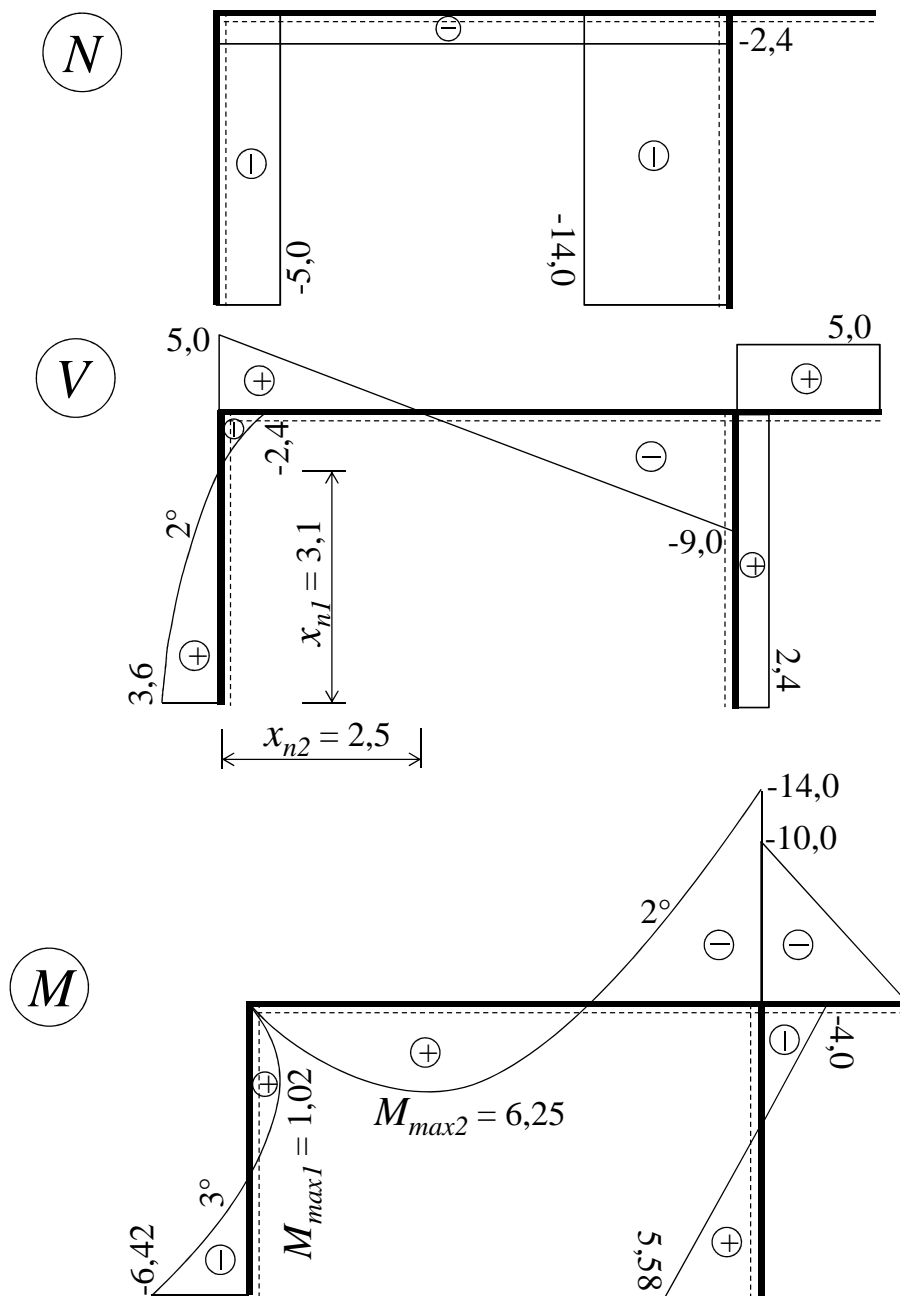
5,00	2,40	14,00
-3,60	-5,00	-2,40
6,42	0,00	4,00
-5,00	-2,40	-14,00
-2,40	-9,00	2,40
0,00	-14,00	5,58

Tabulka 1.68: Lokální celkové koncové síly pro prut 1, prut 2 a prut 3

	kód.č.	Prut 1	Prut 2	Prut 3	S	Reakce	
a	0	-3,60			0,00	R_{ax}	-3,60
	0	-5,00			0,00	R_{az}	-5,00
	0	6,42			0,00	M_a	6,42
b	1	-2,40	2,40		0,00	-	0,00
	2	5,00	-5,00		0,00	-	0,00
	0	0,00	0,00		0,00	-	0,00
c	3		-2,40	2,40	0,00	-	0,00
	4		-9,00	14,00	5,00	-	0,00
	5		-14,00	4,00	-10,00	-	0,00
d	0			-2,40	0,00	R_{dx}	-2,40
	0			-14,00	0,00	R_{dz}	-14,00
	0			5,58	0,00	M_d	5,58

$R_{ax} = 3,60 \text{ kN} (\leftarrow)$
 $R_{az} = 5,0 \text{ kN} (\uparrow)$
 $M_a = 6,42 \text{ kNm}$
 $R_{dx} = 2,40 \text{ kN} (\leftarrow)$
 $R_{dz} = 14,0 \text{ kN} (\uparrow)$
 $M_d = 5,58 \text{ kNm}$

Tabulka 1.69: Dokončení řešení, určení reakcí vnějších vazeb



Obrázek 1.64: Vykreslení vnitřních sil pro příklad 2

1.7 Řešení rovinných příhradových konstrukcí pomocí ODM

Příhrady je možno řešit obdobným způsobem jako rámy s tím, že se zavedou vhodné okrajové podmínky odpovídající hledání neznámých posunů ve styčnicích (viz [1] na str. 319). S výhodou je ovšem možné výpočetní rozsah úlohy redukovat pouze na hledání neznámých posunů, a to formou redukce matice tuhosti \mathbf{k}_{ab} a transformační matice \mathbf{T}_{ab} . Postup využívající redukci úlohy je aplikován dále.

Analýza prutu

- zatížení působí jen ve styčnicích, pro jednotlivé pruty tedy nemusíme sestavovat vektory primárních koncových sil
- lokální matici tuhosti prutu lze zapsat jako matici 2. řádu (všechny pruty uvažujeme oboustranně kloubově uložené)

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

- transformací získáme globální matici tuhosti 4. řádu

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Analýza prutové soustavy

- matici tuhosti soustavy \mathbf{K} získáme lokalizací globálních matic tuhostí jednotlivých prutů
- zatěžovací vektor je roven globálnímu vektoru styčnickového zatížení $\mathbf{F} = \mathbf{S}$

Řešení soustavy rovnic

- globální vektor deformací

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (1.36)$$

Dokončení řešení

- globální vektor deformací jednotlivých prutů

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a \quad w_a \quad u_b \quad w_b\}^T \quad (1.37)$$

- globální koncové síly jednotlivých prutů

$$\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{k}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} \quad (1.38)$$

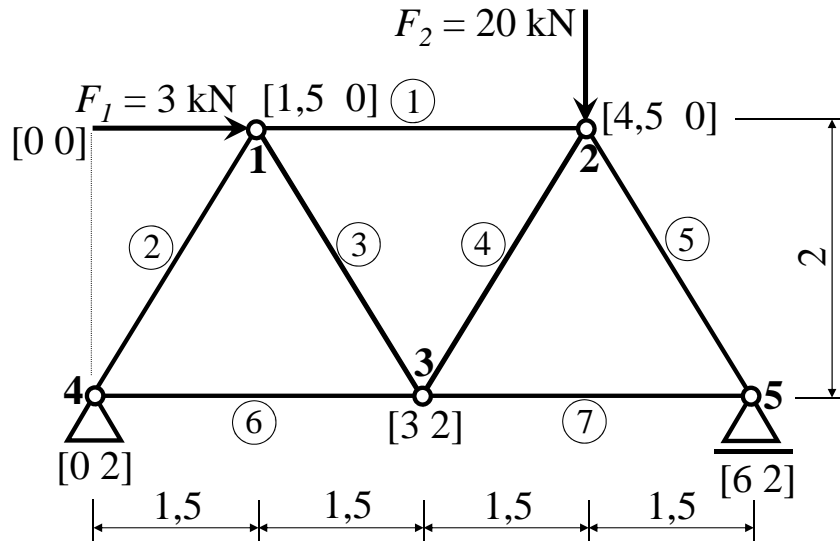
- lokální koncové síly jednotlivých prutů

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} X_{ab}^* \\ X_{ba}^* \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{ab} \cdot \mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

1.7.1 Příklad

Zadání

Pomocí ODM určete u příhradové konstrukce uvedené na obr. 1.65 normálové síly ve všech prutech.



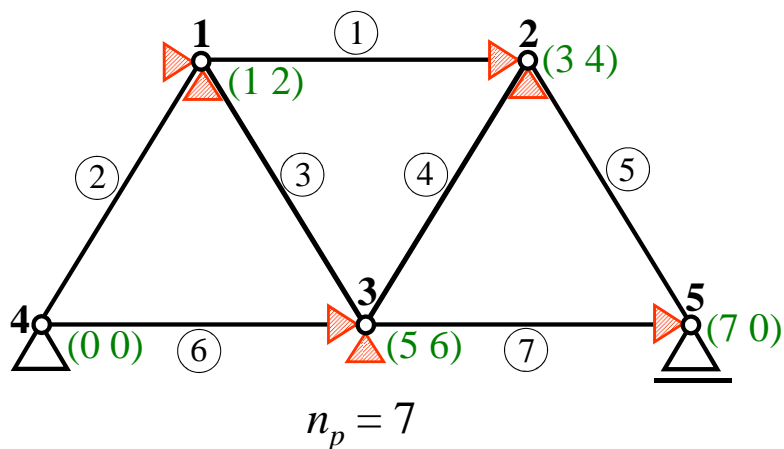
$$A_1 = A_6 = A_7 = 0,0015 \text{ m}^2$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0,00125 \text{ m}^2$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

Obrázek 1.65: Příhradová konstrukce

Řešení



Obrázek 1.66: Výpočtový model příhradové konstrukce

100000	0	-100000	0
0	0	0	0
-100000	0	100000	0
0	0	0	0

Tabulka 1.70: Globální matice tuhosti pro vodorovné pruty 1, 6, 7

36000	-48000	-36000	48000
-48000	64000	48000	-64000
-36000	48000	36000	-48000
48000	-64000	-48000	64000

Tabulka 1.71: Globální matice tuhosti pro šikmé pruty 2, 4

36000	48000	-36000	-48000
48000	64000	-48000	-64000
-36000	-48000	36000	48000
-48000	-64000	48000	64000

Tabulka 1.72: Globální matice tuhosti pro šikmé pruty 3, 5

Kód.č.	S
1	3
2	0
3	0
4	20
5	0
6	0
0	0
0	0
7	0
0	0

Tabulka 1.73: Globální vektor styčnickového zatížení **S**

172000	0	-100000	0	-36000	-48000	0
0	128000	0	0	-48000	-64000	0
-100000	0	172000	0	-36000	48000	-36000
0	0	0	128000	48000	-64000	-48000
-36000	-48000	-36000	48000	272000	0	-100000
-48000	-64000	48000	-64000	0	128000	0
0	0	-36000	-48000	-100000	0	136000

Tabulka 1.74: Celková matice tuhosti soustavy **K**

0,000141
0,000168
0,000051
0,000347
0,000060
0,000291
0,000180

Tabulka 1.75: Globální vektor deformací **r**

Prut 1	Prut 2	Prut 3	Prut 4	Prut 5	Prut 6	Prut 7
0,000141	0	0,000141	0,000060	0,000051	0	0,000060
0,000168	0	0,000168	0,000291	0,000347	0	0,000291
0,000051	0,000141	0,000060	0,000051	0,000180	0,000060	0,000180
0,000347	0,000168	0,000291	0,000347	0	0,000291	0

Tabulka 1.76: Globální vektory deformací jednotlivých prutů

Prut 1	Prut 2	Prut 3	Prut 4	Prut 5	Prut 6	Prut 7
9,0	3,0	-3,0	3,0	12,0	-6,0	-12,0
0,0	-4,0	-4,0	-4,0	16,0	0,0	0,0
-9,0	-3,0	3,0	-3,0	-12,0	6,0	12,0
0,0	4,0	4,0	4,0	-16,0	0,0	0,0

Tabulka 1.77: Globální koncové síly jednotlivých prutů

Prut 1	Prut 2	Prut 3	Prut 4	Prut 5	Prut 6	Prut 7
9,0	5,0	-5,0	5,0	20,0	-6,0	-12,0
-9,0	-5,0	5,0	-5,0	-20,0	6,0	12,0

Tabulka 1.78: Lokální koncové síly jednotlivých prutů

Reakce vnějších vazeb:

$$R_{4x} = 3,0 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{4z} = 4,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{5z} = 16,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Prut	N [kN]	tah/tlak
1	-9,0	tlak
2	-5,0	tlak
3	5,0	tah
4	-5,0	tlak
5	-20,0	tlak
6	6,0	tah
7	12,0	tah

Tabulka 1.79: Tabulka normálových sil

1.8 Testové otázky a odpovědi

Otázky

1. Obecná deformační metoda je metoda
 - a) přímá, výsledkem řešení jsou silové veličiny.
 - b) nepřímá, řeší nejprve deformační stav konstrukce a z něj odvozuje statický stav.
 - c) nepřímá, řeší nejprve silový stav konstrukce a z něj odvozuje deformační stav.
 - d) přímá, výsledkem řešení jsou deformační veličiny.
2. V deformační metodě sestavujeme
 - a) deformační podmínky, jejich počet je dán stupněm přetvárné neurčitosti.
 - b) statické podmínky rovnováhy, jejich počet je dán stupněm statické neurčitosti.
 - c) statické podmínky rovnováhy, jejich počet je dán stupněm přetvárné neurčitosti.
 - d) deformační podmínky, jejich počet je dán stupněm statické neurčitosti.
3. Cílem analýzy prutu při řešení ODM je určení
 - a) globálního vektoru primárních koncových sil a globální matice tuhosti prutu.
 - b) globálního vektoru koncových sil prutu.
 - c) primárního vektoru soustavy a matice tuhosti soustavy
 - d) lokálního vektoru koncových sil prutu.
4. Při řešení spojitého nosníku pomocí ODM musíme určit
 - a) pouze natočení krajních podporových bodů.
 - b) všechna natočení podporových bodů.
 - c) pouze natočení vnitřních podporových bodů, v krajních podporových bodech jsou natočení nulová.
 - d) natočení vnitřních podporových bodů, natočení krajních podporových bodů pro řešení nepotřebujeme.
5. Při řešení rovinných rámců pomocí ODM
 - a) analýzu prutové soustavy můžeme provádět v lokálním souřadném systému.
 - b) analýzu jednotlivých prutů můžeme provádět v lokálním souřadném systému.
 - c) analýzu prutové soustavy musíme provádět v lokálním souřadném systému.
 - d) analýzu jednotlivých prutů nelze provádět v lokálním souřadném systému.
6. Při řešení rovinných příhradových konstrukcí pomocí ODM
 - a) globální matici tuhosti prutu lze zapsat jako matici 2. řádu.
 - b) globální matici tuhosti prutu musíme zapsat jako matici 6. řádu.
 - c) lokální matici tuhosti prutu musíme zapsat jako matici 4. řádu.
 - d) lokální matici tuhosti prutu lze zapsat jako matici 2. řádu.

Odpovědi

1.b) 2.c) 3.a) 4.d) 5.b) 6.d)

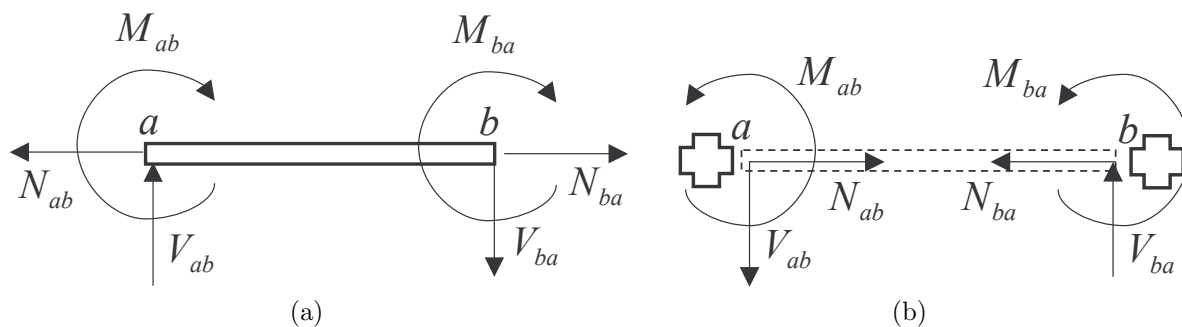
Kapitola 2

Zjednodušená deformační metoda

Předpoklady řešení pomocí zjednodušené deformační metody (dále ZDM)

- Přetvoření prutu vyvoláno jen ohybovými momenty M .
- Zanedbáváme vliv normálových sil N i posouvajících sil V na deformaci prutu \implies změna délky $\Delta l = 0$.

Znaménková konvence



Obrázek 2.1: Akce styčnicků na konce prutu (a), akce konců prutu na styčnický (b)

2.1 Postup řešení pomocí ZDM

2.1.1 Stupeň přetvárné neurčitosti $n_{p,ZDM}$

Určení stupně přetvárné neurčitosti pomocí fiktivních vazeb:

- ▣ ... momentová (brání pootočení)
- ▣ ... silová (brání svislému posunu)
- ▣ ... silová (brání horizontálnímu posunu)

2.1.2 Poměrná tuhost prutu k_{ab}

- Oboustranně monoliticky uložený prut:

$$k_{ab} = \frac{I_{ab}}{l_{ab}} c \quad (2.1)$$

- Jednostranně kloubově uložený prut:

$$k_{ab} = \frac{3}{4} \frac{I_{ab}}{l_{ab}} c \quad (2.2)$$

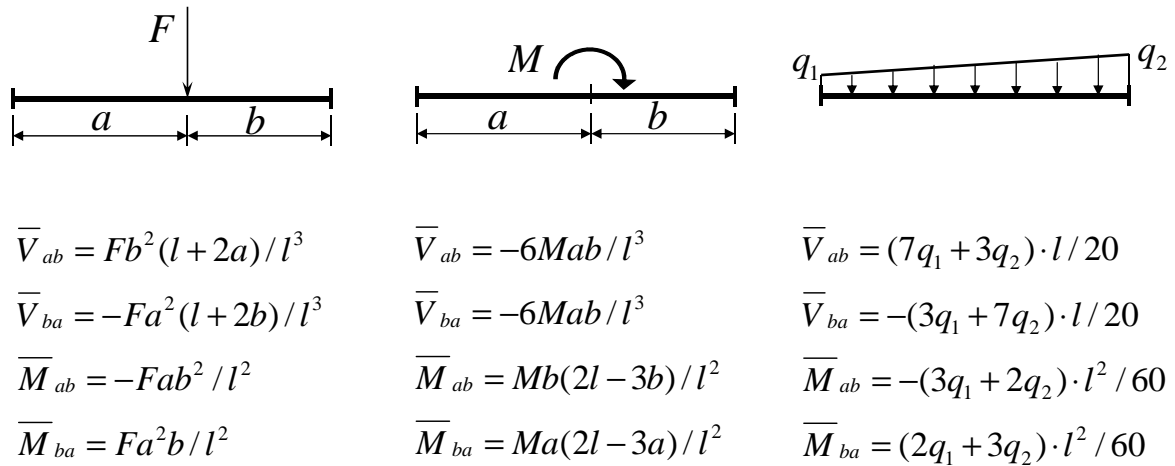
I_{ab} ... moment setrvačnosti průřezu

l_{ab} ... délka prutu

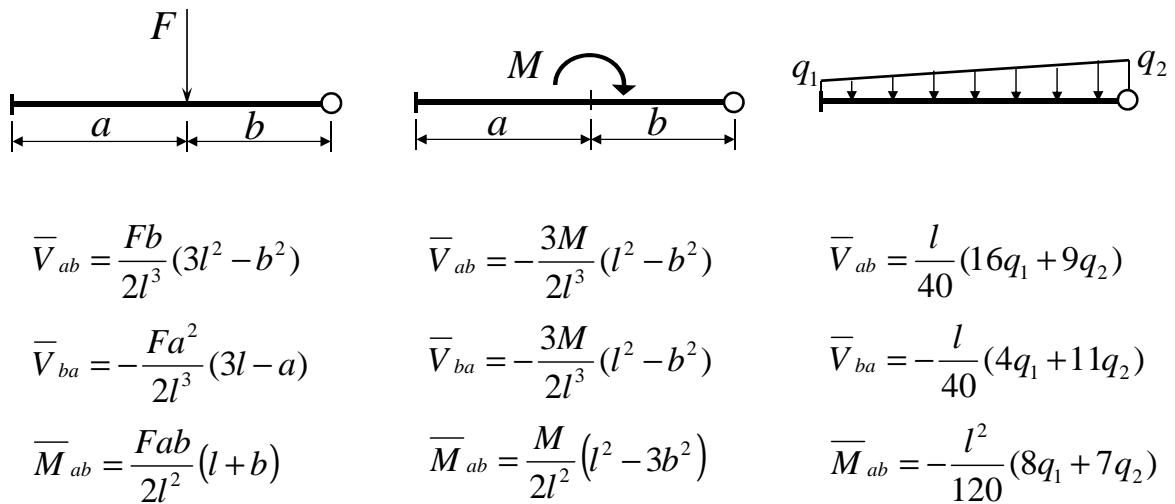
c ... vhodně zvolená konstanta (např. $c = 10^4$)

2.1.3 Primární momenty a posouvající síly

Pro výpočty primárních koncových sil obvykle využíváme předem odvozených vztahů. Vztahy pro základní druhy zatížení a primární koncové síly (momenty a posouvající síly) jsou uvedeny na obr. 2.2 a 2.3 na str. 71. Pro složitější druhy zatížení je možno užít tab. 14.10 a 14.11 na str. 416-420 [1].



Obrázek 2.2: Primární momenty a posouvající síly pro oboustranně monoliticky připojený prut



Obrázek 2.3: Primární momenty a posouvající síly pro jednostranně kloubově připojený prut

2.1.4 Sekundární momenty a posouvající síly

- Oboustranně monoliticky uložený prut:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{ab} &= k_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) \\
 \hat{V}_{ab} &= -\frac{k_{ab}}{l_{ab}}(3\varphi_a + 3\varphi_b - 6\psi_{ab})
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

- Jednostranně kloubově uložený prut:

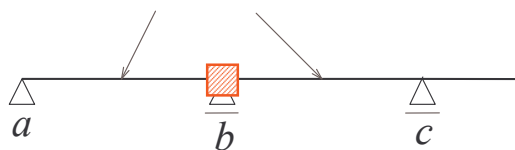
$$\begin{aligned}\hat{M}_{ab} &= k_{ab}(2\varphi_a - 2\psi_{ab}) \\ \hat{V}_{ab} &= -\frac{k_{ab}}{l_{ab}}(2\varphi_a - 2\psi_{ab})\end{aligned}\tag{2.4}$$

$\varphi_a, \varphi_b \dots$ natočení styčnicků a, b

$\Psi_{ab} \dots$ natočení prutu ab

2.1.5 Styčnicková rovnice

Vyjadřuje momentové podmínky rovnováhy.



Obrázek 2.4: Schéma spojitého nosníku s jednou neznámou φ_b

Příklad styčnickové rovnice pro spojitý nosník na obr. 2.5:

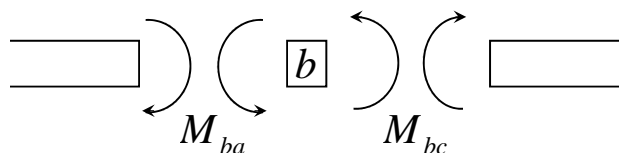
$$\sum M_{bi} = 0$$

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$

$$\overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} + \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = 0$$

$$\hat{M}_{ba} + \hat{M}_{bc} = -(\overline{M}_{ba} + \overline{M}_{bc})$$

Schématické zobrazení momentových interakcí ve styčnicku b je uvedeno na obr. 2.5.

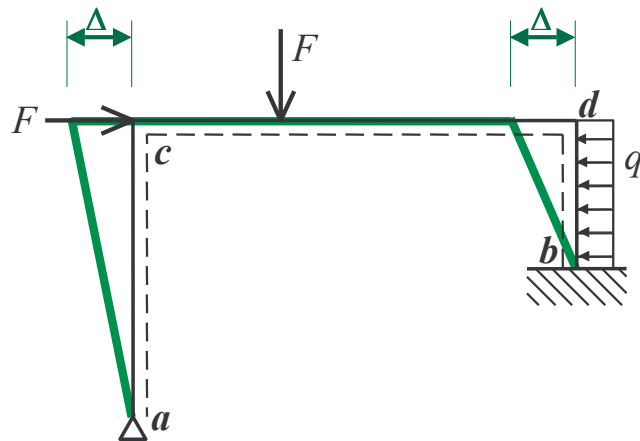


Obrázek 2.5: Momentová interakce ve styčnicku b

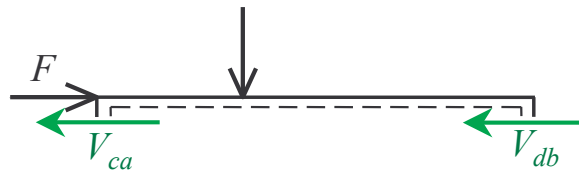
2.1.6 Patrová rovnice

Vyjadřuje silovou podmínku rovnováhy ve směru nezávislého posunu na uvolněné části rámu (nosníku), odděleného patrovým řezem, obsahující styčnický se stejným posunem Δ .

Patrová rovnice se sestavuje pro rámy (nosníky) s posuvnými styčnickými (při sestavování základní deformačně určité soustavy vloženy fiktivní silové vazby).



Obrázek 2.6: Schéma vodorovného posunu rámu Δ



Obrázek 2.7: Schéma silové interakce na uvolněné rámové příčli

Příklad styčnickové rovnice pro rovinný rám na obr. 2.6:

$$\sum F_{ix} = 0: V_{ca} + V_{db} - F = 0$$

$$\hat{V}_{ca} + \hat{V}_{db} = F - (\bar{V}_{ca} + \bar{V}_{db})$$

2.1.7 Řešení soustavy rovnic

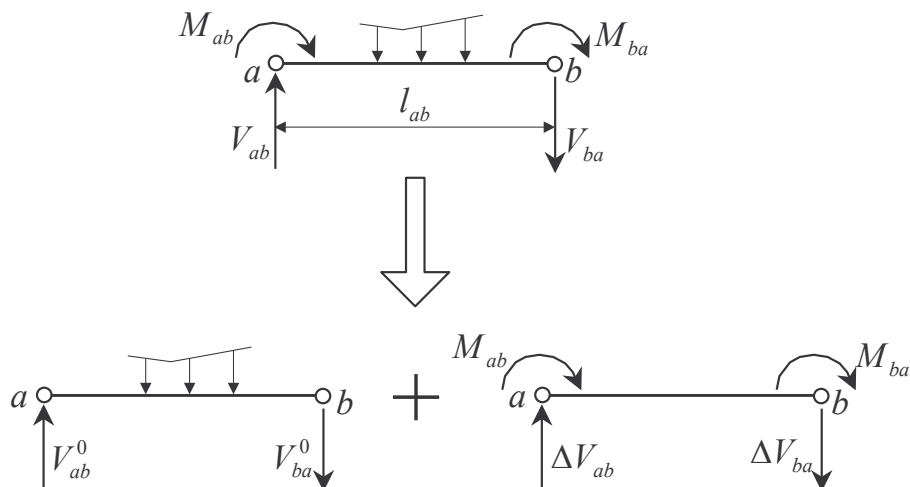
Sestavením styčnickových a patrových rovnic získáme soustavu $n_{p,ZDM}$ rovnic. Jejich řešením pak $n_{p,ZDM}$ neznámých parametrů deformace.

2.1.8 Koncové momenty

Hodnotu koncového momentu získáme sečtením příslušného primárního a sekundárního momentu.

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \hat{M}_{ab}$$

2.1.9 Posouvající síly



Obrázek 2.8: Superpozice posouvajících sil od vnějšího zatížení (V_{ab0}, V_{ba0}) a od koncových momentů ($\Delta V_{ab}, \Delta V_{ba}$)

$$V_{ab} = \bar{V}_{ab} + \hat{V}_{ab} = V_{ab}^0 - \frac{\bar{M}_{ab} + \bar{M}_{ba}}{l_{ab}} - \frac{\hat{M}_{ab} + \hat{M}_{ba}}{l_{ab}}$$

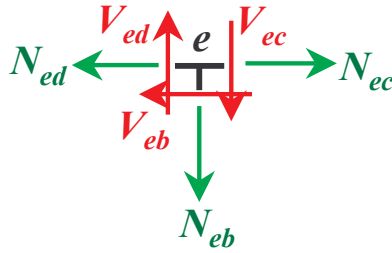
$$V_{ab} = V_{ab}^0 - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}} = V_{ab}^0 - \Delta V_{ab}$$

V_{ab0} ... posouvající síla na konci a prostého nosníku od daného vnějšího zatížení

V_{ba0} ... posouvající síla na konci b prostého nosníku od daného vnějšího zatížení

2.1.10 Normálové síly

Normálové síly v koncových průřezích prutů se řeší ze statických podmínek rovnováhy.



Obrázek 2.9: Silová interakce ve styčnicku e pro rám na obr. 2.30

Příklad určení normálových sil dle obr. 2.9:

$$\sum F_{xi,e} = 0: N_{ec} - V_{eb} - N_{ed} = 0$$

$$N_{ec} = V_{eb} + N_{ed}$$

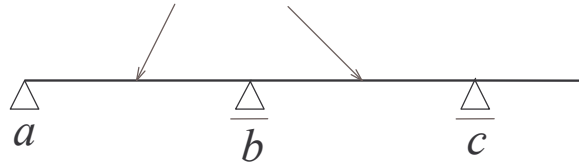
$$\sum F_{zi,e} = 0: V_{ec} + N_{eb} - V_{ed} = 0$$

$$N_{eb} = -V_{ec} + V_{ed}$$

2.2 Příklady určení stupně přetvárné neurčitosti

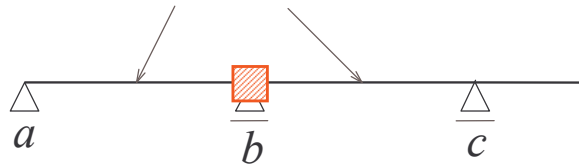
2.2.1 Příklad 1

Určete stupeň přetvárné neurčitosti dle ZDM u spojitého nosníku na obr. 2.10.



Obrázek 2.10: Schéma spojitého nosníku

Řešení



Obrázek 2.11: Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami

$$n_{p,ZDM} = 1$$

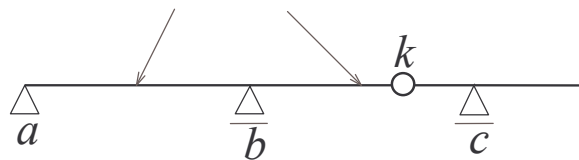
$$\varphi_b = ?$$

$\varphi_a, \varphi_c \dots$ není potřeba počítat (hodnoty M_a, M_c jsou známy)

$$u_b = u_c = 0 \dots \Delta l_{ab} = \Delta l_{bc} = 0$$

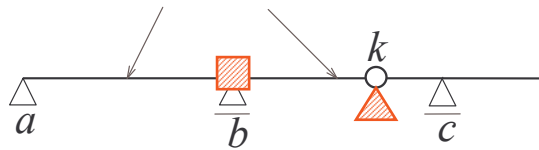
2.2.2 Příklad 2

Určete stupeň přetvárné neurčitosti dle ZDM u spojitého nosníku na obr. 2.12.



Obrázek 2.12: Schéma spojitého nosníku

Řešení



Obrázek 2.13: Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami

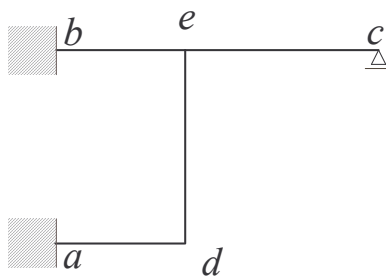
$$n_{p,ZDM} = 2$$

$$\varphi_b = ?$$

$$w_k = \Delta = ?$$

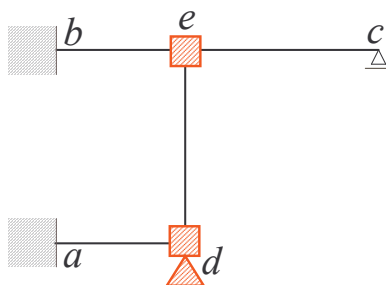
2.2.3 Příklad 3

Určete stupeň přetvárné neurčitosti dle ZDM rovinného rámu na obr. 2.14.



Obrázek 2.14: Schéma rovinného rámu

Řešení



Obrázek 2.15: Schéma rovinného rámu s fiktivními vazbami

$$n_{p,ZDM} = 3$$

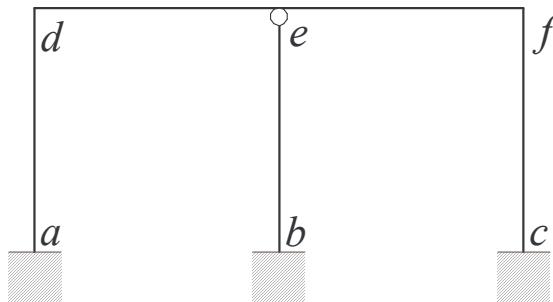
$$\varphi_d = ?$$

$$\varphi_e = ?$$

$$w_d = w_e = \Delta = ?$$

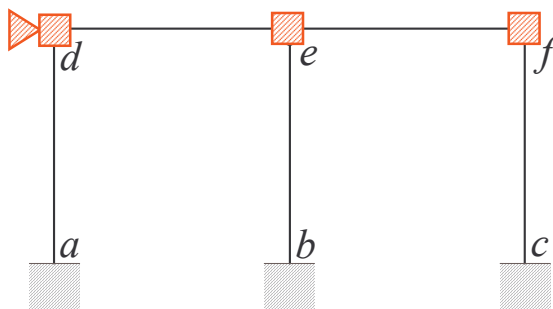
2.2.4 Příklad 4

Určete stupeň přetvárné neurčitosti dle ZDM rovinného rámu na obr. 2.16.



Obrázek 2.16: Schéma rámu

Řešení



Obrázek 2.17: Schéma rámu s fiktivními vazbami

$$n_{p,ZDM} = 4$$

$$\varphi_d = ?$$

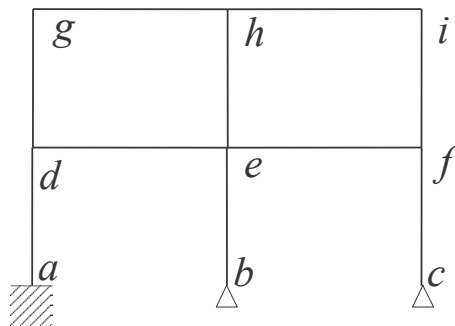
$$\varphi_e = ?$$

$$\varphi_f = ?$$

$$u_d = u_e = u_f = \Delta = ?$$

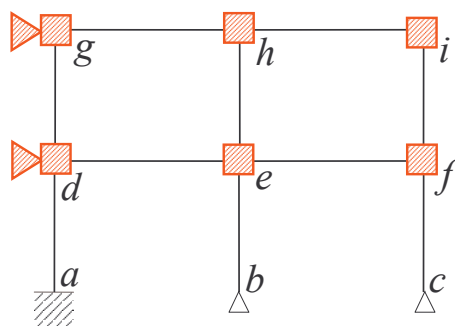
2.2.5 Příklad 5

Určete stupeň přetvárné neurčitosti dle ZDM u patrového rámu na obr. 2.18.



Obrázek 2.18: Schéma patrového rámu

Řešení



Obrázek 2.19: Schéma patrového rámu s fiktivními vazbami

$$n_{p,ZDM} = 8$$

$$\varphi_d = ?$$

$$\varphi_e = ?$$

$$\varphi_f = ?$$

$$\varphi_g = ?$$

$$\varphi_h = ?$$

$$\varphi_i = ?$$

$$u_d = u_e = u_f = \Delta_1 = ?$$

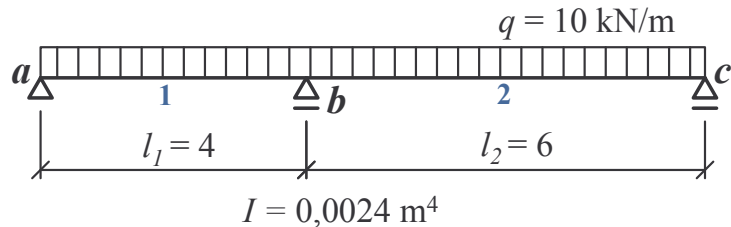
$$u_g = u_h = u_i = \Delta_2 = ?$$

2.3 Řešení spojitých nosníků pomocí ZDM

2.3.1 Příklad 1

Zadání

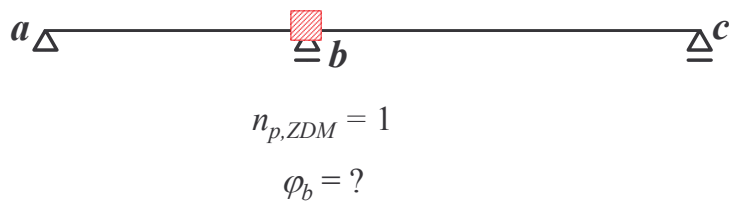
Vyřešte pomocí ZDM spojitý nosník uvedený na obr. 2.20.



Obrázek 2.20: Spojitý nosník

Řešení

1. Stupeň přetvárné neurčitosti



Obrázek 2.21: Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami dle ZDM

2. Poměrné tuhosti prutů

$$k_{ab} = \frac{I_{ab}}{l_{ab}} c \quad c = 10^4 \dots \text{vhodně zvolím}$$

$$k_1 = \frac{3}{4} \frac{I}{l_1} c = \frac{3}{4} \frac{0,0024}{4} c = \frac{3}{4} 0,0006c = \frac{3}{4} 6 = 4,5 \quad \text{○ ———|}$$

$$k_2 = \frac{3}{4} \frac{I}{l_2} c = \frac{3}{4} \frac{0,0024}{6} c = \frac{3}{4} 0,0004c = \frac{3}{4} 4 = 3 \quad \text{| ——— ○}$$

3. Primární momenty (tab. str. 416-420 v [1])

$$\overline{M}_{ab} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{ba} = \frac{1}{8}ql_1^2 = \frac{1}{8}10 \cdot 4^2 = 20 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{bc} = -\frac{1}{8}ql_2^2 = -\frac{1}{8}10 \cdot 6^2 = -45 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{cb} = 0 \text{ kNm}$$

4. Sekundární momenty

$$\hat{M}_{ba} = k_1(2\varphi_b) = 9\varphi_b$$

$$\hat{M}_{bc} = k_2(2\varphi_b) = 6\varphi_b$$

5. Styčnicková rovnice

$$\sum M_{bi} = 0$$

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$

$$\overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} + \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = 0$$

$$\hat{M}_{ba} + \hat{M}_{bc} = -(\overline{M}_{ba} + \overline{M}_{bc})$$

$$9\varphi_b + 6\varphi_b = -(20 - 45)$$

$$15\varphi_b = 25$$

$$\varphi_b = 1,667$$

6. Koncové momenty

$$M_{ba} = \overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = 20 + 9 \cdot \varphi_b = 20 + 9 \cdot 1,667 = 35 \text{ kNm}$$

$$M_{bc} = \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = -45 + 6 \cdot \varphi_b = -45 + 6 \cdot 1,667 = -35 \text{ kNm}$$

$$\text{Zkouška: } \sum M_{bi} = M_{ba} + M_{bc} = 35 - 35 = 0$$

7. Posouvající síly

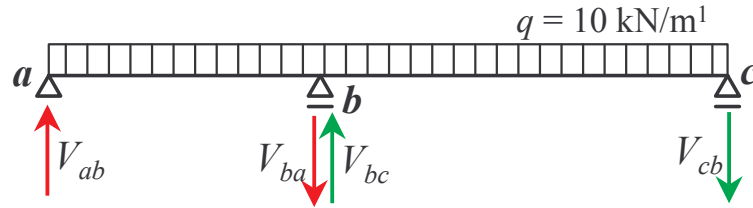
$$V_{ab} = V_{ab}^0 - \Delta V_{ab} = \frac{1}{2}ql_1 - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_1} = \frac{1}{2}10 \cdot 4 - \frac{0 + 35}{4} = 11,25 \text{ kN}$$

$$V_{ba} = V_{ba}^0 - \Delta V_{ba} = -\frac{1}{2}ql_1 - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_1} = -\frac{1}{2}10 \cdot 4 - \frac{0 + 35}{4} = -28,75 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = V_{bc}^0 - \Delta V_{bc} = \frac{1}{2}ql_2 - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{l_2} = \frac{1}{2}10 \cdot 6 - \frac{-35 + 0}{6} = 35,83 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = V_{cb}^0 - \Delta V_{cb} = -\frac{1}{2}ql_2 - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{l_2} = -\frac{1}{2}10 \cdot 6 - \frac{-35 + 0}{6} = -24,17 \text{ kN}$$

8. Reakce



Obrázek 2.22: Schéma výpočtu reakcí u spojitého nosníku (zadání viz. oddíl 2.3.1)

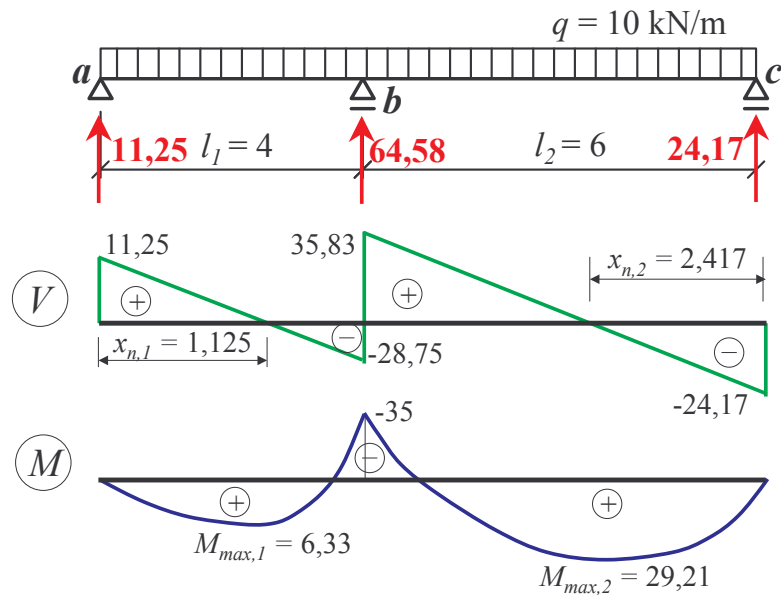
$$R_{az} = V_{ab} = 11,25 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{bz} = -V_{ba} + V_{bc} = 28,75 + 35,83 = 64,58 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{cz} = -V_{cb} = 24,17 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\begin{aligned} \text{Zkouška: } \sum F_z &= R_{az} + R_{bz} + R_{cz} - q(l_1 + l_2) = 0 \\ 11,25 + 64,58 + 24,17 - 10(4 + 6) &= 0 \end{aligned}$$

9. Vykreslení vnitřních sil

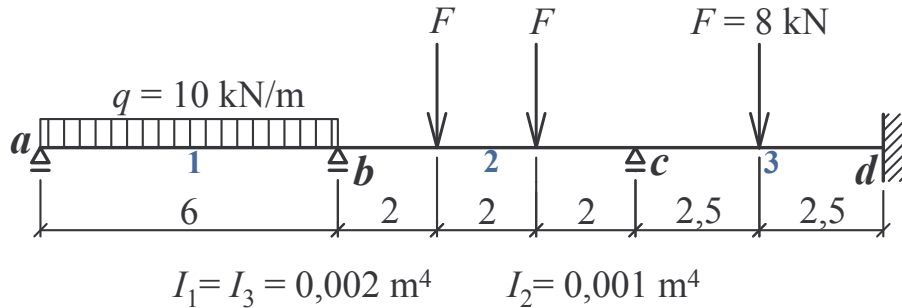


Obrázek 2.23: Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.3.1)

2.3.2 Příklad 2

Zadání

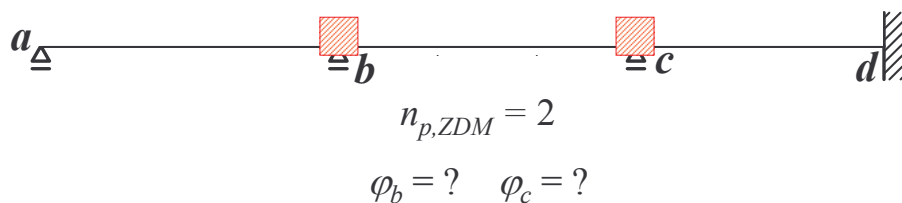
Vyřešte pomocí ZDM spojitý nosník uvedený na obr. 2.24.



Obrázek 2.24: Spojitý nosník

Řešení

1. Stupeň přetvárné neurčitosti



Obrázek 2.25: Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami dle ZDM

2. Poměrné tuhosti prutů

Konstanta pro výpočet poměrných tuhostí je zvolena jako $c = 6 \times 10^4$.

$$k_1 = \frac{3}{4} \frac{I_1}{l_1} c = \frac{3}{4} \frac{0,002}{6} c = \frac{3}{4} 0,00033c = \frac{3}{4} 20 = 15 \quad \text{---}$$

$$k_2 = \frac{I_2}{l_2} c = \frac{0,001}{6} c = 0,000167c = 10 \quad \text{---}$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} c = \frac{0,002}{5} c = 0,0004c = 24 \quad \text{---}$$

3. Primární momenty (tab. str. 416-420 v [1])

$$\begin{aligned}\bar{M}_{ab} &= 0 \\ \bar{M}_{ba} &= \frac{1}{8}ql_1^2 = \frac{1}{8}10 \cdot 6^2 = 45 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{bc} &= -\frac{2}{9}Fl_2 = -\frac{2}{9}8 \cdot 6 = -10,67 \text{ kNm} = -\bar{M}_{cb} \\ \bar{M}_{cd} &= -\frac{1}{8}Fl_3 = -\frac{1}{8}8 \cdot 5 = -5 \text{ kNm} = -\bar{M}_{dc}\end{aligned}$$

4. Sekundární momenty

$$\begin{aligned}\hat{M}_{ba} &= 2k_1\varphi_b = 30\varphi_b \\ \hat{M}_{bc} &= k_2(2\varphi_b + \varphi_c) = 20\varphi_b + 10\varphi_c \\ \hat{M}_{cb} &= k_2(2\varphi_c + \varphi_b) = 20\varphi_c + 10\varphi_b \\ \hat{M}_{cd} &= k_3(2\varphi_c + 0) = 48\varphi_c \\ \hat{M}_{dc} &= k_3(2 \cdot 0 + \varphi_c) = 24\varphi_c\end{aligned}$$

5. Styčnickové rovnice

$$\begin{aligned}\sum M_{bi} = 0: \quad M_{ba} + M_{bc} &= \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} + \bar{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = 0 \\ \sum M_{ci} = 0: \quad M_{cb} + M_{cd} &= \bar{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} + \bar{M}_{cd} + \hat{M}_{cd} = 0 \\ \hline 30\varphi_b + 20\varphi_b + 10\varphi_c &= -(45 - 10,67) \\ 20\varphi_c + 10\varphi_b + 48\varphi_c &= -(10,67 - 5) \\ 50\varphi_b + 10\varphi_c = -34,33 &\left. \begin{array}{l} \varphi_b = -0,6902 \\ \varphi_c = 0,0181 \end{array} \right\} \\ 10\varphi_b + 68\varphi_c = -5,67 &\end{aligned}$$

6. Koncové momenty

$$\begin{aligned}M_{ba} &= \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = 45 + 30\varphi_b = 24,29 \text{ kNm} \\ M_{bc} &= \bar{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = -10,67 + 20\varphi_b + 10\varphi_c = -24,29 \text{ kNm} \\ M_{cb} &= \bar{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} = 10,67 + 20\varphi_c + 10\varphi_b = 4,13 \text{ kNm} \\ M_{cd} &= \bar{M}_{cd} + \hat{M}_{cd} = -5 + 48\varphi_c = -4,13 \text{ kNm} \\ M_{dc} &= \bar{M}_{dc} + \hat{M}_{dc} = 5 + 24\varphi_c = 5,44 \text{ kNm}\end{aligned}$$

7. Posouvající síly

$$V_{ab} = V_{ab}^{\circ} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_1} = 30 - \frac{0 + 24,29}{6} = 25,95 \text{ kN}$$

$$V_{ba} = V_{ba}^{\circ} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_1} = (-30) - \frac{0 + 24,29}{6} = -34,05 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = V_{bc}^{\circ} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{l_2} = 8 - \frac{-24,29 + 4,13}{6} = 11,36 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = V_{cb}^{\circ} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{l_2} = (-8) - \frac{-24,29 + 4,13}{6} = -4,64 \text{ kN}$$

$$V_{cd} = V_{cd}^{\circ} - \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_3} = 4 - \frac{-4,13 + 5,44}{5} = 3,74 \text{ kN}$$

$$V_{dc} = V_{dc}^{\circ} - \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_3} = (-4) - \frac{-4,13 + 5,44}{5} = -4,26 \text{ kN}$$

8. Reakce

$$R_{az} = V_{ab} = 25,95 \text{ kN}$$

$$R_{bz} = -V_{ba} + V_{bc} = 34,05 + 11,36 = 45,41 \text{ kN}$$

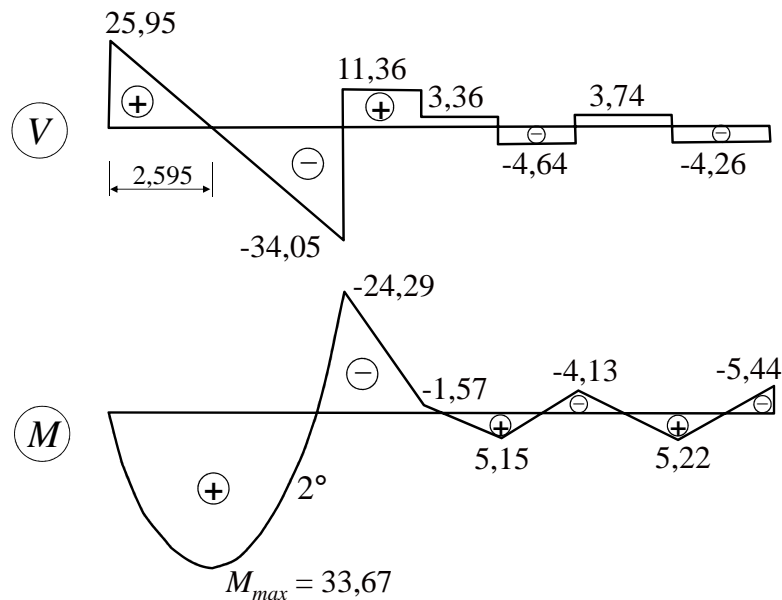
$$R_{cz} = -V_{cb} + V_{cd} = 4,64 + 3,74 = 8,38 \text{ kN}$$

$$R_{dz} = -V_{dc} = 4,26 \text{ kN}$$

$$\text{Zkouška: } \sum F_z = 0$$

$$25,95 + 45,41 + 8,38 + 4,26 - 10 \cdot 6 - 3 \cdot 8 = 0$$

9. Vykreslení vnitřních sil

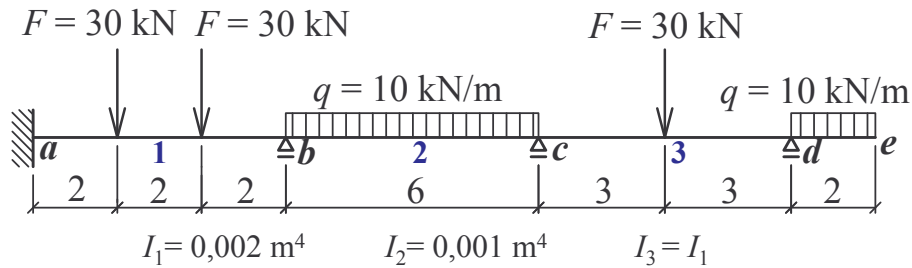


Obrázek 2.26: Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.3.2)

2.3.3 Příklad 3

Zadání

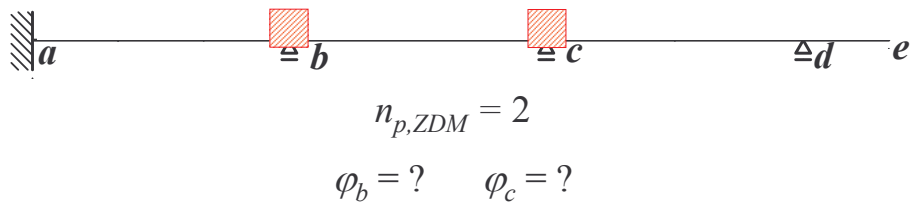
Vyřešte pomocí ZDM spojitý nosník uvedený na obr. 2.27.



Obrázek 2.27: Spojitý nosník

Řešení

1. Stupeň přetvárné neurčitosti



hodnotu φ_d nepotřebujeme \Leftarrow hodnota M_d je známá

Obrázek 2.28: Schéma spojitého nosníku s fiktivními vazbami dle ZDM

2. Poměrné tuhosti prutů

Konstanta pro výpočet poměrných tuhostí je zvolena jako $c = 6 \times 10^3$.

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} c = \frac{0,002}{6} c = 0,00033c = 2 \quad \text{■————■}$$

$$k_2 = \frac{I_2}{l_2} c = \frac{0,001}{6} c = 0,000167c = 1 \quad \text{■————■}$$

$$k_3 = \frac{3}{4} \frac{I_3}{l_3} c = \frac{3}{4} \frac{0,002}{6} c = \frac{3}{4} 0,00033c = \frac{3}{4} 2 = 1,5 \quad \text{■————○}$$

3. Primární momenty (tab. str. 416-420 v [1])

$$\overline{M}_{ab} = -\frac{2}{9}Fl_1 = -40 \text{ kNm} = -\overline{M}_{ba}$$

$$\overline{M}_{bc} = -\frac{1}{12}ql_2^2 = -30 \text{ kNm} = -\overline{M}_{cb}$$

$$\overline{M}_{cd} = -\frac{3}{16}Fl_3 + \frac{M_d}{2} = -23,75 \text{ kNm}$$

Pozn. $M_d = q \cdot 2 \cdot 1 = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ kNm}$

4. Sekundární momenty

$$\hat{M}_{ab} = k_1(2\varphi_a + \varphi_b) = 2\varphi_b$$

$$\hat{M}_{ba} = k_1(2\varphi_b + \varphi_a) = 4\varphi_b$$

$$\hat{M}_{bc} = k_2(2\varphi_b + \varphi_c) = 2\varphi_b + \varphi_c$$

$$\hat{M}_{cb} = k_2(2\varphi_c + \varphi_b) = 2\varphi_c + \varphi_b$$

$$\hat{M}_{cd} = k_3(2\varphi_c) = 3\varphi_c$$

5. Styčnickové rovnice

$$\sum M_{bi} = 0: \quad M_{ba} + M_{bc} = \overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} + \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = 0$$

$$\sum M_{ci} = 0: \quad M_{cb} + M_{cd} = \overline{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} + \overline{M}_{cd} + \hat{M}_{cd} = 0$$

$$4\varphi_b + 2\varphi_b + \varphi_c = -(40 - 30)$$

$$2\varphi_c + \varphi_b + 3\varphi_c = -(30 - 23,75)$$

$$\left. \begin{array}{l} 6\varphi_b + \varphi_c = -10 \\ \varphi_b + 5\varphi_c = -6,25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi_b = -1,509 \\ \varphi_c = -0,948 \end{array}$$

6. Koncové momenty

$$M_{ab} = \overline{M}_{ab} + \hat{M}_{ab} = -40 + 2\varphi_b = -43,02 \text{ kNm}$$

$$M_{ba} = \overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = 40 + 4\varphi_b = 33,96 \text{ kNm}$$

$$M_{bc} = \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = -30 + 2\varphi_b + \varphi_c = -33,96 \text{ kNm}$$

$$M_{cb} = \overline{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} = 30 + 2\varphi_c + \varphi_b = 26,59 \text{ kNm}$$

$$M_{cd} = \overline{M}_{cd} + \hat{M}_{cd} = -23,75 + 3\varphi_c = -26,59 \text{ kNm}$$

$$M_{dc} = M_d = 20 \text{ kNm}$$

7. Posouvající síly

$$V_{ab} = V_{ab}^{\circ} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_1} = 30 - \frac{-43,02 + 33,96}{6} = 31,51 \text{ kN}$$

$$V_{ba} = V_{ba}^{\circ} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_1} = (-30) - \frac{-43,02 + 33,96}{6} = -28,49 \text{ kN}$$

$$V_{bc} = V_{bc}^{\circ} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{l_2} = 30 - \frac{-33,96 + 26,59}{6} = 31,23 \text{ kN}$$

$$V_{cb} = V_{cb}^{\circ} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{l_2} = (-30) - \frac{-33,96 + 26,59}{6} = -28,77 \text{ kN}$$

$$V_{cd} = V_{cd}^{\circ} - \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_3} = 15 - \frac{-26,59 + 20}{6} = 16,10 \text{ kN}$$

$$V_{dc} = V_{dc}^{\circ} - \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_3} = (-15) - \frac{-26,59 + 20}{6} = -13,90 \text{ kN}$$

$$V_{de} = q \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ kN}$$

8. Reakce

$$R_{az} = V_{ab} = 31,51 \text{ kN}$$

$$R_{bz} = -V_{ba} + V_{bc} = 59,72 \text{ kN}$$

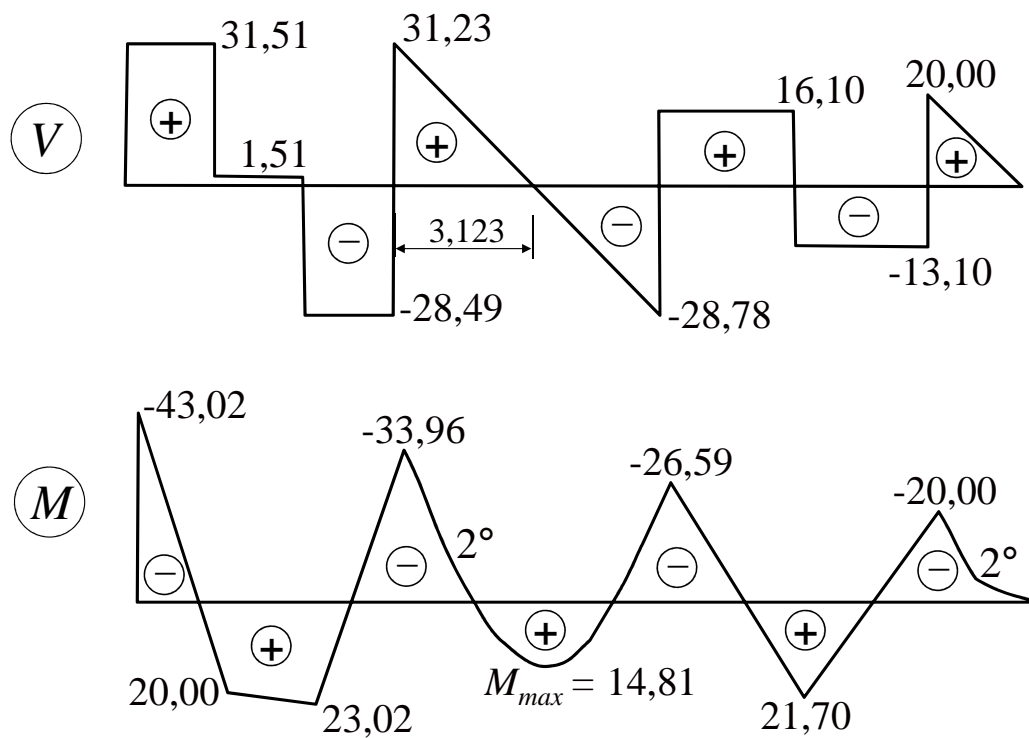
$$R_{cz} = -V_{cb} + V_{cd} = 44,87 \text{ kN}$$

$$R_{dz} = -V_{dc} + V_{de} = 33,90 \text{ kN}$$

$$\text{Zkouška: } \sum F_z = 0$$

$$31,51 + 59,72 + 44,87 + 33,90 - 10 \cdot (6 + 2) - 3 \cdot 30 = 0$$

9. Vykreslení vnitřních sil



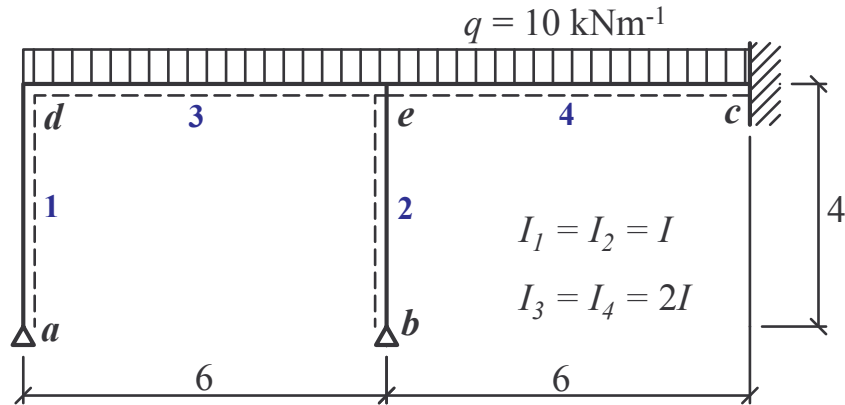
Obrázek 2.29: Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.3.3)

2.4 Řešení rámu s neposuvnými styčníky pomocí ZDM

2.4.1 Příklad

Zadání

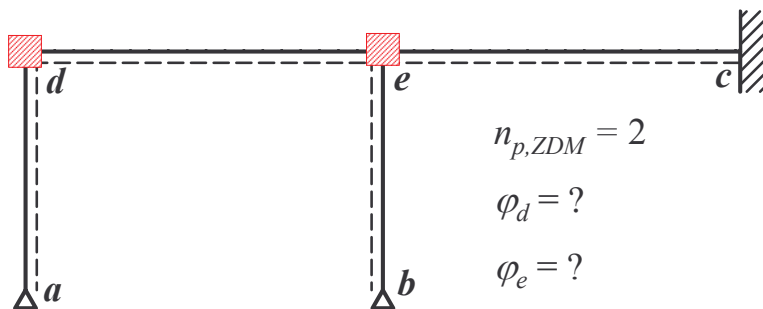
Vyřešte pomocí ZDM pravoúhlý rám s neposuvnými styčníky uvedený na obr. 2.30.



Obrázek 2.30: Pravoúhlý rám s neposuvnými styčníky

Řešení

1. Stupeň přetvárné neurčitosti



Obrázek 2.31: Fiktivní vazby dle ZDM u rámu s neposuvnými styčníky

2. Poměrné tuhosti prutů (zvoleno $c = 48/I$)

$$k_1 = k_2 = \frac{3 I_1}{4 l_1} c = \frac{3 I_2}{4 l_2} c = \frac{3 I}{4 \cdot 4} \frac{48}{I} = 9$$

$$k_3 = k_4 = \frac{I_3}{l_3} c = \frac{I_4}{l_4} c = \frac{2I}{6} \frac{48}{I} = 16$$

3. Primární momenty (tab. str. 416-420 v [1])

$$\overline{M}_{ad} = \overline{M}_{da} = \overline{M}_{eb} = \overline{M}_{be} = 0$$

$$\overline{M}_{de} = \overline{M}_{ec} = -\frac{1}{12}ql^2 = -\frac{1}{12}10 \cdot 6^2 = -30 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{ed} = \overline{M}_{ce} = \frac{1}{12}ql^2 = \frac{1}{12}10 \cdot 6^2 = 30 \text{ kNm}$$

4. Sekundární momenty

$$\hat{M}_{da} = 2k_1\varphi_d = 18\varphi_d$$

$$\hat{M}_{eb} = 2k_2\varphi_e = 18\varphi_e$$

$$\hat{M}_{de} = k_3(2\varphi_d + \varphi_e) = 32\varphi_d + 16\varphi_e$$

$$\hat{M}_{ed} = k_3(2\varphi_e + \varphi_d) = 32\varphi_e + 16\varphi_d$$

$$\hat{M}_{ec} = k_4(2\varphi_e + 0) = 32\varphi_e$$

$$\hat{M}_{ce} = k_4(2 \cdot 0 + \varphi_e) = 16\varphi_e$$

5. Styčnickové rovnice

$$\sum M_{di} = 0: \quad M_{da} + M_{de} = 0$$

$$\sum M_{ei} = 0: \quad M_{eb} + M_{ed} + M_{ec} = 0$$

$$18\varphi_d + 32\varphi_d + 16\varphi_e = -(-30)$$

$$18\varphi_e + 32\varphi_e + 16\varphi_d + 32\varphi_e = -(30 - 30)$$

$$50\varphi_d + 16\varphi_e = 30 \quad \left. \begin{array}{l} \varphi_d = 0,6400 \\ \varphi_e = -0,1249 \end{array} \right\}$$

$$16\varphi_d + 82\varphi_e = 0$$

6. Koncové momenty

$$M_{ad} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{da} = \overline{M}_{da} + \hat{M}_{da} = 0 + 18\varphi_d = 11,52 \text{ kNm}$$

$$M_{eb} = \overline{M}_{eb} + \hat{M}_{eb} = 0 + 18\varphi_e = -2,25 \text{ kNm}$$

$$M_{be} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{de} = \overline{M}_{de} + \hat{M}_{de} = -30 + 32\varphi_d + 16\varphi_e = -11,25 \text{ kNm}$$

$$M_{ed} = \overline{M}_{ed} + \hat{M}_{ed} = 30 + 16\varphi_d + 32\varphi_e = 36,25 \text{ kNm}$$

$$M_{ec} = \overline{M}_{ec} + \hat{M}_{ec} = -30 + 32\varphi_e = -34,0 \text{ kNm}$$

$$M_{ce} = \overline{M}_{ce} + \hat{M}_{ce} = 30 + 16\varphi_e = 28,0 \text{ kNm}$$

Zkouška : $\sum M_{di} = 0 : M_{da} + M_{de} = 0$
 $11,52 - 11,52 = 0$
 $\sum M_{ei} = 0 : M_{eb} + M_{ed} + M_{ec} = 0$
 $-2,25 + 36,25 - 34,0 = 0$

7. Posouvající síly

$$V_{ad} = V_{ad}^\circ - \frac{M_{ad} + M_{da}}{l_1} = 0 - \frac{0 + 11,25}{4} = -2,88 \text{ kN} = V_{da}$$

$$V_{eb} = V_{eb}^\circ - \frac{M_{eb} + M_{be}}{l_2} = 0 - \frac{-2,25 + 0}{4} = 0,56 \text{ kN} = V_{be}$$

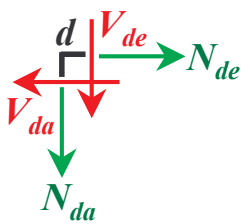
$$V_{de} = V_{de}^\circ - \frac{M_{de} + M_{ed}}{l_3} = 30 - \frac{-11,25 + 36,25}{6} = 25,83 \text{ kN}$$

$$V_{ed} = V_{ed}^\circ - \frac{M_{de} + M_{ed}}{l_3} = -30 - \frac{-11,25 + 36,25}{6} = -34,17 \text{ kN}$$

$$V_{ec} = V_{ec}^\circ - \frac{M_{ec} + M_{ce}}{l_4} = 30 - \frac{-34,0 + 28,0}{6} = 31,0 \text{ kN}$$

$$V_{ce} = V_{ce}^\circ - \frac{M_{ec} + M_{ce}}{l_4} = -30 - \frac{-34,0 + 28,0}{6} = -29,0 \text{ kN}$$

8. Normálové síly

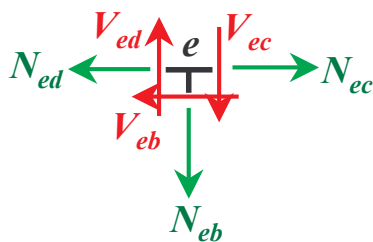


$$\sum F_{xi,d} = 0 : N_{de} - V_{da} = 0$$

$$N_{de} = V_{da} = -2,88 \text{ kN} = N_{ed}$$

$$\sum F_{zi,d} = 0 : V_{de} + N_{da} = 0$$

$$N_{da} = -V_{de} = -25,83 \text{ kN} = N_{ad}$$



$$\sum F_{xi,e} = 0 : N_{ec} - V_{eb} - N_{ed} = 0$$

$$N_{ec} = V_{eb} + N_{ed} = 0,56 - 2,88$$

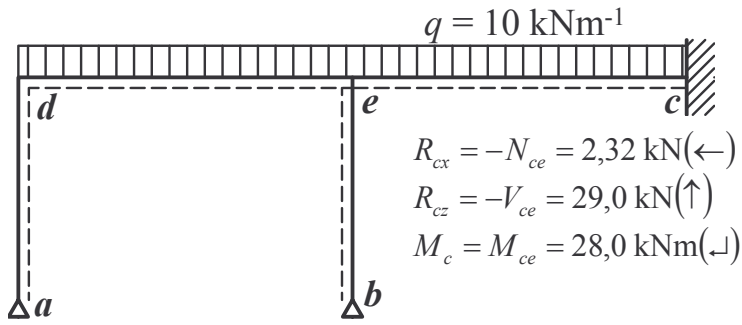
$$N_{ec} = -2,32 \text{ kN} = N_{ce}$$

$$\sum F_{zi,e} = 0 : V_{ec} + N_{eb} - V_{ed} = 0$$

$$N_{eb} = -V_{ec} + V_{ed} = -31 - 34,17$$

$$N_{eb} = -65,17 \text{ kN} = N_{be}$$

9. Reakce



$$R_{ax} = -V_{ad} = 2,88 \text{ kN}(\rightarrow) \quad R_{bx} = V_{be} = 0,56 \text{ kN}(\leftarrow)$$

$$R_{az} = -N_{ad} = 25,83 \text{ kN}(\uparrow) \quad R_{bz} = -N_{be} = 65,17 \text{ kN}(\uparrow)$$

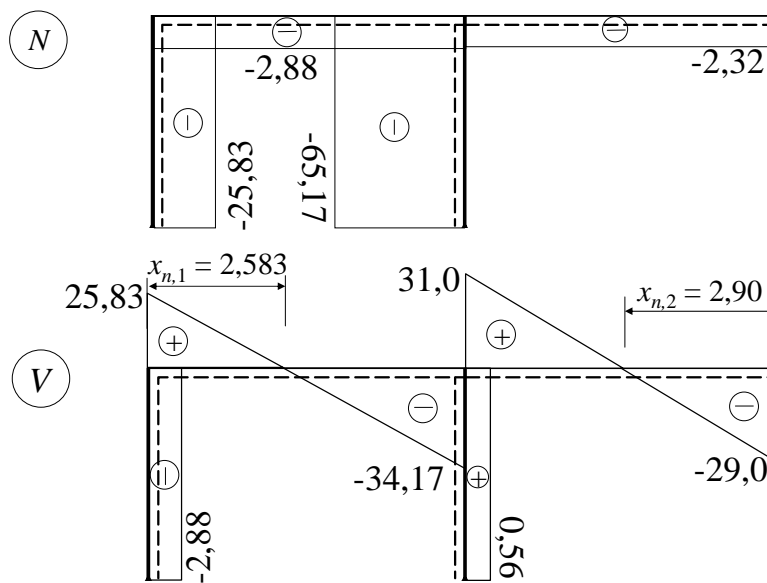
Zkouška: $\sum F_{xi} = R_{ax} - R_{bx} - R_{cx} = 0$

$$2,88 - 0,56 - 2,32 = 0$$

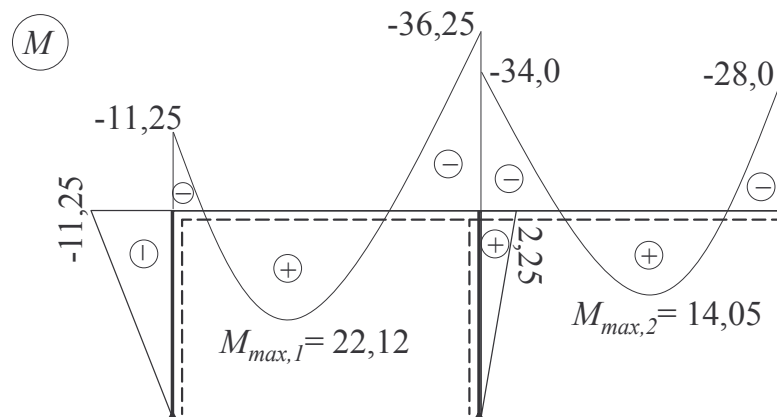
$\sum F_{zi} = R_{az} + R_{bz} + R_{cz} - q \cdot (6 + 6) = 0$

$$25,83 + 65,17 + 29,0 - 10 \cdot 12 = 0$$

10. Vykreslení vnitřních sil



Obrázek 2.32: Vykreslení normálových a posouvajících sil (zadání viz. oddíl 2.5.1)



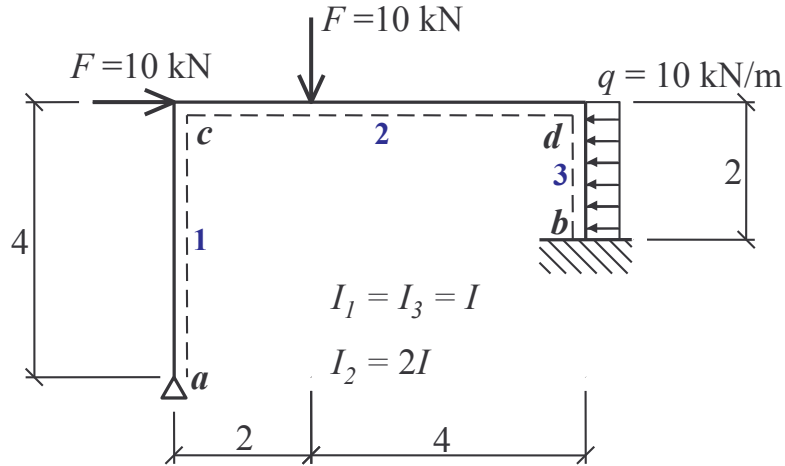
Obrázek 2.33: Vykreslení ohybových momentů (zadání viz. oddíl 2.5.1)

2.5 Řešení rámu s posuvnými styčníky pomocí ZDM

2.5.1 Příklad 1

Zadání

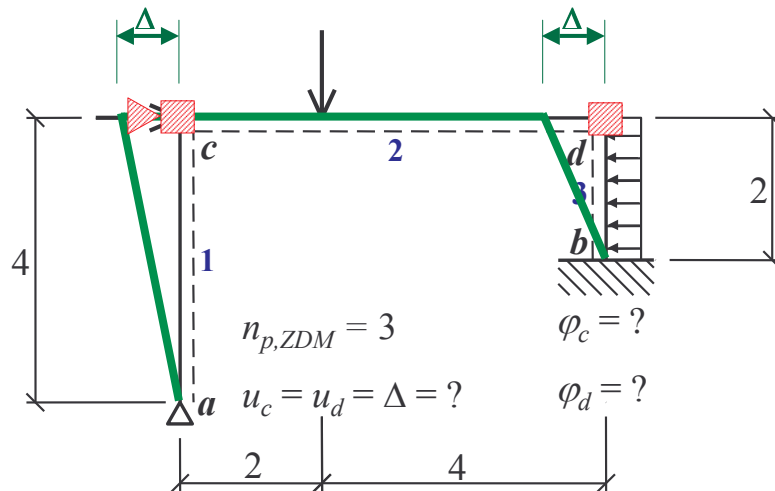
Vyřešte pomocí ZDM jednoduchý pravoúhlý rám s posuvnými styčníky uvedený na obr. 2.34.



Obrázek 2.34: Pravoúhlý rám s posuvnými styčníky

Řešení

1. Stupeň přetvárné neurčitosti



Obrázek 2.35: Fiktivní vazby dle ZDM u rámu s posuvnými styčníky

2. Poměrné tuhosti prutů (zvoleno
- $c = 12/I$
-)

$$k_1 = \frac{3 I_1}{4 l_1} c = \frac{3 I}{4 \cdot 4} c = 2,25 \quad \text{○ —————}$$

$$k_2 = \frac{I_2}{l_2} c = \frac{2I}{6} c = 4 \quad \text{—————}$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} c = \frac{I}{2} c = 6 \quad \text{—————}$$

3. Primární momenty a posouvající síly (tab. str. 416-420 v [1])

$$\overline{M}_{ca} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{cd} = -\frac{Fab^2}{l_2^2} = -\frac{10 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = -8,89 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{dc} = \frac{Fa^2b}{l_2^2} = -\frac{10 \cdot 2^2 \cdot 4}{6^2} = 4,44 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{db} = -\frac{1}{12} ql_3^2 = -\frac{1}{12} 10 \cdot 2^2 = -3,33 \text{ kNm}$$

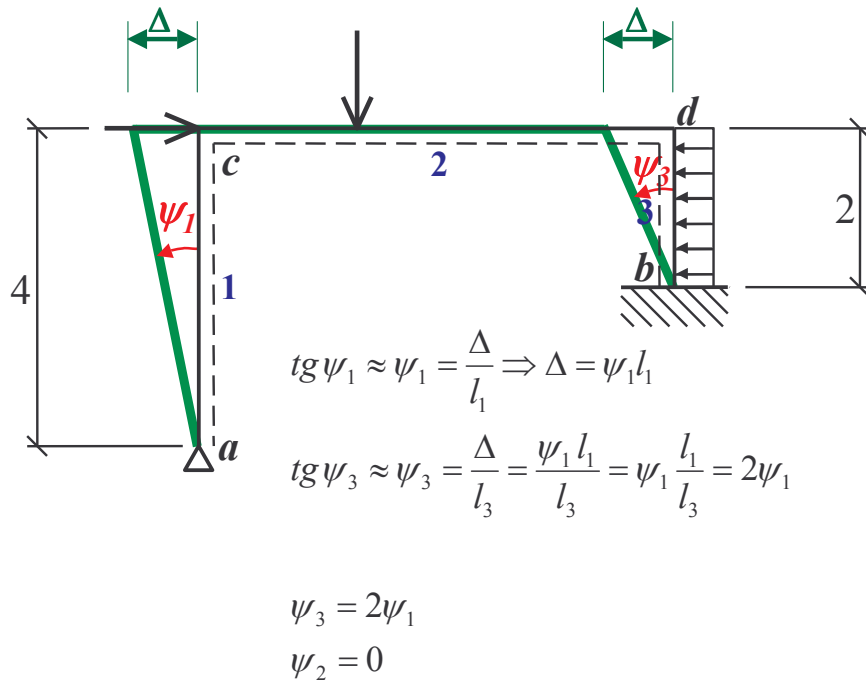
$$\overline{M}_{bd} = \frac{1}{12} ql_3^2 = \frac{1}{12} 10 \cdot 2^2 = 3,33 \text{ kNm}$$

$$\overline{V}_{ca} = 0 \text{ kN}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{V}_{cd} \\ \overline{V}_{dc} \end{array} \right\} \text{ nepotřebujeme (potřeba pouze } \overline{V} \text{ v místě posunu)}$$

$$\overline{V}_{db} = \frac{1}{2} ql_3 = \frac{1}{2} 10 \cdot 2 = 10 \text{ kN}$$

4. Sekundární momenty a posouvající síly



Obrázek 2.36: Patrový posun dle ZDM u rámu s posuvnými styčníky

$$\hat{M}_{ca} = k_1(2\varphi_c - 2\psi_1) = 4,5\varphi_c - 4,5\psi_1$$

$$\hat{M}_{cd} = k_2(2\varphi_c + \varphi_d - 3\psi_2) = 8\varphi_c + 4\varphi_d$$

$$\hat{M}_{dc} = k_2(2\varphi_d + \varphi_c - 3\psi_2) = 8\varphi_d + 4\varphi_c$$

$$\hat{M}_{db} = k_3(2\varphi_d + \varphi_b - 3\psi_3) = 12\varphi_d - 36\psi_1$$

$$\hat{M}_{bd} = k_3(2\varphi_b + \varphi_d - 3\psi_3) = 6\varphi_d - 36\psi_1$$

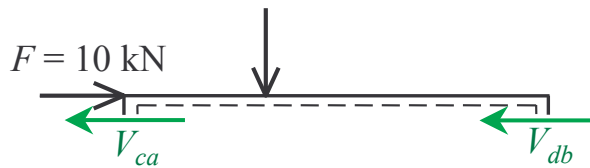
$$\hat{V}_{ca} = -\frac{k_1}{l_1}(2\varphi_c - 2\psi_1) = -1,125\varphi_c + 1,125\psi_1$$

$$\hat{V}_{db} = -\frac{k_3}{l_3}(3\varphi_d + 3\varphi_b - 6\psi_3) = -9\varphi_d + 36\psi_1$$

5. Styčnickové rovnice

$$\begin{aligned} \sum M_{ci} = 0: \quad M_{ca} + M_{cd} &= 0 \\ 4,5\varphi_c - 4,5\psi_1 + 8\varphi_c + 4\varphi_d &= -(0 - 8,89) \\ 12,5\varphi_c + 4\varphi_d - 4,5\psi_1 &= 8,89 \\ \sum M_{di} = 0: \quad M_{dc} + M_{db} &= 0 \\ 8\varphi_d + 4\varphi_c + 12\varphi_d - 36\psi_1 &= -(4,44 - 3,33) \\ 4\varphi_c + 20\varphi_d - 36\psi_1 &= -1,11 \end{aligned}$$

6. Patrová rovnice



Obrázek 2.37: Patrový posun dle ZDM u rámu s posuvnými styčnicíky

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0: \quad V_{ca} + V_{db} - 10 \text{ kN} &= 0 \\ \bar{V}_{ca} + \hat{V}_{ca} + \bar{V}_{db} + \hat{V}_{db} &= 10 \\ 0 - 1,125\varphi_c + 1,125\psi_1 + 10 - 9\varphi_d + 36\psi_1 &= 10 \\ -1,125\varphi_c - 9\varphi_d + 37,125\psi_1 &= 0 \end{aligned}$$

7. Řešení soustavy rovnic

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{ci} = 0: \quad 12,5\varphi_c + 4\varphi_d - 4,5\psi_1 &= 8,89 \\ \sum M_{di} = 0: \quad 4\varphi_c + 20\varphi_d - 36\psi_1 &= -1,11 \\ \sum F_{ix} = 0: \quad -1,125\varphi_c - 9\varphi_d + 37,125\psi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi_c &= 0,7902 \\ \varphi_d &= -0,3024 \\ \psi_1 &= -0,0494 \end{aligned}$$

8. Maticový zápis soustavy rovnic

	φ_c	φ_d	ψ_1	P.S.
φ_c	$2k_1 + 2k_2$	k_2	$-2k_1$	$-(\bar{M}_{ca} + \bar{M}_{cd})$
φ_d	k_2	$2k_2 + 2k_3$	$-3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$-(\bar{M}_{dc} + \bar{M}_{db})$
ψ_1	$-2 \frac{k_1}{l_1}$	$-3 \frac{k_3}{l_3}$	$2 \frac{k_1}{l_1} + 6 \frac{k_3}{l_3} \frac{l_1}{l_3}$	$F - (\bar{V}_{ca} + \bar{V}_{db})$

9. Maticový zápis soustavy rovnic (pokračování),
patrová rovnice roznásobena $l_1 \implies$ symetrická matice

	φ_c	φ_d	ψ_1	P.S.
φ_c	$2k_1 + 2k_2$	k_2	$-2k_1$	$-(\bar{M}_{ca} + \bar{M}_{cd})$
φ_d	k_2	$2k_2 + 2k_3$	$-3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$-(\bar{M}_{dc} + \bar{M}_{db})$
ψ_1	$-2k_1$	$-3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$2k_1 + 6k_3 \frac{l_1^2}{l_3^2}$	$Fl_1 - (\bar{V}_{ca} + \bar{V}_{db})l_1$

10. Koncové momenty

$$M_{ca} = 0 + 4,5 \cdot 0,7902 - 4,5 \cdot (-0,0494) = 3,78 \text{ kNm}$$

$$M_{cd} = -8,89 + 8 \cdot 0,7902 + 4 \cdot (-0,3024) = -3,78 \text{ kNm}$$

$$M_{dc} = 4,44 + 8 \cdot (-0,3024) + 4 \cdot 0,7902 = 5,18 \text{ kNm}$$

$$M_{db} = -3,33 + 12 \cdot (-0,3024) - 36 \cdot (-0,0494) = -5,18 \text{ kNm}$$

$$M_{bd} = 3,33 + 6 \cdot (-0,3024) - 36 \cdot (-0,0494) = 3,29 \text{ kNm}$$

11. Posouvající síly

$$V_{ac} = V_{ac}^0 - \frac{M_{ac} + M_{ca}}{l_1} = 0 - \frac{0 + 3,78}{4} = -0,945 \text{ kN}$$

$$V_{ca} = V_{ca}^0 - \frac{M_{ac} + M_{ca}}{l_1} = 0 - \frac{0 + 3,78}{4} = -0,945 \text{ kN}$$

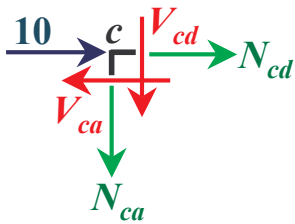
$$V_{cd} = V_{cd}^0 - \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_2} = \frac{10 \cdot 4}{6} - \frac{-3,78 + 5,18}{6} = 6,433 \text{ kN}$$

$$V_{dc} = V_{dc}^0 - \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_2} = -\frac{10 \cdot 2}{6} - \frac{-3,78 + 5,18}{6} = -3,567 \text{ kN}$$

$$V_{db} = V_{db}^0 - \frac{M_{db} + M_{bd}}{l_3} = \frac{10 \cdot 2}{2} - \frac{-5,18 + 3,29}{2} = 10,945 \text{ kN}$$

$$V_{bd} = V_{bd}^0 - \frac{M_{db} + M_{bd}}{l_3} = -\frac{10 \cdot 2}{2} - \frac{-5,18 + 3,29}{2} = -9,055 \text{ kN}$$

12. Normálové síly

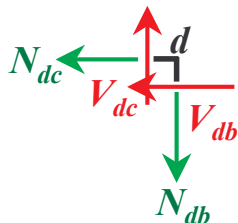


$$N_{cd} - V_{ca} + 10 = 0$$

$$N_{cd} = V_{ca} - 10 = -0,945 - 10 = -10,945 \text{ kN}$$

$$V_{cd} + N_{ca} = 0$$

$$N_{ca} = -V_{cd} = -6,433 \text{ kN}$$



$$-N_{dc} - V_{db} = 0$$

$$N_{dc} = -V_{db} = -10,945 \text{ kN}$$

$$-V_{dc} + N_{db} = 0$$

$$N_{db} = V_{dc} = -3,567 \text{ kN}$$

$$N_{ac} = N_{ca} = -6,433 \text{ kN}$$

$$N_{bd} = N_{db} = -3,567 \text{ kN}$$

13. Reakce

$$R_{ax} = -V_{ac} = 0,945 \text{ kN } (\rightarrow)$$

$$R_{az} = -N_{ac} = 6,433 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$R_{bx} = -V_{bd} = 9,055 \text{ kN } (\rightarrow)$$

$$R_{bz} = -N_{bd} = 3,567 \text{ kN } (\uparrow)$$

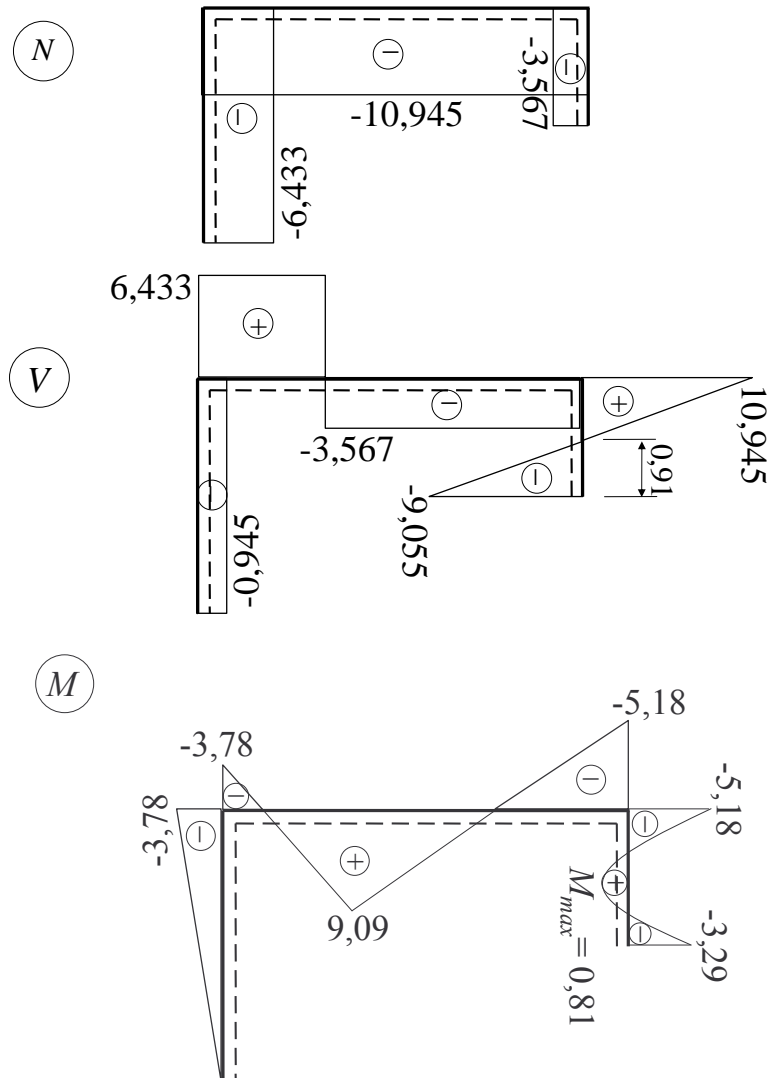
$$M_b = -M_{bd} = -3,29 \text{ kNm}$$

Zkoušky :

$$\sum F_z = 0 \dots 6,433 + 3,567 - 10 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \dots 0,945 + 9,055 + 10 - 10 \cdot 2 = 0$$

14. Vykreslení vnitřních sil

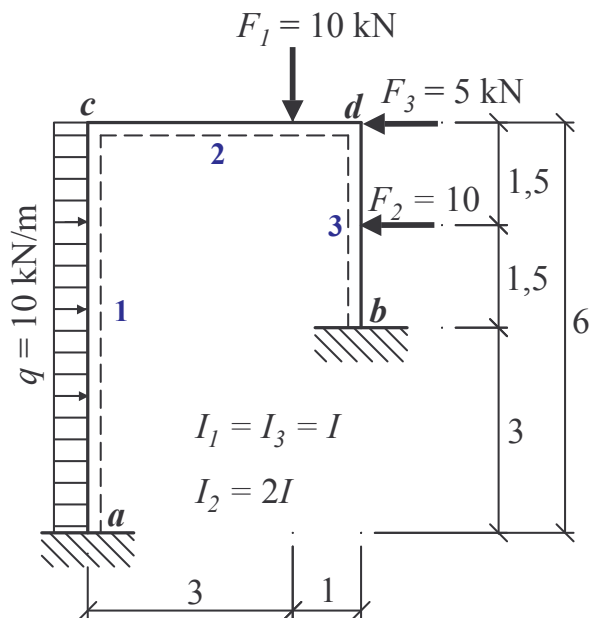


Obrázek 2.38: Vykreslení vnitřních sil (zadání viz. oddíl 2.5.1)

2.5.2 Příklad 2

Zadání

Vyřešte jednoduchý pravoúhlý rám s posuvnými styčníky uvedený na obr. 2.39. Příklad řešte samostatně.



Obrázek 2.39: Rám s posuvnými styčníky

Řešení

Výsledky výpočtu si můžete ověřit dle níže uvedených kontrolních hodnot.

$$R_{ax} = 35,11 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{az} = 0,305 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_a = -43,25 \text{ kNm}$$

$$R_{bx} = 9,89 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{bz} = 9,695 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_b = 23,29 \text{ kNm}$$

$$M_c = -12,61 \text{ kNm}$$

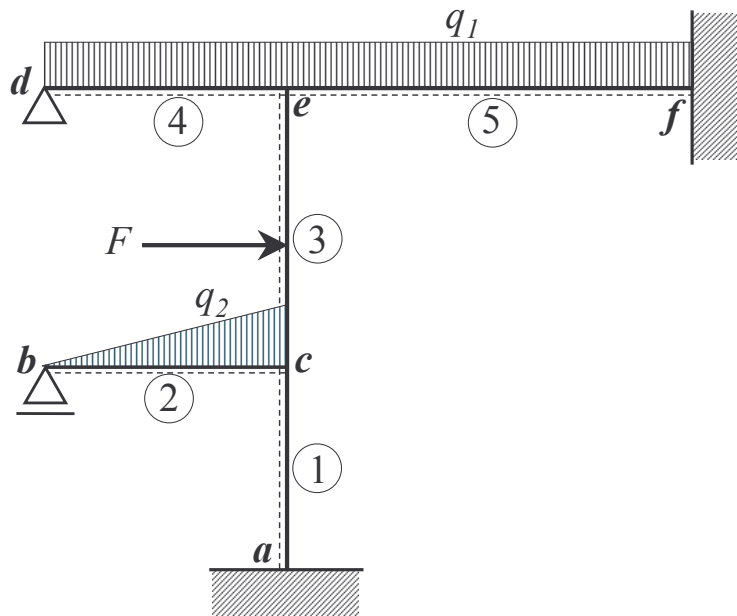
$$M_d = -21,39 \text{ kNm}$$

$$M_{\max} = 18,39 \text{ kNm}$$

2.5.3 Příklad 3

Zadání

Pro rám s posuvnými styčníky uvedený na obr. 2.40 sestavte obecně soustavu rovnic a maticově ji uspořádejte v souladu s principy ZDM.



Obrázek 2.40: Rám s posuvnými styčníky

Řešení

1. Neznámé přetvárné veličiny

$$\varphi_c = ?$$

$$\varphi_e = ?$$

$$\psi_1 = ?$$

$$\psi_3 = -\psi_1 \frac{l_1}{l_3}$$

2. Poměrné tuhosti prutů

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} c \quad k_2 = \frac{3}{4} \frac{I_2}{l_2} c \quad k_3 = \frac{I_3}{l_3} c$$

$$k_4 = \frac{3}{4} \frac{I_4}{l_4} c \quad k_5 = \frac{I_5}{l_5} c$$

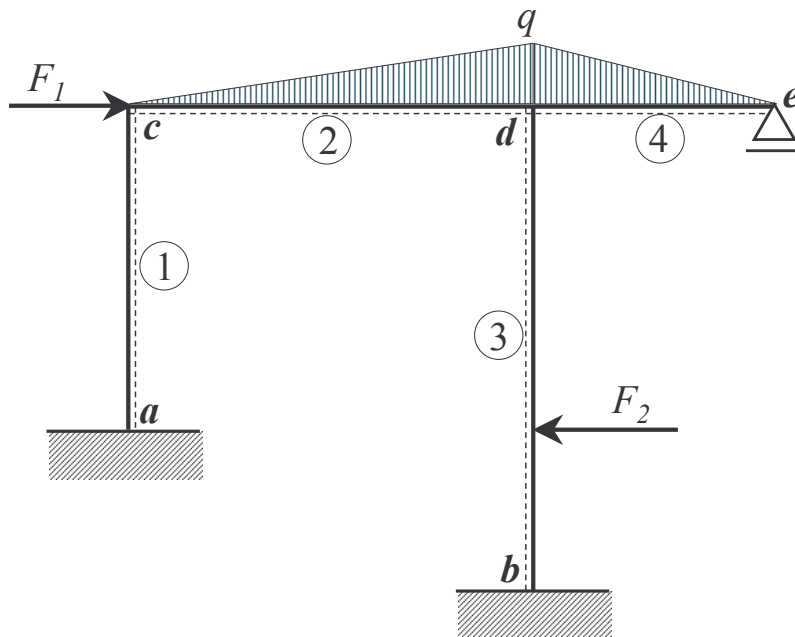
3. Maticový zápis soustavy rovnic

$2k_1 + 2k_2 + 2k_3$	k_3	$-3k_1 + 3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$-(\bar{M}_{ca} + \bar{M}_{cb} + \bar{M}_{ce})$
k_3	$2k_3 + 2k_4 + 2k_5$	$3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$-(\bar{M}_{ed} + \bar{M}_{ef} + \bar{M}_{ec})$
$-3k_1 + 3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$6k_1 + 6k_3 \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2$	$-(\bar{V}_{ca} - \bar{V}_{ce}) \cdot l_1$

2.5.4 Příklad 4

Zadání

Pro rám s posuvnými styčníky uvedený na obr. 2.41 sestavte obecně soustavu rovnic a maticově ji uspořádejte v souladu s principy ZDM.



Obrázek 2.41: Rám s posuvnými styčníky

Řešení

1. Neznámé přetvárné veličiny

$$\varphi_c = ?$$

$$\varphi_d = ?$$

$$\psi_1 = ?$$

$$\psi_3 = \psi_1 \frac{l_1}{l_3}$$

2. Poměrné tuhosti prutů

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1} c \quad k_2 = \frac{I_2}{l_2} c$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3} c \quad k_4 = \frac{3}{4} \frac{I_4}{l_4} c$$

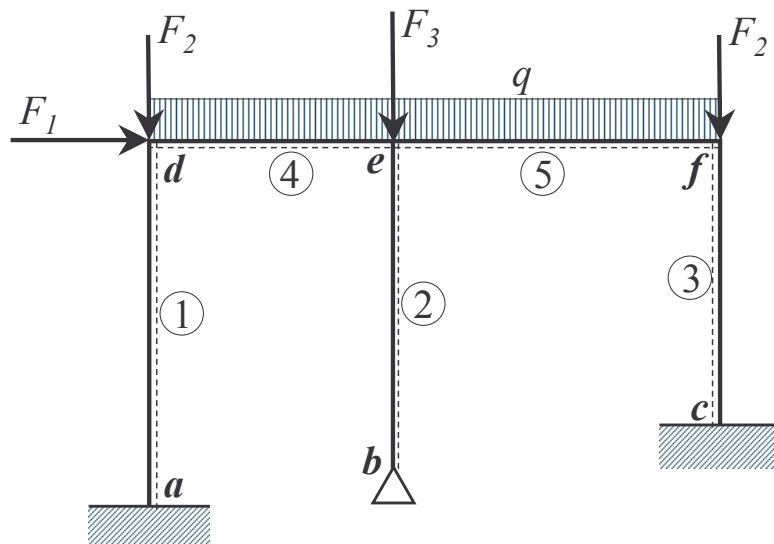
3. Maticový zápis soustavy rovnic

$2k_1 + 2k_2$	k_2	$-3k_1$	$-(\bar{M}_{ca} + \bar{M}_{cd})$
k_2	$2k_2 + 2k_3 + 2k_4$	$-3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$-(\bar{M}_{dc} + \bar{M}_{db} + \bar{M}_{de})$
$-3k_1$	$-3k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$6k_1 + 6k_3 \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2$	$-(\bar{V}_{ca} + \bar{V}_{db}) \cdot l_1 + F_1 l_1$

2.5.5 Příklad 5

Zadání

Pro rám s posuvnými styčníky uvedený na obr. 2.42 sestavte obecně soustavu rovnic a maticově ji uspořádejte v souladu s principy ZDM.



Obrázek 2.42: Rám s posuvnými styčníky

Řešení

1. Neznámé přetvárné veličiny

$$\begin{aligned} \varphi_d &= ? \\ \varphi_e &= ? \\ \varphi_f &= ? \\ \psi_1 &= ? \end{aligned} \quad \begin{aligned} \psi_2 &= \psi_1 \frac{l_1}{l_2} \\ \psi_3 &= \psi_1 \frac{l_1}{l_3} \end{aligned}$$

2. Poměrné tuhosti prutů

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{I_1}{l_1} c & k_2 &= \frac{3}{4} \frac{I_2}{l_2} c & k_3 &= \frac{I_3}{l_3} c \\ k_4 &= \frac{I_4}{l_4} c & k_5 &= \frac{I_5}{l_5} c \end{aligned}$$

3. Maticový zápis soustavy rovnic

$2k_1 + 2k_4$	k_4	–	$-3 \cdot k_1$	$-(\bar{M}_{da} + \bar{M}_{de})$
k_4	$2k_2 + 2k_4 + 2k_5$	k_5	$-2 \cdot k_2 \frac{l_1}{l_2}$	$-(\bar{M}_{ed} + \bar{M}_{ef} + \bar{M}_{eb})$
–	k_5	$2k_3 + 2k_5$	$-3 \cdot k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$-(\bar{M}_{fe} + \bar{M}_{fc})$
$-3 \cdot k_1$	$-2 \cdot k_2 \frac{l_1}{l_2}$	$-3 \cdot k_3 \frac{l_1}{l_3}$	$6k_1 + 2k_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + 6k_3 \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2$	$-(\bar{V}_{da} + \bar{V}_{eb} + \bar{V}_{fc}) \cdot l_1 + F_1 \cdot l_1$

2.6 Testové otázky a odpovědi

Otázky

1. Při řešení pomocí ZDM
 - a) zanedbáváme pouze vliv normálových sil na deformaci prutu.
 - b) není přetvoření prutu vyvoláno pouze ohybovými momenty.
 - c) zanedbáváme vliv normálových a posouvajících sil na deformaci prutu.
 - d) zanedbáváme vliv normálových sil a ohybových momentů na deformaci prutu.
2. Koncové momenty při řešení pomocí ZDM jsou
 - a) kladné proti směru hodinových ručiček.
 - b) kladné ve směru hodinových ručiček.
 - c) levý kladný ve směru a pravý kladný proti směru hodinových ručiček.
 - d) levý kladný proti směru a pravý kladný ve směru hodinových ručiček.
3. Patrová rovnice vyjadřuje
 - a) silovou podmínku rovnováhy kolmo ke směru nezávislého posunu na uvolněné části rámu (nosníku).
 - b) momentovou podmínku rovnováhy ve směru nezávislého posunu na uvolněné části rámu (nosníku).
 - c) silovou podmínku rovnováhy ve směru nezávislého natočení na uvolněné části rámu (nosníku).
 - d) silovou podmínku rovnováhy ve směru nezávislého posunu na uvolněné části rámu (nosníku).
4. Při řešení spojitých nosníků bez vložených klubů pomocí ZDM
 - a) sestavujeme pouze styčnickové rovnice pro určení posunutí podpor.
 - b) sestavujeme styčnickové rovnice pro určení natočení podpor a patrové rovnice pro určení posunutí podpor.
 - c) sestavujeme pouze styčnickové rovnice pro určení natočení podpor.
 - d) sestavujeme pouze patrové rovnice pro určení natočení podpor.
5. Při řešení rámu s neposuvnými styčníky pomocí ZDM sestavujeme
 - a) pouze patrové rovnice.
 - b) vždy styčnickové i patrové rovnice.
 - c) vždy styčnickové rovnice a v některých případech i patrové rovnice.
 - d) pouze styčnickové rovnice.

Odpovědi

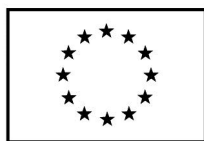
1.c) 2.b) 3.d) 4.c) 5.d)

Literatura

- [1] Kadlečák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí II.* druhé vydání, Vutium Brno, 2004. (431 s) ISBN 80-214-2631-4.
- [2] Koubová, L. *Deformační metoda v nelineární mechanice.* Disertační práce Ostrava, 2013
URL http://fast10.vsb.cz/koubova/Disertacni_prace_Koubova.pdf.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ