

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební



inovace  
studijního programu

**STAVEBNÍ INŽENÝRSTVÍ**

# STATIKA STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ I.

**VZDĚLÁVACÍ POMŮCKA**

Ivan Kološ  
Martin Krejsa  
Stanislav Pospíšil  
Oldřich Sucharda



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

INOVACE STUDIJNÍHO PROGRAMU STAVEBNÍ INŽENÝRSTVÍ CZ.1.07/2.2.00/28.0260.  
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

# Předmluva

Učební pomůcka byla vytvořena v rámci projektu *Inovace studijního programu Stavební inženýrství*, který zahrnuje tvorbu výukových podkladů. Výukové materiály by měly sloužit jako doplňující studijní zdroj předmětu Statika stavebních konstrukcí I a jsou určeny zejména pro studenty bakalářského studia studijního programu Stavební inženýrství (B3607). Na přípravě těchto studijních podkladů se autorsky podíleli: Ing. Ivan Kološ, Ph.D. (kapitoly 2, 4), doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D. (kapitoly 3, 7), doc. Ing. Stanislav Pospíšil, Ph.D. (kapitoly 5, 8, 9) a Ing. Bc. Oldřich Sucharda, Ph.D. (kapitoly 1, 6).

V Ostravě 30. 9. 2013

Autoři

# Obsah

<b>1</b>	<b>Přetvoření rovinných prutových konstrukcí – řešení s využitím principu virtuálních prací</b>	<b>1</b>
1.1	Příklad 1 – rovinný staticky určitý nosník . . . . .	2
1.1.1	Svislý průhyb volného konce . . . . .	2
1.1.2	Pootočení volného konce . . . . .	3
1.2	Příklad 2 – rovinný staticky určitý nosník . . . . .	4
1.3	Příklad 3 – rovinný staticky určitý nosník . . . . .	5
1.4	Příklad 4 – rovinný staticky určitý nosník . . . . .	6
1.4.1	Svislý průhyb volného konce . . . . .	6
1.4.2	Pootočení volného konce . . . . .	7
1.5	Příklad 5 – rovinný staticky určitý rám . . . . .	8
1.5.1	Konstantní tuhost celé konstrukce . . . . .	8
1.5.2	Různá tuhost jednotlivých prutů konstrukce . . . . .	9
1.6	Příklad 6 – rovinný staticky určitý rám . . . . .	10
1.6.1	Svislý posun . . . . .	10
1.6.2	Vodorovný posun . . . . .	11
1.7	Příklad 7 – rovinný staticky určitý rám . . . . .	12
1.8	Příklad 8 – rovinný staticky určitý rám . . . . .	14
1.9	Příklad 9 – rovinný staticky určitý rám . . . . .	15
1.10	Příklad 10 – příhradový nosník . . . . .	17
1.11	Příklad 11 – příhradový nosník . . . . .	19
1.12	Příklad 12 – příhradový nosník . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Staticky neurčité konstrukce</b>	<b>24</b>
2.1	Stupeň statické neurčitosti . . . . .	24
2.2	Příklad 1 . . . . .	24
2.3	Příklad 2 . . . . .	25
2.4	Příklad 3 . . . . .	25
2.5	Příklad 4 . . . . .	26
2.6	Příklad 5 . . . . .	26
2.7	Příklad 6 . . . . .	27
2.8	Příklad 7 . . . . .	27
2.9	Příklad 8 . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Silová metoda jednoduchého staticky neurčitého nosníku</b>	<b>29</b>
3.1	Příklad 1 . . . . .	29
3.1.1	Základní soustava . . . . .	29

3.1.2	Určení staticky neurčité veličiny . . . . .	30
3.2	Příklad 2 . . . . .	31
3.2.1	Určení staticky neurčité veličiny . . . . .	31
3.3	Příklad 3 . . . . .	32
3.3.1	Výsledné řešení . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Silová metoda řešení staticky neurčitých rámu při silovém zatížení</b>	<b>34</b>
4.1	Úvodní poznámka . . . . .	34
4.2	Příklad 1 . . . . .	34
4.3	Příklad 2 . . . . .	41
4.4	Příklad 3 . . . . .	46
4.5	Příklad 4 . . . . .	51
4.6	Příklad 5 . . . . .	54
4.7	Příklad 6 . . . . .	57
4.8	Příklad 7 . . . . .	61
4.9	Příklad 8 . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Silová metoda řešení jednoduchého pravoúhlého staticky neurčitého uzavřeného rámu</b>	<b>67</b>
5.1	Příklad 1 . . . . .	67
5.2	Příklad 2 . . . . .	71
5.3	Příklad 3 . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Řešení staticky neurčitých příhradových konstrukcí</b>	<b>79</b>
6.1	Příklad 1 . . . . .	79
6.2	Příklad 2 . . . . .	83
6.3	Příklad 3 . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Rošty – řešení silovou metodou</b>	<b>88</b>
7.1	Příklad 1 . . . . .	88
7.1.1	Základní soustava . . . . .	88
7.1.2	Řešení soustavy rovnic a určení staticky neurčitých veličin . . . . .	89
7.1.3	Výpočet reakcí a průběhy vnitřních sil . . . . .	93
7.2	Příklad 2 . . . . .	94
7.2.1	Základní soustava . . . . .	94
7.2.2	Určení staticky neurčité veličiny . . . . .	94
7.2.3	Průběhy vnitřních sil . . . . .	96
7.3	Příklad 3 . . . . .	98
7.3.1	Základní soustava . . . . .	98
7.3.2	Určení staticky neurčité veličiny . . . . .	99
7.3.3	Průběhy vnitřních sil . . . . .	99
7.4	Příklad 4 . . . . .	100
7.4.1	Základní soustava . . . . .	101
7.4.2	Určení staticky neurčitých veličin . . . . .	103
7.4.3	Průběhy vnitřních sil . . . . .	104

<b>8</b>	<b>Přetvoření staticky neurčitých konstrukcí</b>	<b>112</b>
8.1	Příklad 1 . . . . .	112
8.2	Příklad 2 . . . . .	113
8.3	Příklad 3 . . . . .	117
<b>9</b>	<b>Řešení spojitého nosníku metodou třímomentových rovnic</b>	<b>119</b>
9.1	Příklad 1 . . . . .	119
9.2	Příklad 2 . . . . .	122
9.3	Příklad 3 . . . . .	124
9.4	Příklad 4 . . . . .	126

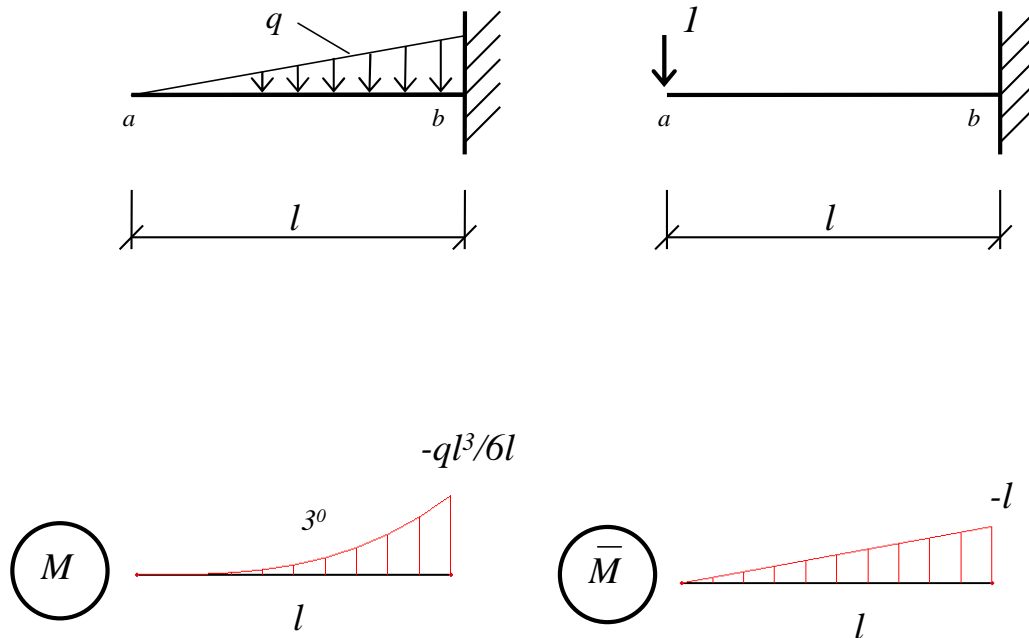
# Kapitola 1

Přetvoření rovinných prutových  
konstrukcí – řešení s využitím principu  
virtuálních prací

## 1.1 Příklad 1 – rovinný staticky určitý nosník

### 1.1.1 Svislý průhyb volného konce

Určete svislý průhyb na volném konci konzoly, která je zatížena trojúhelníkovým zatížením. Schéma konzoly a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.1 na str. 2.



Obrázek 1.1: Zadání a řešení příkladu

Prvním krokem výpočtu je určení průběhu ohybových momentů  $M$  od skutečného zatížení. Výpočet pokračuje volbou virtuální veličiny: síly nebo momentu. Virtuální sílu volíme v případě, kdy je neznámým přetvořením posunutí. Virtuální moment použijeme v případě, kdy určujeme pootočení. Velikost virtuální veličiny volíme rovnu 1. Směr volíme dle předpokládaného směru deformace. Následně se určí průběh ohybových momentů  $\bar{M}$  od virtuálního zatížení. Výsledná deformace se vypočte použitím Maxwell-Mohrova vzorce 1.1:

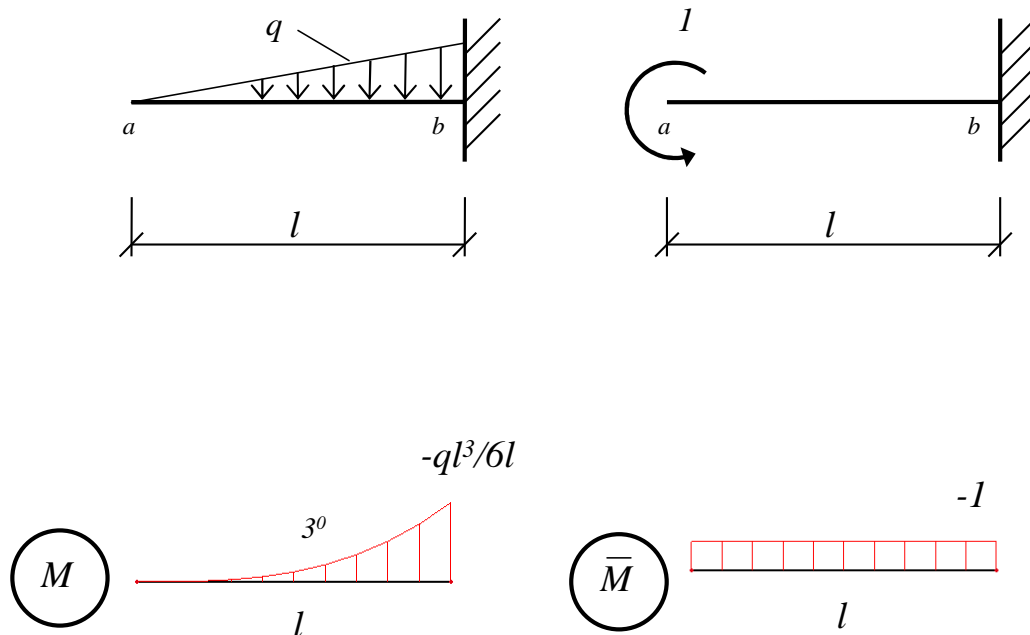
$$\delta_m = \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_0^l \bar{N}\alpha_t \Delta t_0 dx + \int_0^l \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} dx - \sum_r (\bar{R}_{rx} u_r + \bar{R}_{rz} w_r + \bar{M}_r \phi_r) \quad (1.1)$$

Normálové a posouvající síly se mohou zanedbat, protože na výslednou deformaci mají u uvedených ohýbaných konstrukcí vliv pouze v řádu procent. Vliv posouvajících sil však nelze obecně prohlásit za zanedbatelný. Vždy je nutné zohlednit konkrétní geometrii konstrukce a zatížení.

$$w_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{5} \left( -\frac{ql^3}{6} \right) (-l)l = \frac{ql^4}{30EI} \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Pootočení volného konce

Určete pootočení na volném konci konzoly, která je zatížena trojúhelníkovým zatížením. Schéma konzoly a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.2 na str. 3.



Obrázek 1.2: Zadání a řešení příkladu

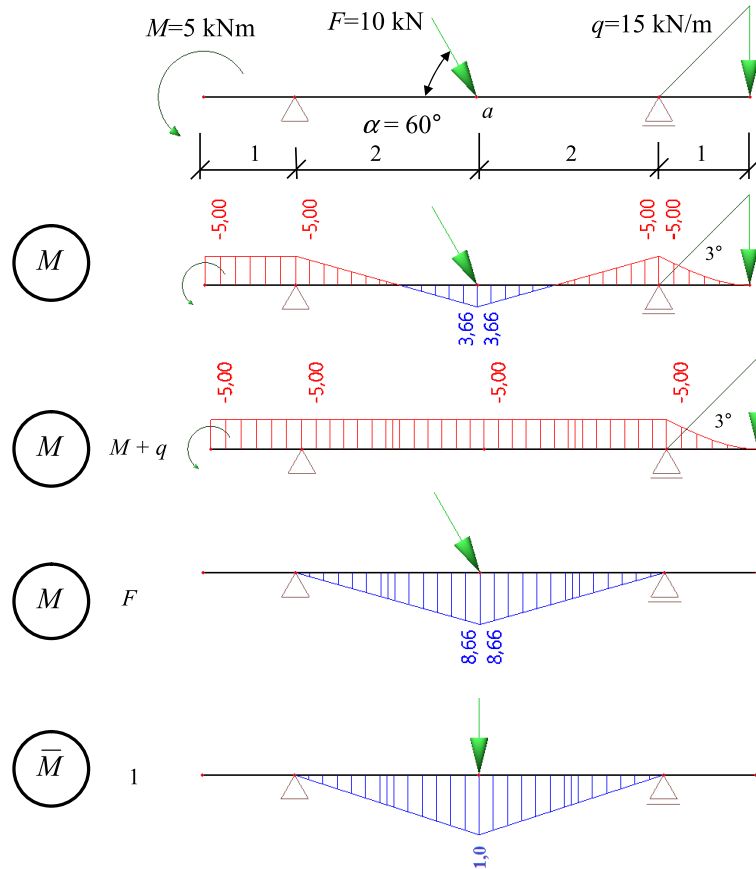
$$\varphi_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} \left( -\frac{ql^2}{6} \right) (-l)l = \frac{ql^3}{24EI} \quad (1.3)$$

Řešení se liší od předešlého příkladu pouze volbou neznámé virtuální veličiny. Při výpočtu pootočení se volí za virtuální veličinu jednotkový moment.



## 1.2 Příklad 2 – rovinný staticky určitý nosník

Určete svislý průhyb uprostřed nosníku, který je zatížen osamělou silou, momentem a trojúhelníkovým zatížením. Schéma nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 1.3 na str. 4.



Obrázek 1.3: Zadání a řešení příkladu

U tohoto příkladu je vhodné využít princip superpozice a určit svislou deformaci od jednotlivých složek zatížení.

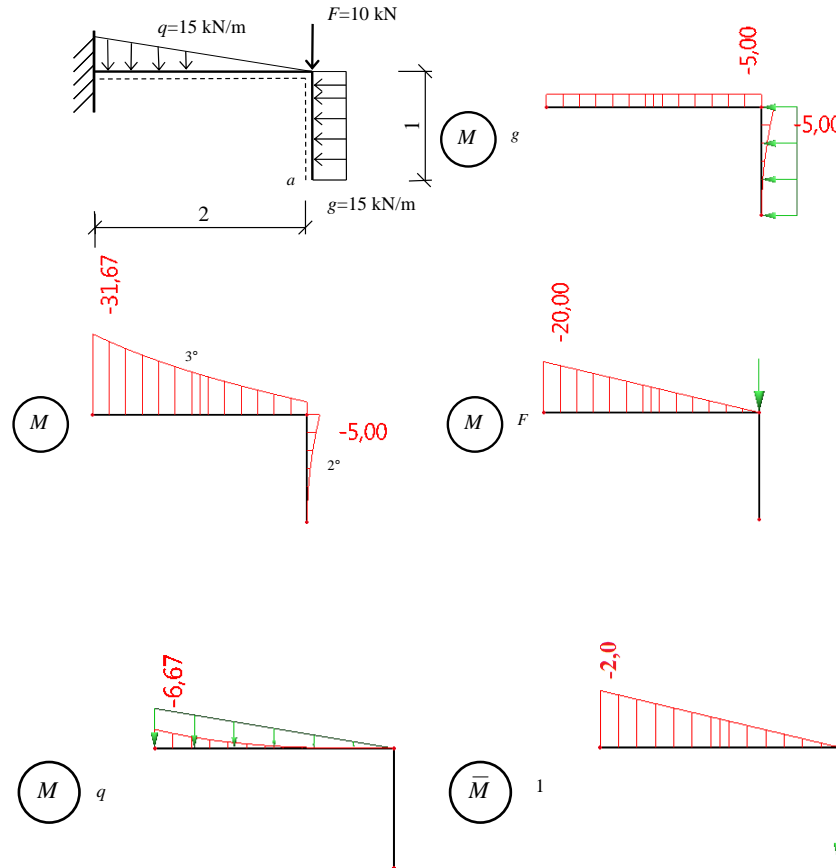
$$w_{a,M+q} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = 2 \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(-5)(1)2 \right] = -\frac{10}{EI} \quad (1.4)$$

$$w_{a,F} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = 2 \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3}(8,66)(1)2 \right] = \frac{11,55}{EI} \quad (1.5)$$

$$w_a = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{-10,00 + 11,55}{EI} = \frac{1,55}{EI} \quad (1.6)$$

### 1.3 Příklad 3 – rovinný staticky určitý nosník

Určete svislý průhyb na volném konci konzoly, která je zatížena osamělou silou a spojitým zatížením s konstantním a lineárním průběhem. Schéma nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 1.4 na str. 5.



Obrázek 1.4: Zadání a řešení příkladu

$$w_{a,F} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3}(-20)(-2)2 \right] = \frac{26,67}{EI} \quad (1.7)$$

$$w_{a,q} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{5}(-6,67)(-2)2 \right] = \frac{5,34}{EI} \quad (1.8)$$

$$w_{a,g} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(-5)(-2)2 \right] = \frac{10,00}{EI} \quad (1.9)$$

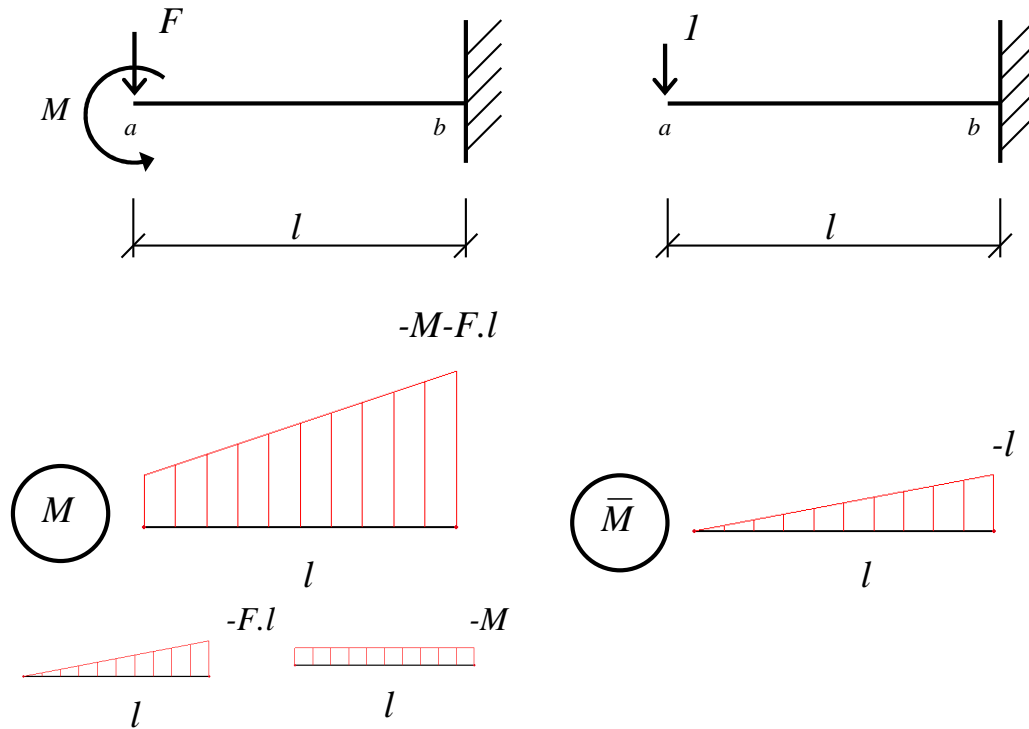
$$w_a = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{26,67 + 5,34 + 10,00}{EI} = \frac{42,01}{EI} \quad (1.10)$$

U rovinného lomeného nosníku je postup výpočtu obdobný jako u spojitých nosníků. Výpočet deformace se rozdělí na jednotlivé pruty, kde se opět násobí příslušné momentové obrazce od skutečného zatížení a virtuální veličiny.

## 1.4 Příklad 4 – rovinný staticky určitý nosník

### 1.4.1 Svislý průhyb volného konce

Určete svislý průhyb na volném konci konzoly, která je zatížena silou a momentem. Schéma konzoly a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.5 na str. 6.



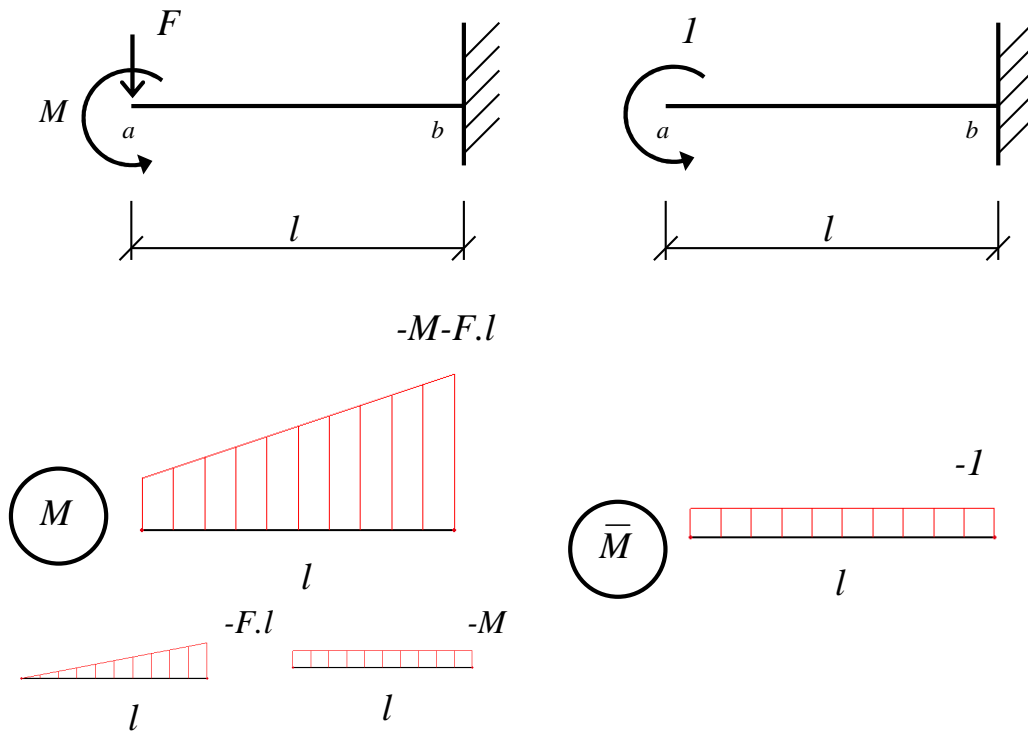
Obrázek 1.5: Zadání a řešení příkladu

$$w_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{2}(F)(l)(l) \right) \left( -\frac{2}{3}l \right) + ((-M)(l)) \left( -\frac{1}{2}l \right) \right] = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} \quad (1.11)$$

U uvedeného příkladu je vhodné využít princip superpozice a určit svislou deformaci postupně od jednotlivých složek zatížení.

### 1.4.2 Pootočení volného konce

Určete pootočení na volném konci konzoly, která je zatížena silou a momentem. Schéma konzoly a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.6 na str. 7.



Obrázek 1.6: Zadání a řešení příkladu

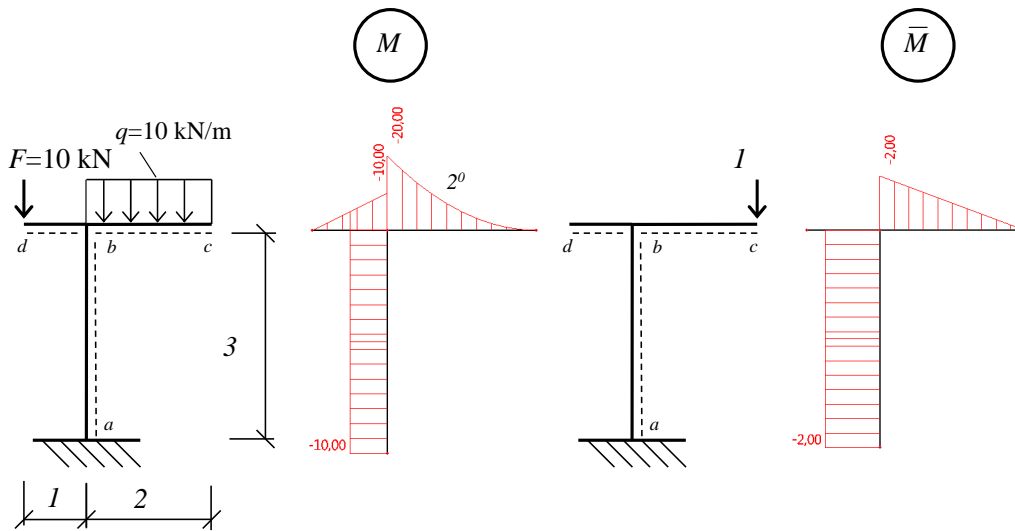
$$\varphi_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{2}(F)(l)(l) \right) (-l) + ((-M)(l)) (-l) \right] = \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI} \quad (1.12)$$

U řešení deformace příkladu je vhodné využít princip superpozice a určit pootočení od jednotlivých složek zatížení.

## 1.5 Příklad 5 – rovinný staticky určitý rám

### 1.5.1 Konstantní tuhost celé konstrukce

Určete svislý průhyb v bodě  $c$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.7 na str. 8.



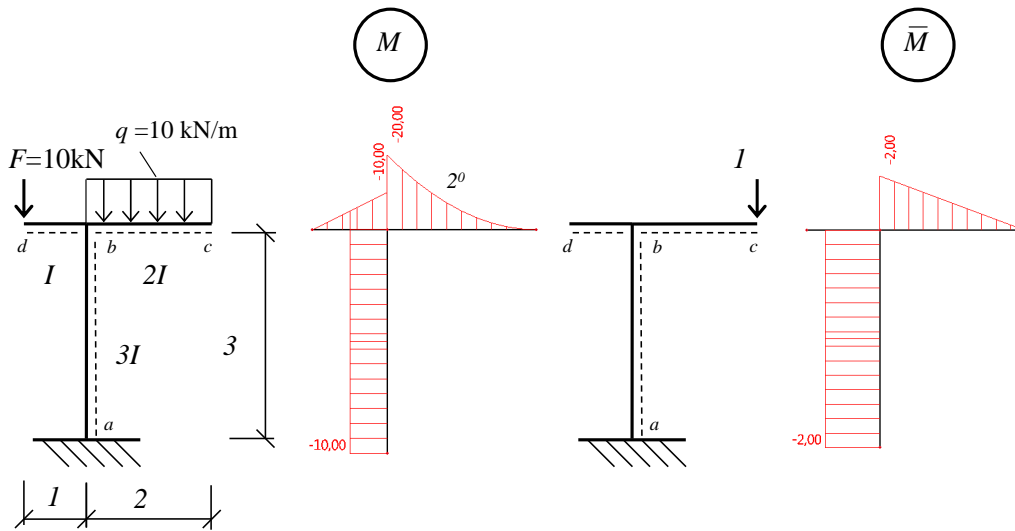
Obrázek 1.7: Zadání a řešení příkladu

$$w_c = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ ((-10)(-2)(3)) + \left( \frac{1}{4}(-20)(-2)(2) \right) \right] = \frac{60 + 20}{EI} = \frac{80}{EI} \quad (1.13)$$

Postup výpočtu deformace u rovinného rámu je obdobný jako u spojitéch nosníků. Výpočet deformace se rozdělí na jednotlivé pruty, kde se opět násobí příslušné momentové obrazce od skutečného zatížení a virtuální veličiny.

### 1.5.2 Různá tuhost jednotlivých prutů konstrukce

Určete svislý průhyb v bodě  $c$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.8 na str. 9.



Obrázek 1.8: Zadání a řešení příkladu

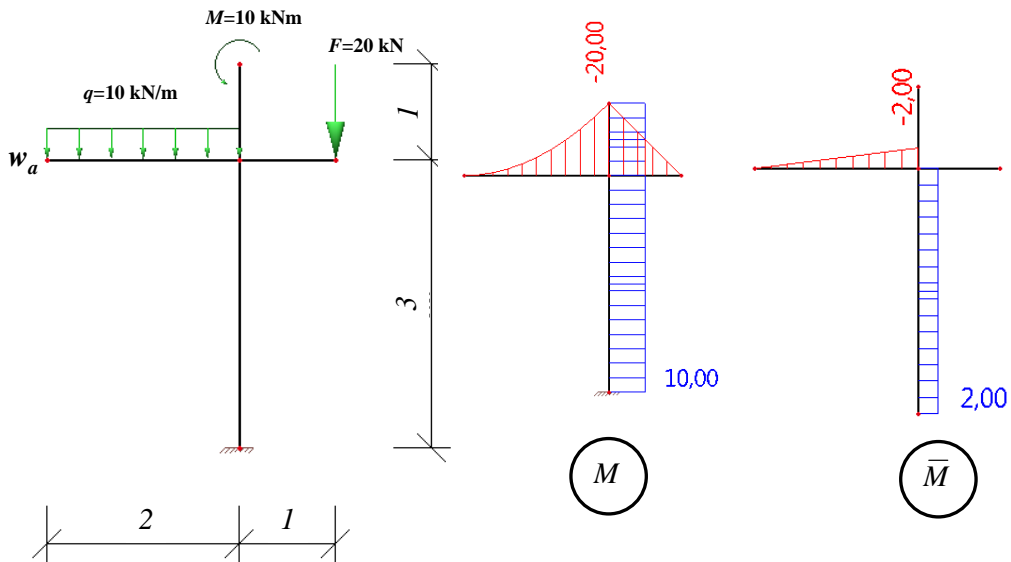
$$w_c = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{3EI} [(-10)(-2)(3)] + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{4}(-20)(-2)(2) \right] = \frac{20 + 10}{EI} = \frac{30}{EI} \quad (1.14)$$

V případech, kdy je tuhost jednotlivých prutů na konstrukci rozdílná, je nutné příslušné tuhosti prutů zohlednit ve výpočtu.

## 1.6 Příklad 6 – rovinný staticky určitý rám

### 1.6.1 Svislý posun

Určete svislý průhyb v bodě  $a$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.9 na str. 10.

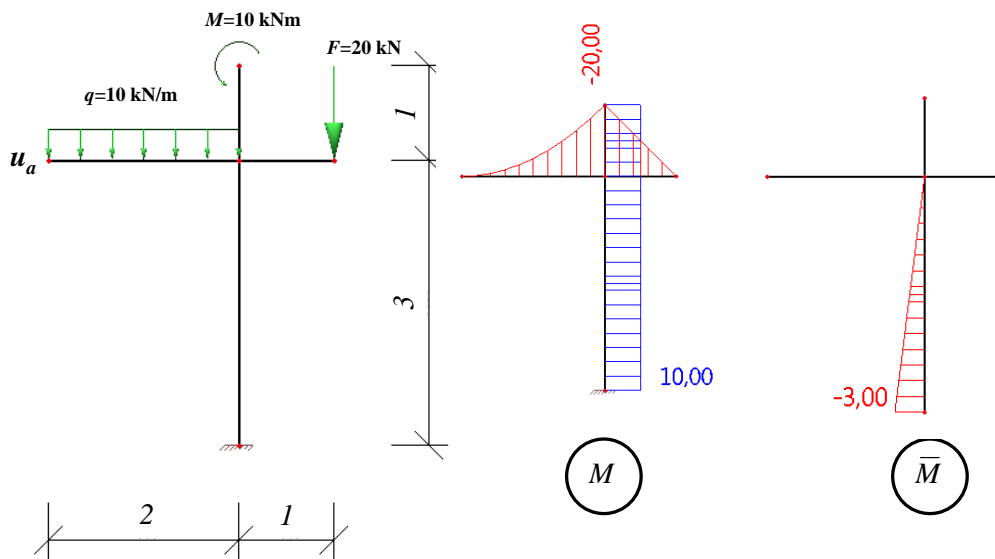


Obrázek 1.9: Zadání a řešení příkladu

$$w_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{4}(-20)(-2)(2) \right) + ((10)(2)(3)) \right] = \frac{20 + 60}{EI} = \frac{80}{EI} \quad (1.15)$$

### 1.6.2 Vodorovný posun

Určete vodorovný posun v bodě  $a$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.10 na str. 11.



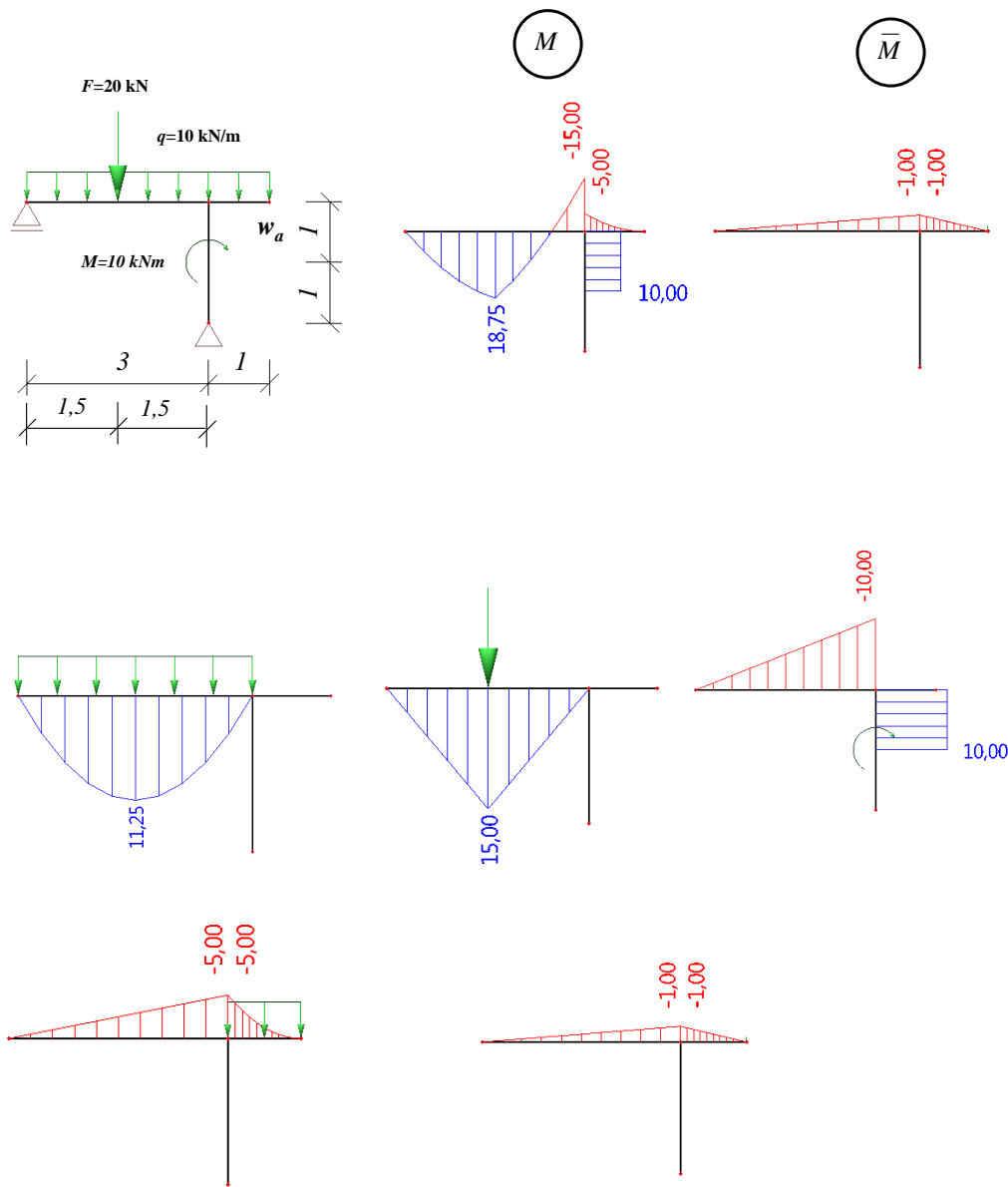
Obrázek 1.10: Zadání a řešení příkladu

$$u_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(10)(-3)(3) \right] = -\frac{45}{EI} \quad (1.16)$$



## 1.7 Příklad 7 – rovinný staticky určitý rám

Určete svislý průhyb v bodě  $a$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.11 na str. 12.



Obrázek 1.11: Zadání a řešení příkladu

$$w_{a,q1} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3}(11,25)(-1)(3) \right] = -\frac{11,25}{EI} \quad (1.17)$$

$$w_{a,F} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{6} [(-1)(15)(3 + 1,5)] \right] = -\frac{11,25}{EI} \quad (1.18)$$

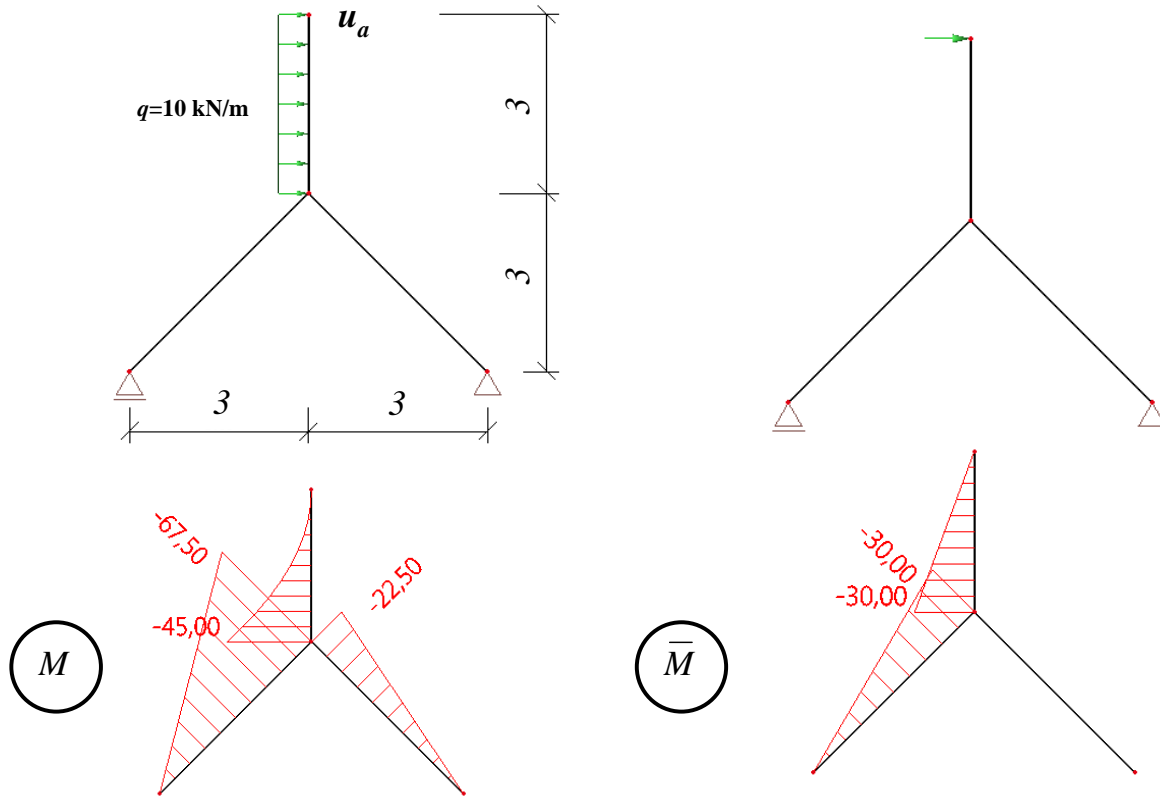
$$w_{a,M} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3}(-10)(-1)(3) \right] = \frac{10,00}{EI} \quad (1.19)$$

$$w_{a,q2} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{3}(-5)(-1)(3) \right) + \left( \frac{1}{4}(-5)(-1)(1) \right) \right] = \frac{6,25}{EI} \quad (1.20)$$

$$w_a = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{-11,25 - 11,25 + 10 + 6,25}{EI} = -\frac{6,25}{EI} \quad (1.21)$$

## 1.8 Příklad 8 – rovinný staticky určitý rám

Určete vodorovný posun v bodě  $a$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.12 na str. 14.



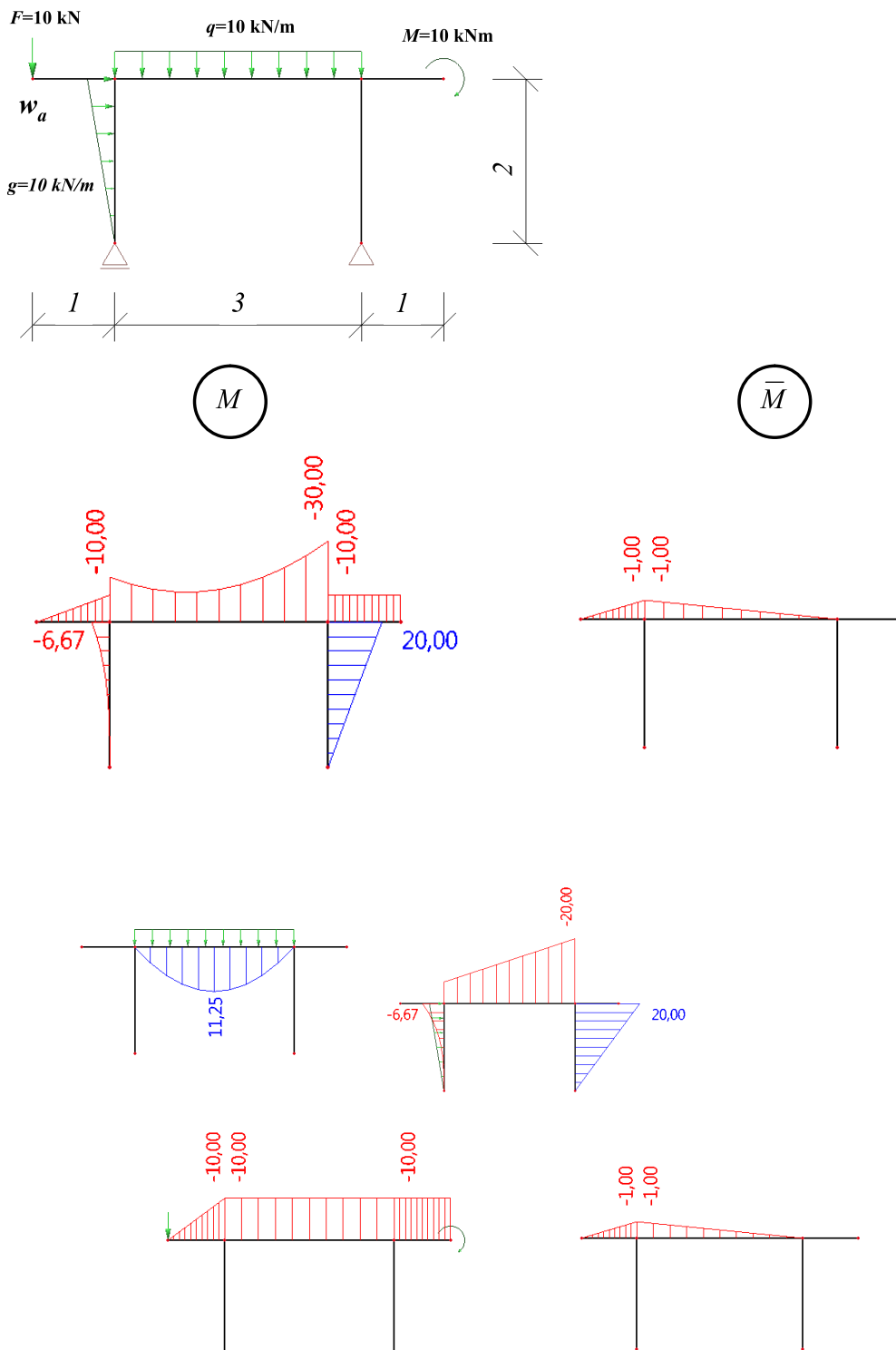
Obrázek 1.12: Zadání a řešení příkladu

$$u_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{3}(-67,5)(-3)\sqrt{3^2 + 3^2} \right) + \left( \frac{1}{4}(-45)(-3)(3) \right) \right] = \quad (1.22)$$

$$= \frac{286,38 + 101,25}{EI} = \frac{387,63}{EI} \quad (1.23)$$

## 1.9 Příklad 9 – rovinný staticky určitý rám

Určete svislý průhyb v bodě  $a$  na rámové konstrukci. Schéma konstrukce a zatížení je uvedeno v levé části na obr. 1.13 na str. 15.



Obrázek 1.13: Zadání a řešení příkladu

$$w_{a,q} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3}(11,25)(-1)(3) \right] = -\frac{11,25}{EI} \quad (1.24)$$

$$w_{a,g} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{6}(-1) [(-20) + (2)(-6,66)(3)] \right] = \frac{16,67}{EI} \quad (1.25)$$

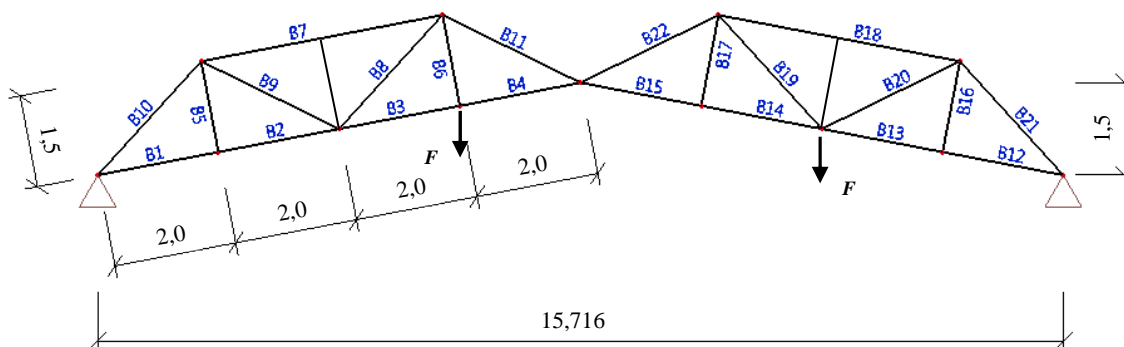
$$w_{a,M} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{3}(-10)(-1)(1) \right) + \left( \frac{1}{2}(-10)(-1)(3) \right) \right] = \quad (1.26)$$

$$= \frac{3,33 + 15,00}{EI} = \frac{18,33}{EI} \quad (1.27)$$

$$w_a = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{-11,25 - 16,665 + 18,33}{EI} = -\frac{23,75}{EI} \quad (1.28)$$

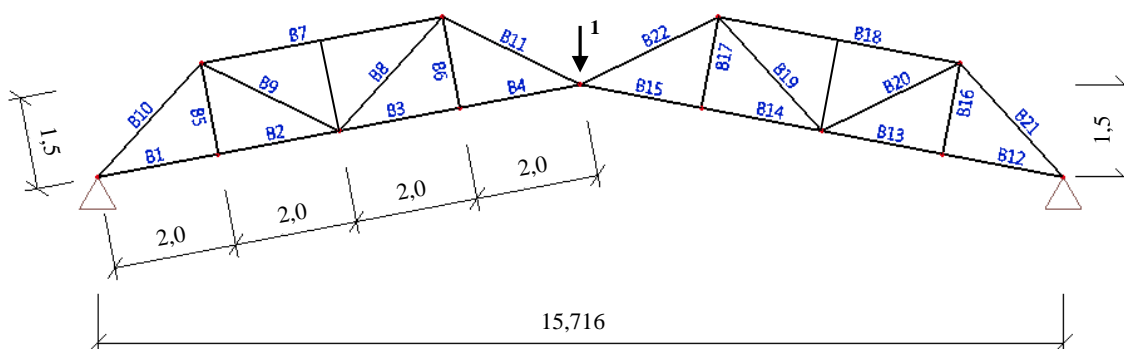
## 1.10 Příklad 10 – příhradový nosník

Určete svislý posun uprostřed rozpětí příhradového nosníku. Průřezy jsou tvořeny ocelovým trubkovým profilem s oceli S235 průměru 20 mm, tloušťka stěny je 2 mm. Modul pružnosti oceli je  $E = 210$  GPa. Schéma příhradového nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 1.14 na str. 17.



Obrázek 1.14: Schéma konstrukce

Schéma zatížení jednotkovou silou je zobrazeno na obr. 1.15 na str. 17.



Obrázek 1.15: Schéma konstrukce – zatížení jednotkovou silou

U příhradové konstrukce nosníku jsou v případě styčnickového zatížení vnitřní síly pouze normálové. Posouvající síly a ohybové momenty jsou nulové. V tomto případě se opět použije Maxwell-Mohrův vzorec (1.1) pro výpočet deformace, ale použijeme pouze člen, který zahrnuje normálové síly. Protože jsou v důsledku přijatých výpočtových předpokladů (zatížení působí ve styčnicích, styčnický jsou považovány na kloubové) normálové síly na prutech po celé jejich délce konstantní, můžeme určitý integrál součinu funkcí normálových sil ze vztahu (1.1) převést v součet součinů příslušných veličin, jak je uvedeno ve výrazu (1.29). Výpočet ve výhodné realizovat v tabulce.

### 1.10. PŘÍKLAD 10 – PŘÍHRADOVÝ NOSNÍK

Hodnoty normálových sil od skutečného zatížení a pro jednotkovou sílu jsou uvedeny v tab. 1.1 na str. 18.

Prut	$N_i$ [kN]	$\bar{N}_i$ [kN]	$l_i$ [m]	$N_i \bar{N}_i l_i$
1	-30,527	-2,667	2,000	162,81
2	-30,527	-2,667	2,000	162,81
3	-23,979	-2,667	2,000	127,89
4	-22,104	-2,667	2,000	117,89
5	0,000	0,000	1,500	0,00
6	9,823	0,000	1,500	0,00
7	-6,548	0,000	4,000	0,00
8	-4,093	0,000	2,500	0,00
9	4,063	0,000	2,500	0,00
10	-4,093	0,000	2,500	0,00
11	-12,278	0,000	2,500	0,00
12	-27,722	-2,667	2,000	147,85
13	-27,722	-2,667	2,000	147,85
14	-25,847	-2,667	2,000	137,85
15	-25,847	-2,667	2,000	137,85
16	0,000	0,000	1,500	0,00
17	0,000	0,000	1,500	0,00
18	-13,097	0,000	4,000	0,00
19	8,186	0,000	2,500	0,00
20	8,186	0,000	2,500	0,00
21	-8,186	0,000	2,500	0,00
22	-8,186	0,000	2,500	0,00
$\Sigma N_i \bar{N}_i l_i$				<b>1142,78</b>

Tabulka 1.1: Normálové síly pro skutečné a jednotkové zatížení

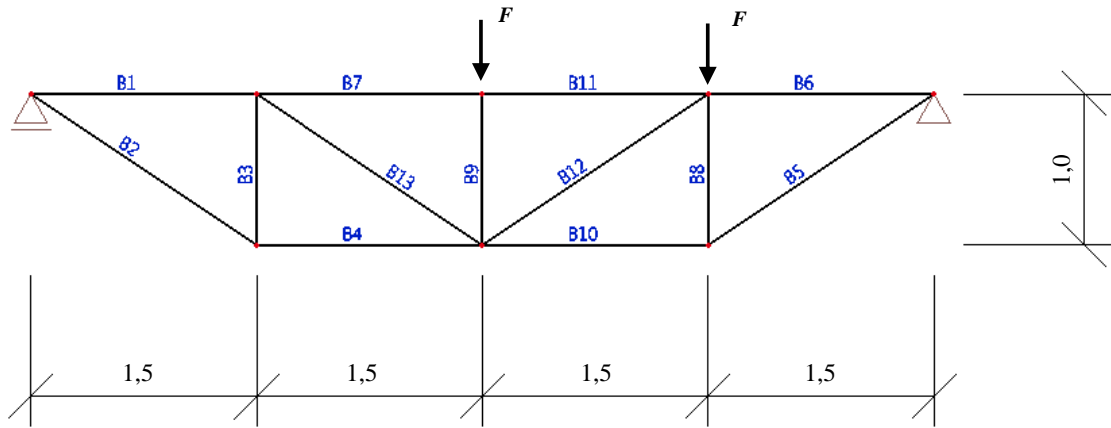
Výsledná deformace se dopočte:

$$w = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=21} N_i \bar{N}_i l_i = \frac{1142,78 \cdot 1000}{210000 \cdot 10^6 \cdot 176,715 \cdot 10^{-6}} = \quad (1.29)$$

$$= 0,050946 \text{ m} = 50,946 \text{ mm} \quad (1.30)$$

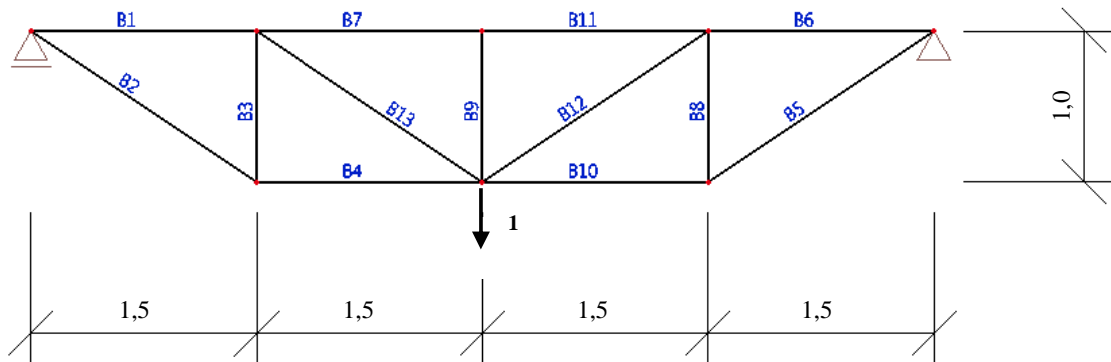
## 1.11 Příklad 11 – příhradový nosník

Určete svislý posun na spodní pásnici uprostřed rozpětí příhradového nosníku. Průřezy jsou tvořeny ocelovým trubkovým profilem s oceli S235 průměru 20 mm, tloušťka stěny je 2 mm. Modul pružnosti oceli je  $E = 210$  GPa. Schéma příhradového nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 1.16 na str. 19.



Obrázek 1.16: Schéma konstrukce

Schéma zatížení jednotkovou silou je zobrazeno na obr. 1.17 na str. 19.



Obrázek 1.17: Schéma konstrukce – zatížení jednotkovou silou



### 1.11. PŘÍKLAD 11 – PŘÍHRADOVÝ NOSNÍK

Hodnoty normálových sil od skutečného zatížení a pro jednotkovou sílu jsou uvedeny v tab. 1.2 na str. 20.

Prut	$N_i$ [kN]	$\bar{N}_i$ [kN]	$l_i$ [m]	$N_i \bar{N}_i l_i$
1	-11,250	-0,750	1,500	12,66
2	13,520	0,901	1,803	21,97
3	-7,500	-0,500	1,000	3,75
4	11,250	0,750	1,500	12,66
5	22,530	0,901	1,803	36,62
6	-18,750	-0,750	1,500	21,09
7	-22,500	-1,500	1,500	50,63
8	-12,500	-0,500	1,000	6,25
9	-10,000	0,000	1,000	0,00
10	18,750	0,750	1,500	21,09
11	-22,500	-1,500	1,500	50,63
12	4,510	0,901	1,803	7,33
13	13,520	0,901	1,803	21,97
$\Sigma N_i \bar{N}_i l_i$				<b>266,64</b>

Tabulka 1.2: Normálové síly pro skutečné a jednotkové zatížení

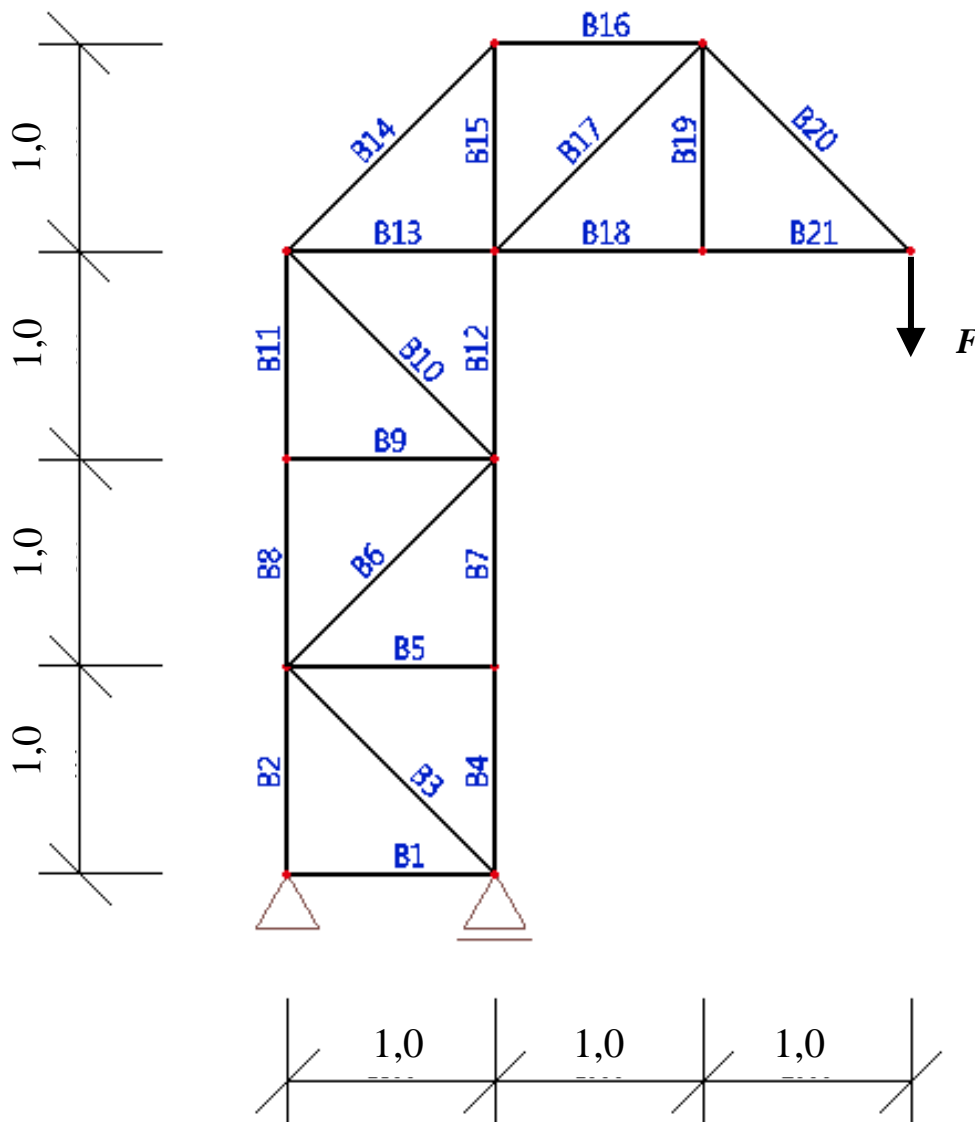
Výsledná deformace se dopočte:

$$w = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=13} N_i \bar{N}_i l_i = \frac{266,64 \cdot 1000}{210000 \cdot 10^6 \cdot 176,715 \cdot 10^{-6}} = \quad (1.31)$$

$$= 0,0112267 \text{ m} = 11,2267 \text{ mm} \quad (1.32)$$

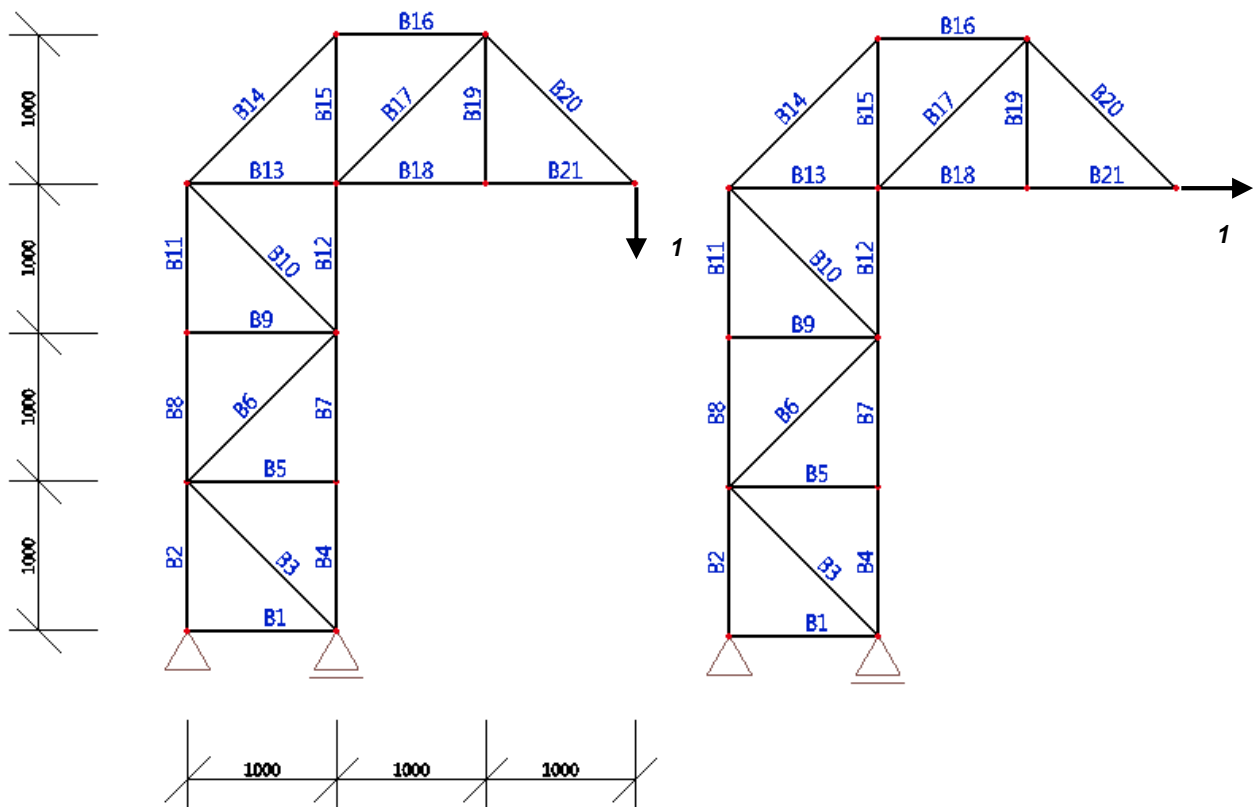
## 1.12 Příklad 12 – příhradový nosník

Určete svislý a vodorovný posun na převislém konci příhradového nosníku. Průřezy jsou tvořeny ocelovým trubkovým profilem z oceli S235 průměru 38 mm, tloušťka stěny je 4 mm. Modul pružnosti oceli je  $E = 210$  GPa a velikost síly je  $F = 30$  kN. Schéma příhradového nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 1.18 na str. 21.



Obrázek 1.18: Schéma konstrukce

Schéma zatížení jednotkovou silou pro svislý a vodorovný směr je zobrazeno na obr. 1.19 na str. 22.



Obrázek 1.19: Schéma konstrukce – zatížení jednotkovou silou ve svislém a vodorovném směru

## 1.12. PŘÍKLAD 12 – PŘÍHRADOVÝ NOSNÍK

Hodnoty normálových sil od skutečného zatížení a pro jednotkovou sílu ve svislém a vodorovném směru jsou uvedeny v tab. 1.3 na str. 23.

Prut	$N_i$ [kN]	$N_{i,svis.}$ [kN]	$N_{i,vod.}$ [kN]	$l_i$ [m]	$N_{i,svis.} \bar{N}_i l_i$	$N_{i,vod.} \bar{N}_i l_i$
1	0,000	0,000	1,000	1,000	0,00	0,00
2	60,000	2,000	3,000	1,000	120,00	180,00
3	0,000	0,000	-1,414	1,414	0,00	0,00
4	-90,000	-3,000	-2,000	1,000	270,00	180,00
5	0,000	0,000	0,000	1,000	0,00	0,00
6	0,000	0,000	1,414	1,414	0,00	0,00
7	-90,000	-3,000	-2,000	1,000	270,00	180,00
8	60,000	2,000	1,000	1,000	120,00	60,00
9	0,000	0,000	0,000	1,000	0,00	0,00
10	0,000	0,000	-1,414	1,414	0,00	0,00
11	60,000	2,000	1,000	1,000	120,00	60,00
12	-90,000	-3,000	0,000	1,000	270,00	0,00
13	-60,000	-2,000	1,000	1,000	120,00	-60,00
14	84,853	2,828	0,000	1,414	339,36	0,00
15	-60,000	-2,000	0,000	1,000	120,00	0,00
16	60,000	2,000	0,000	1,000	120,00	0,00
17	-42,426	-1,414	0,000	1,414	84,84	0,00
18	-30,000	-1,000	1,000	1,000	30,00	-30,00
19	0,000	0,000	0,000	1,000	0,00	0,00
20	42,426	1,414	0,000	1,414	84,84	0,00
21	-30,000	-1,000	1,000	1,000	30,00	-30,00
				$\Sigma N_i \bar{N}_i l_i$	<b>2 099,04</b>	<b>540,00</b>

Tabulka 1.3: Normálové síly pro skutečné a jednotkové zatížení

Výsledná deformace ve svislém a vodorovném směru se dopočte:

$$w = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=21} N_i \bar{N}_i l_i = \frac{2099,04 \cdot 1000}{210000 \cdot 10^6 \cdot 427,257 \cdot 10^{-6}} = \quad (1.33)$$

$$= 0,0233944 \text{ m} = 23,3944 \text{ mm} \quad (1.34)$$

$$u = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=21} N_i \bar{N}_i l_i = \frac{540,0 \cdot 1000}{210000 \cdot 10^6 \cdot 427,257 \cdot 10^{-6}} = \quad (1.35)$$

$$= 0,0060184 \text{ m} = 6,0184 \text{ mm} \quad (1.36)$$

# Kapitola 2

## Staticky neurčité konstrukce

### 2.1 Stupeň statické neurčitosti

Stupeň statické neurčitosti  $n_s$  prutové soustavy, v níž střednice prutů vytvářejí uzavřené obrazce – příhrady (obdélník, čtverec, trojúhelník, lichoběžník, kruh aj.), lze podle [1] vyjádřit např. vztahem

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3), \quad (2.1)$$

kde  $u$  je počet uzavřených příhrad,  $p_k$  je počet vnitřních kloubových připojení přepočtených na jednoduché vnitřní klouby a  $a$  je počet složek reakcí vnějších vazeb.

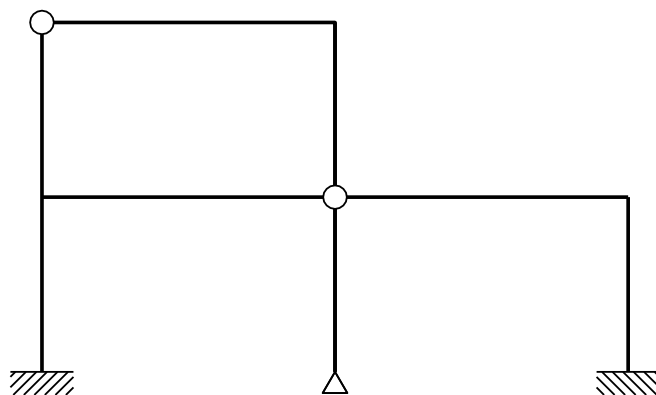
Stupeň statické neurčitosti *kloubové prutové soustavy* (tzv. příhradové konstrukce) získáme z výrazu

$$n_s = p + a - 2b, \quad (2.2)$$

kde  $p$  je počet prutů,  $b$  počet (kloubových) styčniců a  $a$  je počet složek reakcí vnějších vazeb.

### 2.2 Příklad 1

Určete stupeň statické neurčitosti rámu dle obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Příklad 1

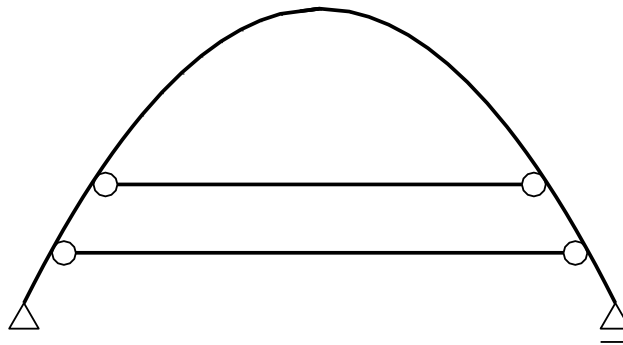
**Řešení**

Rám tvoří jeden uzavřený obrazec, jeden jednonásobný vnitřní kloub (spojuje jen 2 pruty) a jeden trojnásobný vnitřní kloub (spojuje 4 pruty). Je podepřen 2 vetknutími (každé z nich má 3 složky reakcí) a jedním neposuvným kloubem (2 složky reakcí). K řešení využijeme vztah (2.1):

$$n_s = 3 \cdot 1 - 4 + (8 - 3) = 4$$

**2.3 Příklad 2**

Určete stupeň statické neurčitosti oblouku se dvěma táhly dle obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Příklad 2

**Řešení**

*Jednou z možností* je řešit úlohu následující úvahou:

Odmyslíme-li si obě kloubově připojená táhla, dostaneme staticky určitou konstrukci ve formě prostě podepřeného oblouku. Víme, že v každém z táhel vzniká pouze normálová tahová síla. Tyto 2 normálové síly představují staticky neurčité veličiny, které nejsme schopni určit přímo ze tří statických podmínek rovnováhy. Jedná se tedy o  $2 \times$  staticky neurčitou úlohu.

*Druhou možností* řešení představuje využití vztahu (2.1):

Táhla nám v konstrukci vymezují 2 uzavřené oblasti. Každý ze 4 kloubů na koncích táhel je kloubem jednonásobným, v kloubových podporách oblouku vznikají 3 složky reakcí.

$$n_s = 3 \cdot 2 - 4 + (3 - 3) = 2$$

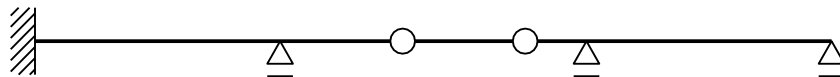
**2.4 Příklad 3**

Určete stupeň statické neurčitosti spojitého nosníku s klouby dle obr. 2.3.

**Řešení**

Dosazením do vztahu (2.1):

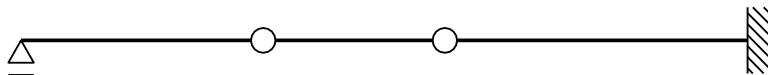
$$n_s = 3 \cdot 0 - 2 + (6 - 3) = 1$$



Obrázek 2.3: Příklad 3

## 2.5 Příklad 4

Určete stupeň statické neurčitosti nosníku s klouby dle obr. 2.4.



Obrázek 2.4: Příklad 4

### Řešení

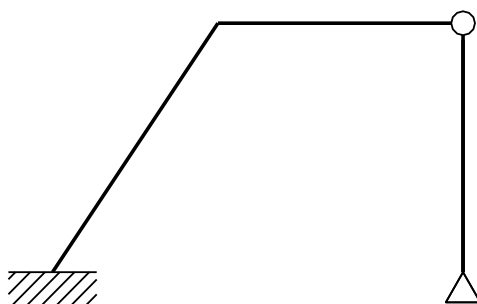
Po dosazení do vztahu (2.1):

$$n_s = 3 \cdot 0 - 2 + (4 - 3) = -1$$

Stupeň statické neurčitosti vychází  $n_s = -1$ , jedná se tedy o staticky *přeurčitou* konstrukci, mechanismus, který je ve stavební praxi nepoužitelný.

## 2.6 Příklad 5

Určete stupeň statické neurčitosti kosoúhlého rámu dle obr. 2.5.



Obrázek 2.5: Příklad 5

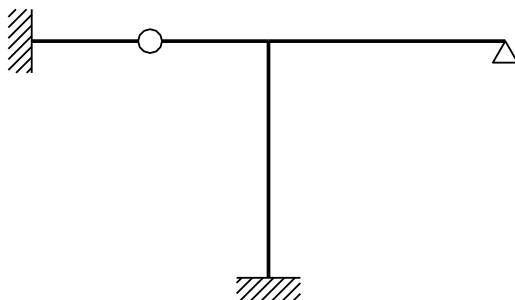
### Řešení

Dosazením do vztahu (2.1):

$$n_s = 3 \cdot 0 - 1 + (5 - 3) = 1$$

## 2.7 Příklad 6

Určete stupeň statické neurčitosti pravoúhlého rámu dle obr. 2.6.



Obrázek 2.6: Příklad 6

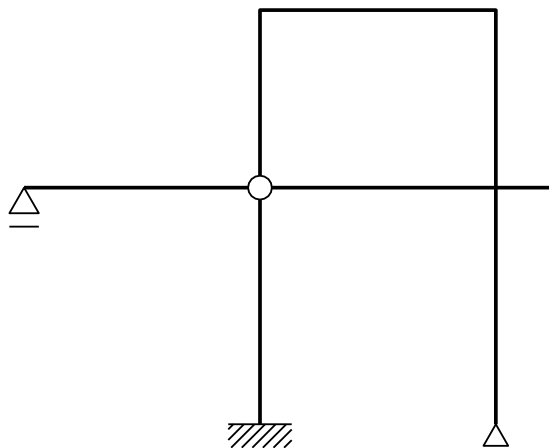
### Řešení

Dosazením do vztahu (2.1):

$$n_s = 3 \cdot 0 - 1 + (8 - 3) = 4$$

## 2.8 Příklad 7

Určete stupeň statické neurčitosti uzavřeného rámu dle obr. 2.7.



Obrázek 2.7: Příklad 7

### Řešení

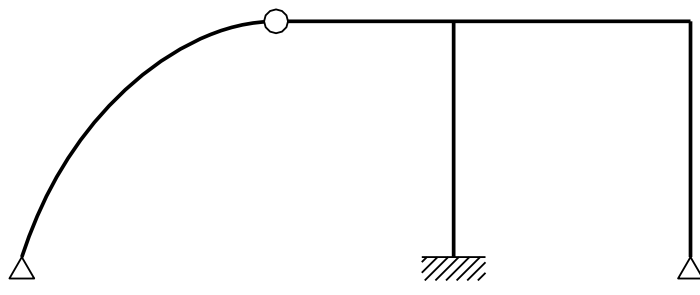
Rám obsahuje jednu uzavřenou oblast. Vnitřní kloub spojuje 4 pruty (přepočtením na jednonásobné klouby dostáváme  $p_k=3$ ). Dosazením do vztahu (2.1) dostáváme

$$n_s = 3 \cdot 1 - 3 + (6 - 3) = 3.$$



## 2.9 Příklad 8

Určete stupeň statické neurčitosti konstrukce na obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Příklad 8

### Řešení

Dosazením do vztahu (2.1):

$$n_s = 3 \cdot 0 - 1 + (6 - 3) = 2$$

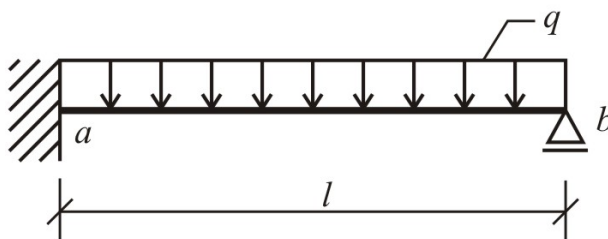
# Kapitola 3

## Silová metoda jednoduchého staticky neurčitého nosníku

Jednoduchý staticky neurčitý nosník tvoří přímý prut, podepřený více než třemi vnějšími vazbami. Zatížení nosníku může být silové nebo deformační, kam spadá změna teploty nebo popuštění podpor.

### 3.1 Příklad 1

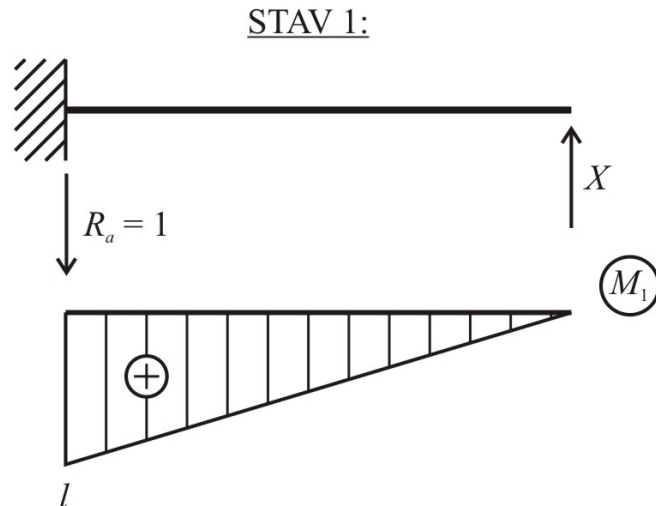
Určete reakce na jednostranně vetknutém nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 3.1. Proved'te obecné řešení. Ohybová tuhost  $EI = \text{konst.}$



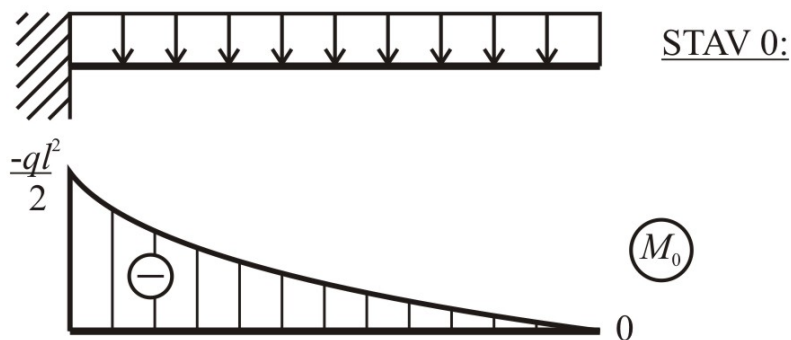
Obrázek 3.1: Statické schéma staticky neurčitého nosníku z příkladu 1

#### 3.1.1 Základní soustava

Konstrukce je jedenkrát staticky neurčitá. Pro řešení lze zvolit dva způsoby uvolnění přebytečné vazby. Na obr. 3.2 a 3.3 je zobrazena základní soustava, která souvisí s uvolněním přebytečné svislé vazby v pravé podpoře. Na obr. 3.2 a 3.3 jsou zobrazeny rovněž průběhy ohybových momentů na základní soustavě od zatěžovacího stavu 1 a  $p$ , kdy na konstrukci působí jednotková síla  $\bar{X}_1 = 1$  v místě a směru staticky neurčité veličiny  $X_1 = R_{bz}$ , resp. skutečné zatížení.



Obrázek 3.2: Průběh ohybových momentů od zatěžovacího stavu 1

Obrázek 3.3: Průběh ohybových momentů od zatěžovacího stavu  $p$ 

### 3.1.2 Určení staticky neurčité veličiny

V dalším výpočtu je nutno sestavit a vyřešit rovnici o neznámé  $X_1$ :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1p} = 0. \quad (3.1)$$

Veličiny označené  $\delta_{11}$  a  $\delta_{1p}$  jsou tzv. přetvární součinitelé, které lze získat integrací příslušných momentových ploch z obr. 3.2 a 3.3 podle vztahů 4.2, 4.3:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \frac{l^3}{3EI}, \quad (3.2)$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{4} \cdot -\frac{q \cdot l^2}{2} \cdot l \cdot l \right] = -\frac{q \cdot l^4}{8EI} . \quad (3.3)$$

Po dosazení přetvárných součinitelů (3.2) a (3.3) do rovnice (3.1) a jejím vyřešení lze získat výslednou staticky neurčitou veličinu:

$$X_1 = R_{bz} = \frac{q \cdot l^4}{8EI} \cdot \frac{3EI}{l^3} = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \text{ [kN]} (\uparrow) . \quad (3.4)$$

Zbývající reakce ve vnějších vazbách se určí z podmínek rovnováhy:  $R_{az} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l \text{ [kN]} (\uparrow)$  a  $M_{ay} = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2 \text{ [kNm]} (\curvearrowright)$ .

## 3.2 Příklad 2

Na nosník z příkladu č.1 nechte působit rovněž popuštění podpor  $w_a = 15 \text{ [mm]} (\downarrow)$  a  $w_b = 20 \text{ [mm]} (\downarrow)$ . Ohybová tuhost je rovna  $EI = 32000 \text{ [kNm}^2\text{]}$ , zatížení  $q = 6 \text{ kN/m}$  a rozpětí nosníku  $l = 5 \text{ m}$ .

### 3.2.1 Určení staticky neurčité veličiny

V dalším výpočtu je nutno sestavit a vyřešit rovnici o neznámé  $X_1$ , která obsahuje na rozdíl od rovnice (3.1) také členy, vyjadřující popuštění podpor:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1p} + \delta_{10p} = d_1 . \quad (3.5)$$

V rovnici (3.5) se člen  $d_1$  váže k popuštění podpory v místě uvolněné vazby, v daném případě je tedy:

$$d_1 = -w_b . \quad (3.6)$$

Znaménko mínus znamená, že popuštění je opačného směru než navržený směr staticky neurčité veličiny  $X_1 = R_b$ .

Člen  $\delta_{10p}$  se pak váže k levé podpoře základní soustavy, tedy k vetknutí. Rovná se:

$$\delta_{10p} = -\sum_{i=1}^r R_{r,i} \cdot \delta_r . \quad (3.7)$$

Výraz (3.7) obsahuje součet součinů reakcí v podpoře základní soustavy  $R_{r,i}$  a příslušných složek popuštění podpory  $\delta_r$  ( $r$  je rovno násobnosti vazby). Znaménko u prvku  $\delta_r$  souvisí se směrem příslušné reakce. Pro příklad 2 je tedy:

$$\delta_{10p} = -1 \cdot w_a , \quad (3.8)$$

jelikož popuštění  $w_a$  má shodný směr jako reakce  $R_{az1}$  na základní soustavě od zatěžovacího stavu 1.

Výsledný tvar rovnice (3.5) pak je:

$$\frac{l^3}{3EI} \cdot X_1 - \frac{q \cdot l^4}{8EI} - w_a = -w_b . \quad (3.9)$$

### 3.3. PŘÍKLAD 3

Po úpravě lze získat výslednou staticky neurčitou veličinu  $X_1 = R_b$ :

$$X_1 = R_{bz} = \left(-w_b + \frac{q \cdot l^4}{8EI} + w_a\right) \cdot \frac{3EI}{l^3} \text{ [kN]} (\uparrow). \quad (3.10)$$

Po dosazení konkrétních hodnot do (3.10) pak vychází skutečné hodnoty reakcí:  $R_{az} = 22,59 \text{ [kN]} (\uparrow)$ ,  $R_{bz} = 7,41 \text{ [kN]} (\uparrow)$  a  $M_{ay} = 37,95 \text{ [kNm]} (\curvearrowright)$ .

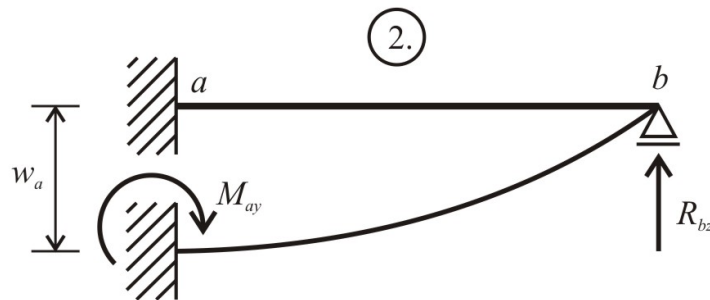
Detailnější pohled na vliv popuštění podpory na velikosti a směr reakcí poskytnou i následující změny v zadání příkladu 2:

- **Varianta 1:**

Na nosník působí pouze silové zatížení  $q = 6 \text{ kN/m}$  ( $w_a = 0$ ,  $w_b = 0$ ). Výsledné reakce ve vnějších vazbách pak vychází  $R_{az} = 18,75 \text{ [kN]} (\uparrow)$ ,  $R_{bz} = 11,25 \text{ [kN]} (\uparrow)$  a  $M_{ay} = 18,75 \text{ [kNm]} (\curvearrowright)$ .

- **Varianta 2:**

Nosník je namáhán pouze popuštěním podpory  $w_a = 15 \text{ mm}$  ( $\downarrow$ ) ( $q = 0 \text{ kN/m}$  a  $w_b = 0$ ). Výsledné reakce ve vnějších vazbách pak vychází  $R_{az} = 11,52 \text{ [kN]} (\downarrow)$ ,  $R_{bz} = 11,52 \text{ [kN]} (\uparrow)$  a  $M_{ay} = 57,6 \text{ [kNm]} (\curvearrowright)$ . Rozbor chování nosníku při tomto zatížení je zobrazen na obr. 3.4.



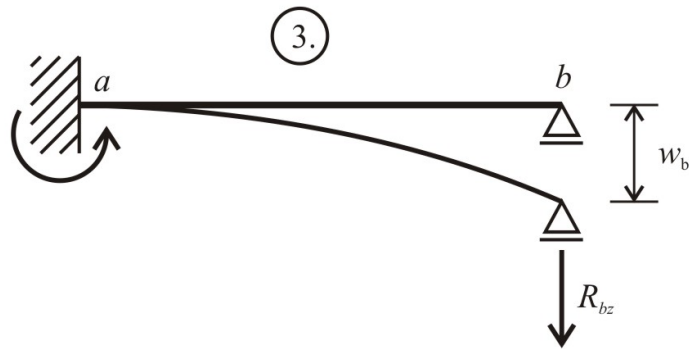
Obrázek 3.4: Rozbor chování nosníku ve variantě 2

- **Varianta 3:**

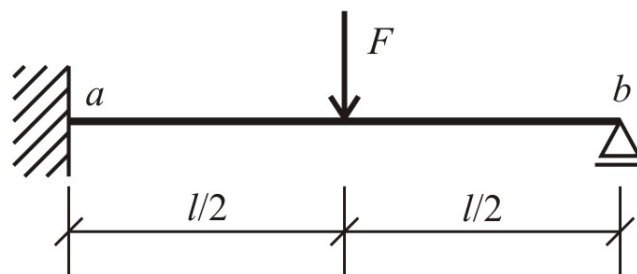
Nosník je namáhán pouze popuštěním podpory  $w_b = 15 \text{ mm}$  ( $\downarrow$ ) ( $q = 0 \text{ kN/m}$  a  $w_a = 0$ ). Výsledné reakce ve vnějších vazbách pak vychází  $R_{az} = 11,52 \text{ [kN]} (\uparrow)$ ,  $R_{bz} = 11,52 \text{ [kN]} (\downarrow)$  a  $M_{ay} = 57,6 \text{ [kNm]} (\curvearrowright)$ . Rozbor chování nosníku při tomto zatížení je zobrazen na obr. 3.5.

### 3.3 Příklad 3

Určete reakce na jednostranně vetknutém nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 3.6. Nosník je namáhán popuštěním podpory  $w_a = 30 \text{ mm}$  ( $\downarrow$ ) a  $\varphi_a = 0,0015 \text{ rad}$  ( $\curvearrowright$ ). Proveďte nejprve obecné řešení, pak dosad'te  $F = 6 \text{ kN}$ ,  $l = 6 \text{ m}$ ,  $EI = 24000 \text{ kNm}^2$ .



Obrázek 3.5: Rozbor chování nosníku ve variantě 3



Obrázek 3.6: Statické schéma jedenkrát staticky neurčitého nosníku z příkladu 3

### 3.3.1 Výsledné řešení

Staticky neurčitá veličina se po odvození rovná:

$$X_1 = M_{ay} = \left( \varphi_a + \frac{3}{48} \cdot \frac{F \cdot l^2}{EI} - \frac{w_a}{l} \right) \cdot \frac{3EI}{l} \text{ [kNm]} (\curvearrowright). \quad (3.11)$$

Po dosazení se momentová reakce ve vetknutí rovná  $M_{ay} = 35,25 \text{ kNm}$  ( $\curvearrowright$ ). Silové reakce mají velikost  $R_{az} = 2,875 \text{ [kN]}$  ( $\downarrow$ ) a  $R_{bz} = 8,875 \text{ [kN]}$  ( $\uparrow$ ).

# Kapitola 4

## Silová metoda řešení staticky neurčitých rámu při silovém zatížení

### 4.1 Úvodní poznámka

Kapitola si neklade za cíl ozřejmit podstatu Silové metody, její teoretická východiska a obecné principy aplikace. Tato témata jsou kvalitně zpracována v dostupné odborné literatuře, např. v [1], [2]. Zde je předložen soubor původních příkladů, dosud nikde nepublikovaných, na nichž je ukázáno použití Silové metody ve výpočetní praxi.

Příklady 1 až 3 obsahují kompletní výpočet, vč. komentářů a postupných kroků vedoucích k požadovanému výsledku. Příklady 4 až 8 poskytují větší prostor k samostatnému procvičování, přičemž jsou pro snazší kontrolu a nalezení případných chyb vybaveny některými klíčovými mezivýsledky. Navíc je v příkladech 4 až 8 nabídnut výběr mezi 2 až 3 alternativními statickými schémata základní soustavy, což čtenáři umožní tříbit jeho odborný úsudek při volbě optimální strategie řešení.

V souladu se zvyklostmi, uplatňovanými ve výuce, je ve výpočtech deformací zohledněn pouze vliv ohybových momentů na jejich velikost. Vliv posouvajících sil a normálových sil je v řešených příkladech považován za nevýznamně malý, proto je zanedbán.

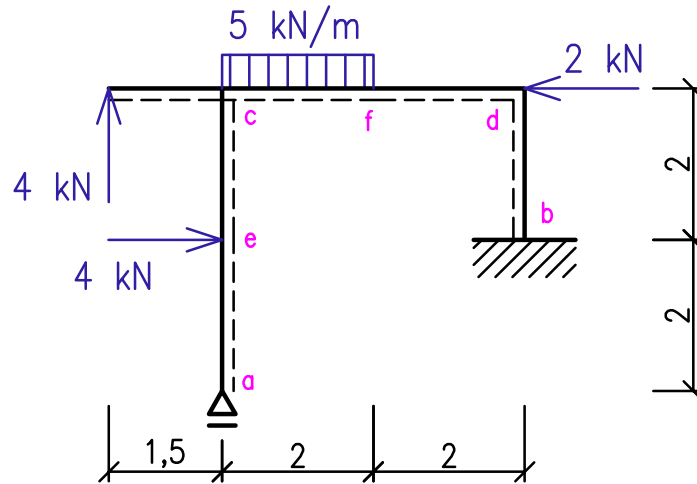
### 4.2 Příklad 1

Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.1. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $EI = \text{konst.}$

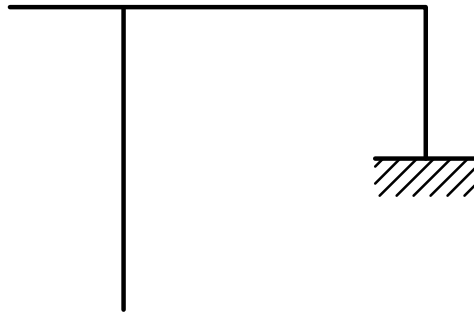
#### Řešení

Prvním krokem výpočtu je určení stupně statické neurčitosti  $n_s$ . V tomto případě  $n_s = 1$ . Znamená to, že bude potřeba uvolnit jednu z vazeb (vnějších či vnitřních), abychom získali základní, staticky a kinematically určitou soustavu. Jednou z možností je např. uvolnit jednonásobnou vazbu v bodě  $a$  (viz obr. 4.2).

Posuvný kloub v bodě  $a$  bránil posunutí pouze ve svislém směru, vznikala v něm vertikální reakce. Staticky neurčitou veličinou tedy v tomto případě *musí být svislá síla* (viz obr. 4.4). Směr této síly (nahoru, dolů) volíme libovolně, zpravidla však ve směru očekávané výsledné reakce. Označme staticky neurčitou veličinu  $X_1$  a nechejme ji působit na statické



Obrázek 4.1: Příklad 1 – zadání



Obrázek 4.2: Příklad 1 – základní soustava

schéma základní soustavy. Takto vytvořený zatěžovací stav nazvěme *1. zatěžovacím stavem* (ve zkratce 1. ZS). Ze statických podmínek rovnováhy můžeme určit reakce a následně vykreslit průběh ohybových momentů  $M_1$  (viz obr. 4.4). K výpočtu deformací  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{11}$ , uvedených v podmínce (4.1), využijeme *Metodu jednotkových sil* (pozn.: nezaměňovat se Silovou metodou). To si vyžaduje zavedení virtuální jednotkové síly na prázdné statické schéma do místa počítané deformace. S výhodou zvolíme směr této virtuální síly shodně se směrem staticky neurčité veličiny. Virtuální jednotkovou sílu označíme  $\bar{X}_1$ . Tento postup umožňuje zpřehlednění výpočtu, neboť schéma 1. ZS (obr. 4.4) představuje de facto 2 různé zatěžovací stavy zakreslené v jednom obrázku (tzn. zatížení skutečnou silou  $X_1$  a zatížení virtuální silou  $\bar{X}_1$ ).

Dále aplikujeme na základní staticky určitou soustavu dle obr. 4.2 původní zatížení konstrukce. Takto vytvořený zatěžovací stav nazvěme *0. zatěžovacím stavem* (ve zkratce 0. ZS). S podporovými reakcemi a příslušným průběhem ohybových momentů  $M_0$  je uveden na obr. 4.3.

Dále formulujeme deformační podmínku ve tvaru

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad (4.1)$$

Deformační podmínka (4.1) vyjadřuje superpozici deformací 0. ZS a 1. ZS v bodě  $a$ , v němž



byla odebrána podpora (na obr. 4.3 a 4.4 není bod  $a$  označen). Podpora neumožňovala vertikální posunutí, proto je na pravé straně rovnice 0.

K výpočtu deformačních součinitelů  $\delta_{10}$  a  $\delta_{11}$  využijeme Maxwell-Mohrových vztahů (4.2), (4.3)

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 \overline{M}_1}{EI} ds \quad (4.2)$$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 \overline{M}_1}{EI} ds \quad (4.3)$$

kde:

$M_0$  je funkce ohybového momentu v 0. ZS,

$M_1$  je funkce ohybového momentu v 1. ZS od staticky neurčité veličiny,

$\overline{M}_1$  je funkce ohybového momentu v 1. ZS od virtuální jednotkové síly  $\overline{X}_1$  (zpravidla bývá totožná s veličinou  $X_1$ ),

$E$  je modul pružnosti v tahu a tlaku,

$I$  je moment setrvačnosti průřezu k jeho těžištní ose,

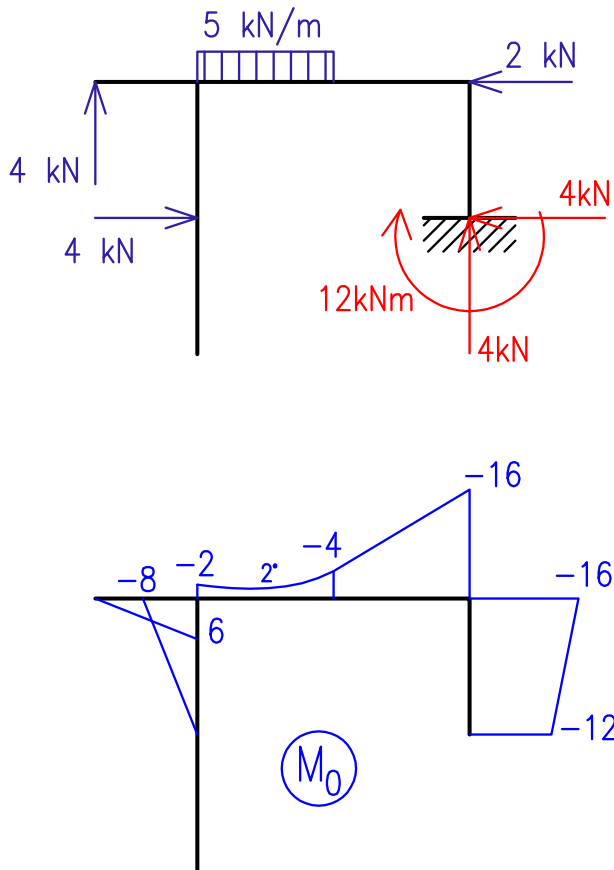
$L, ds$  vyjadřuje integraci po délce konstrukce vztahené ke střednici prutu.

Integrály momentových funkcí ve vztazích (4.2) a (4.3) je možné řešit různými způsoby, např. přímou integrací, pomocí Vereščaginova pravidla nebo pomocí tabulek. V příkladech této kapitoly je upřednostněna integrace tabulkami. Jsou zde využívány vztahy uvedené např. v tab. 14.3. z učebnice [1]. Některé z operací, které jsou při řešení příkladů prováděny, zohledňují zvolený způsob integrace tabulkami a reflektují možnosti konkrétních tabelovaných vztahů. Přitom je kladen důraz na přesnost řešení, jeho přehlednost a eliminaci typických chyb, ke kterým při nedostatečném porozumění řešeného problému mnohdy dochází.

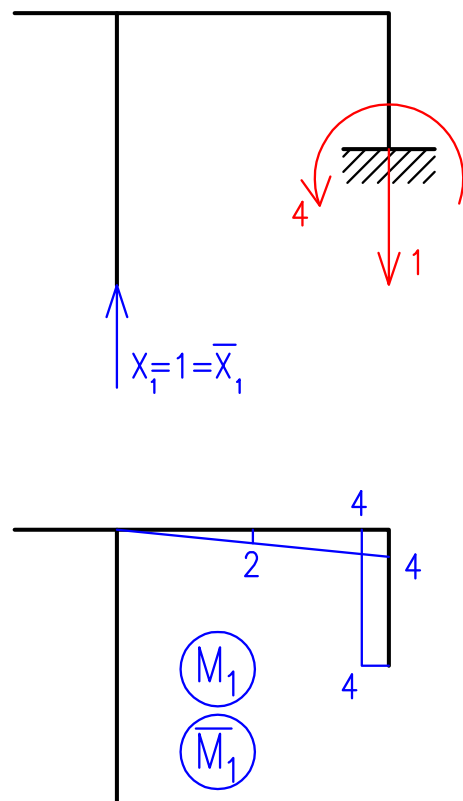
S ohledem na tvar funkce ohybových momentů  $M_0$  (obr. 4.3), ve vztahu k výše řečenému, bude praktické rozdělit 0. ZS na dva dílčí zatěžovací stavy: 0a. ZS a 0b. ZS (obr. 4.5, 4.6).

Deformační součinitele  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{10}$  pak můžeme spočítat následovně:

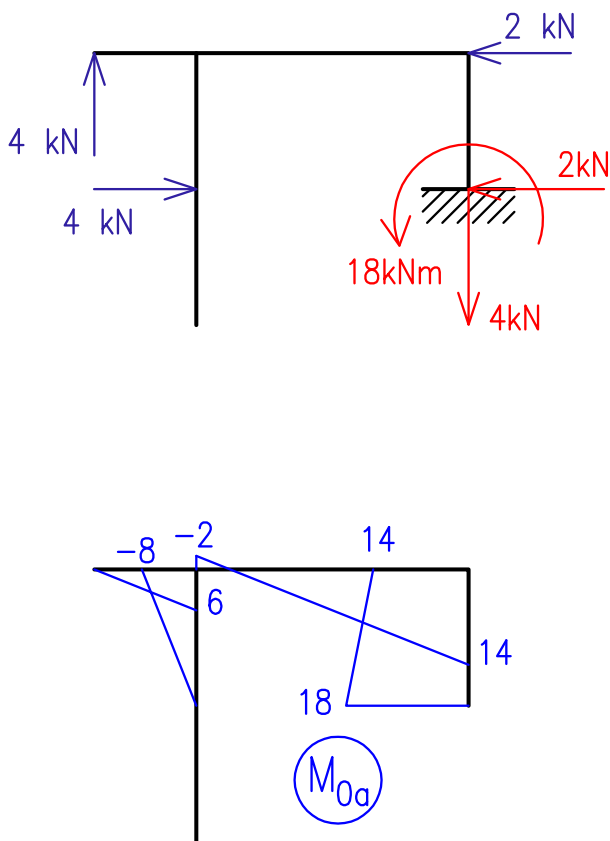
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_L \frac{M_1 \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} 4 \\ \triangle \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \triangle \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ 2 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{53,333}{EI} \end{aligned} \quad (4.4)$$



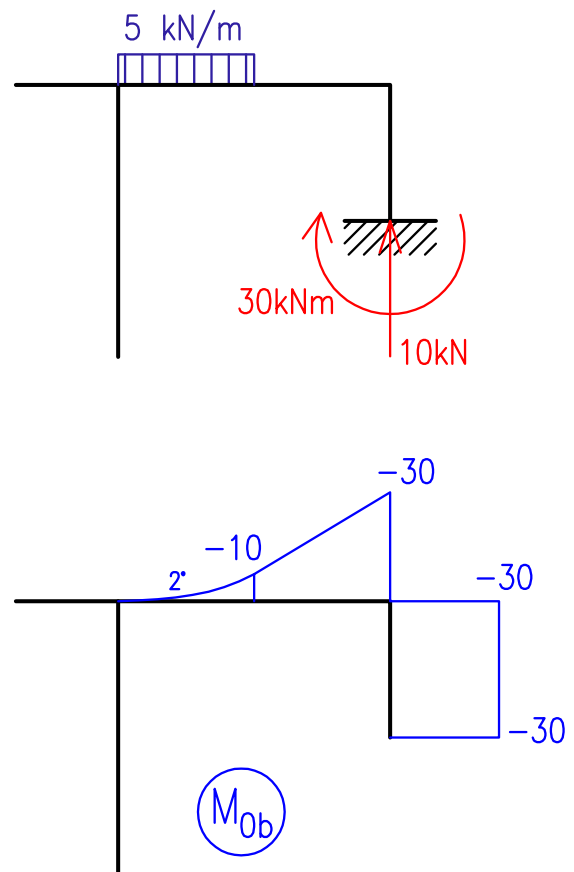
Obrázek 4.3: Příklad 1 – 0. zatěžovací stav (0. ZS) s obrazcem ohybových momentů



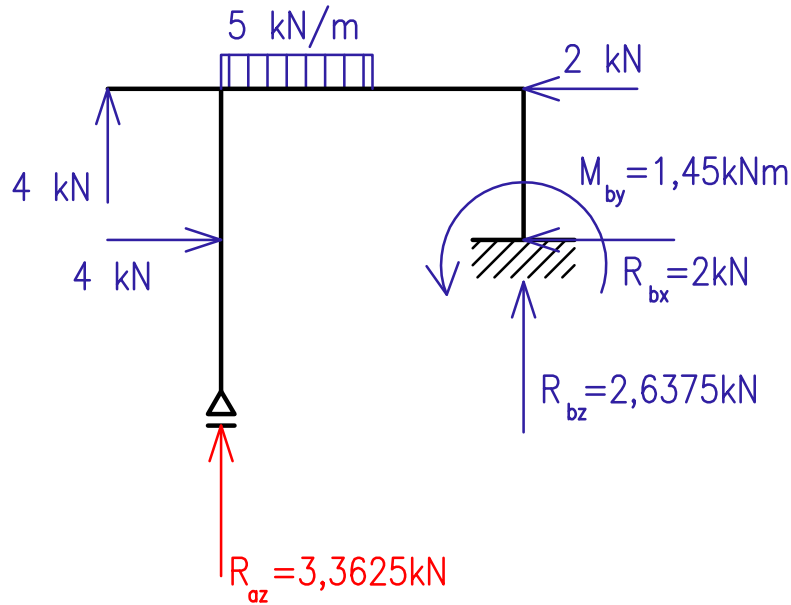
Obrázek 4.4: Příklad 1 – 1. zatěžovací stav (1. ZS) s obrazcem ohybových momentů



Obrázek 4.5: Příklad 1 – 0a. ZS



Obrázek 4.6: Příklad 1 – 0b. ZS



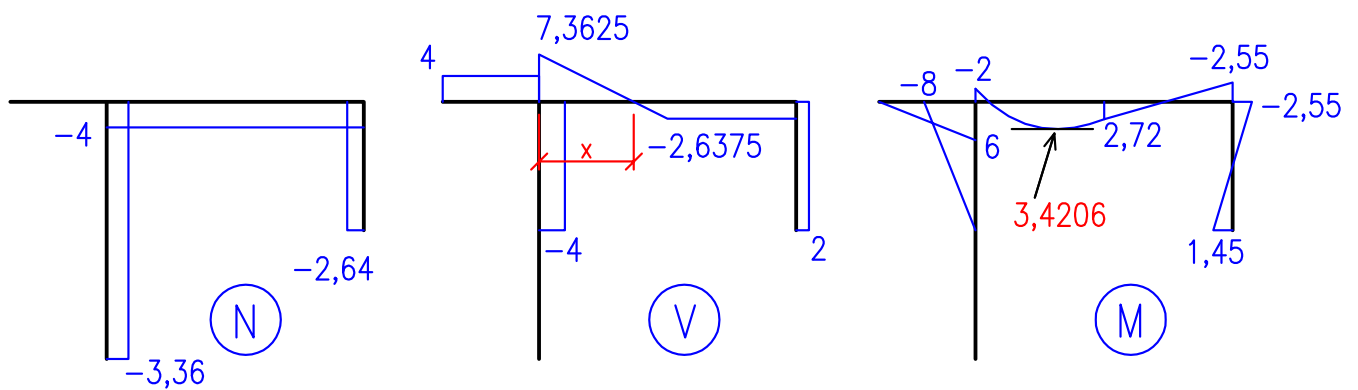
Obrázek 4.7: Příklad 1 – výsledné reakce

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \int_L \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI} ds = \int_L \frac{M_{0a} \bar{M}_1}{EI} ds + \int_L \frac{M_{0b} \bar{M}_1}{EI} ds = \\
 &= \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} -2 \\ \triangle \\ 14 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \triangle \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 14 \\ \square \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 18 \\ \square \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ 2 \end{array} \right) + \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} -10 \\ \triangle \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} -10 \\ \triangle \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} -30 \\ \triangle \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} -30 \\ \square \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ 2 \end{array} \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} \left( \frac{4}{6} \cdot 4 (-2 + 2 \cdot 14) + \frac{2}{2} \cdot 4 (14 + 18) \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{4} (-10) 2 + \frac{2}{6} [(-10)(2 \cdot 2 + 4) + (-30)(2 + 2 \cdot 4)] + 2(-30) 4 \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} (69,333 + 128) + \frac{1}{EI} (-10 - 126,666 - 240) = \frac{-179,333}{EI} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Pak dosadíme  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{10}$  do deformační podmínky (4.1) a dostáváme

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(-179,33)}{53,333} = 3,3625 \text{ kN } (\uparrow) \\
 R_{az} &= X_1 = 3,3625 \text{ kN } (\uparrow). \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Poté ze statických podmínek rovnováhy dopočteme zbylé reakce  $R_{bx}$ ,  $R_{bz}$ ,  $M_{by}$ . Velikosti a směry reakcí jsou zakresleny v obr. 4.7, průběhy vnitřních sil na obr. 4.8.



$$7,3625 - 5x = 0$$

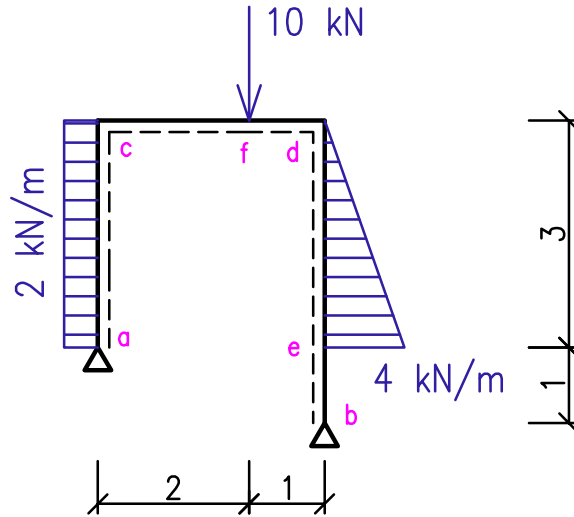
$$x = \frac{7,3625}{5} = \underline{\underline{1,4725 \text{ m}}}$$

$$M_{max} = -2 + 7,3625 \cdot 1,4725 - \frac{5(1,4725)^2}{2} = \underline{\underline{3,4206 \text{ kNm}}}$$

Obrázek 4.8: Příklad 1 – průběhy vnitřních sil (normálových N, posouvajících V, ohybových momentů M)

## 4.3 Příklad 2

Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.9. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $EI = \text{konst.}$



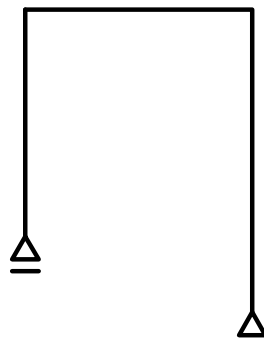
Obrázek 4.9: Příklad 2 – zadání

### Řešení

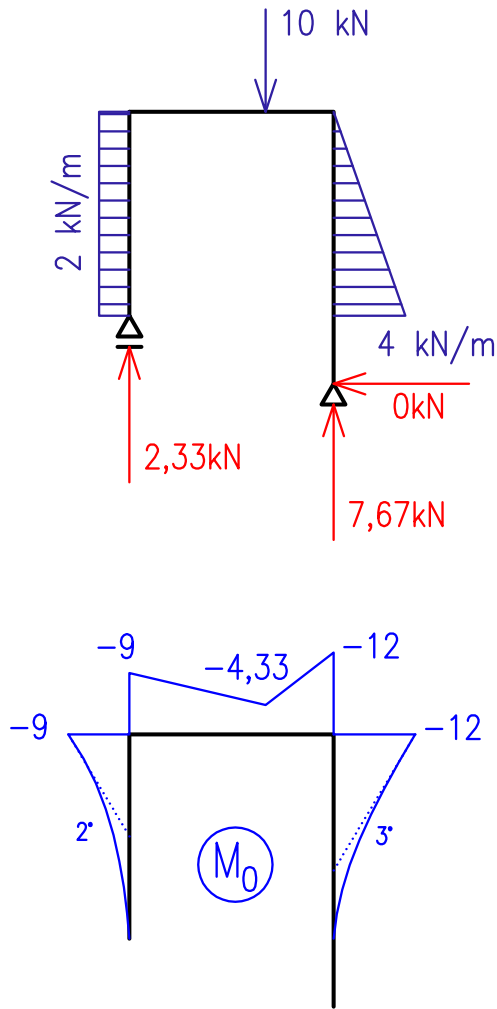
Nejprve určíme stupeň statické neurčitosti  $n_s$ . V této úloze je  $n_s = 1$ . Vytvoříme základní, staticky a kinematicky určitou, soustavu uvolněním např. vodorovné vazby v podpoře  $a$  (viz obr. 4.10).

Podobně jako u Příkladu 1 oddílu 4.2 vytvoříme dva zatěžovací stavy (obr. 4.11 a 4.12). Směr staticky neurčité veličiny  $X_1$  volíme libovolně, charakterem však musí odpovídat odebrané vazbě (tzn. musí to být vodorovná síla). Dále formulujeme deformační podmínku ve tvaru (4.7)

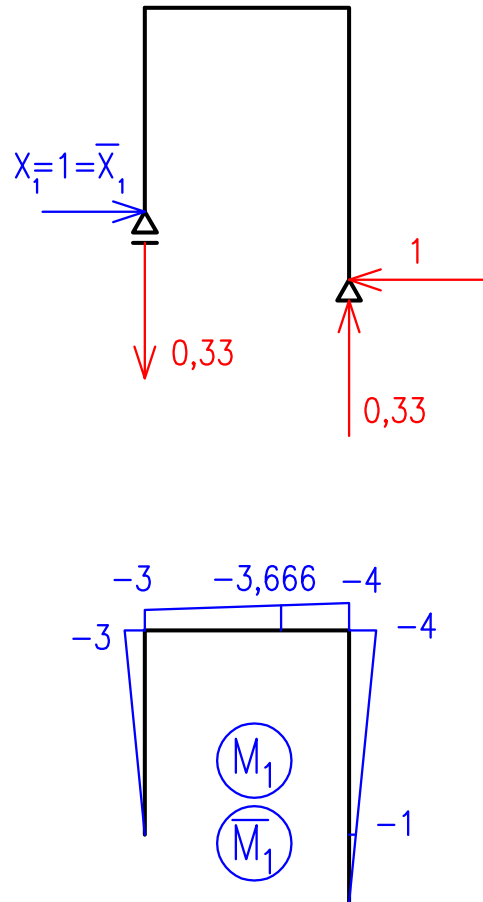
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad (4.7)$$



Obrázek 4.10: Příklad 2 – základní soustava



Obrázek 4.11: Příklad 2 – 0. ZS s obrazcem ohybových momentů



Obrázek 4.12: Příklad 2 – 1. ZS s obrazcem ohybových momentů

a pomocí vztahů (4.2) a (4.3) vypočteme hodnoty deformačních součinitelů  $\delta_{10}$  a  $\delta_{11}$  (viz výrazy (4.8), (4.9)).

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \int_L \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{-3}{3} \frac{-3}{3} + \frac{-3}{3} \frac{-4}{3} + \frac{-4}{4} \frac{-4}{4} \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} \left( \frac{3}{3} (-3)(-3) + \frac{3}{6} [(-3)(2(-3) + (-4)) + (-4)(-3 + 2(-4))] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} (-4)(-4) \right) = \frac{1}{EI} (9 + 37 + 21,333) = \frac{67,333}{EI} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

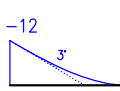
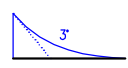
### 4.3. PŘÍKLAD 2

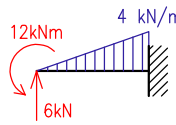
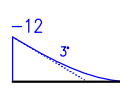
$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \int_L \frac{M_0 \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} \frac{-9}{3} \quad \frac{-3}{3} \\ \frac{-9}{2} \quad \frac{-4,33}{2} \quad \frac{-3}{2} \quad \frac{-3,66}{2} \\ \frac{-4,33}{1} \quad \frac{-12}{1} \quad \frac{-3,66}{1} \quad \frac{-4}{1} \\ \frac{-12}{3} \quad \frac{-4}{3} \quad \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{1} \quad \frac{-1}{1} \end{array} \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} \frac{-9}{3} \quad \frac{-3}{3} \\ \frac{-9}{2} \quad \frac{-4,33}{2} \quad \frac{-3}{2} \quad \frac{-3,66}{2} \\ \frac{-4,33}{1} \quad \frac{-12}{1} \quad \frac{-3,66}{1} \quad \frac{-4}{1} \\ \frac{-6}{3} \quad \frac{-4}{3} \quad \frac{-1}{3} \\ \frac{-12}{6} \quad \frac{-4}{3} \quad \frac{-1}{1} \end{array} \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} \left( \frac{3}{4}(-9)(-3) + \frac{2}{6}[-9(2(-3) - 3,66) - 4,33(-3 + 2(-3,66))] + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{6}[-4,33(2(-3,66) - 4) - 12(-3,66 + 2(-4))] + \frac{3}{20}(-6)(-4 + 4(-1)) + \\
 &\quad \left. + \frac{3}{6}[-12(2(-4) + (-1)) + 6(-4 + 2(-1))] \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} (20,25 + 43,92085 + 31,516 + 7,2 + 36) = \frac{138,8864}{EI} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$



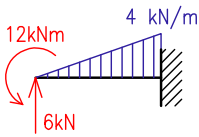
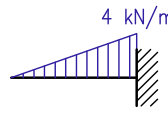
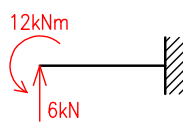
**TVAR**  **ODPOVÍDÁ NOSNÍKU**  **OVŠEM VZOREC V TABULKÁCH**

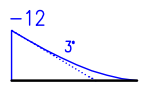
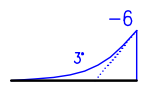
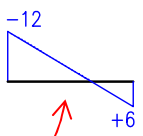
**PRO**  **PŘEDPOKLÁDÁ NOSNÍK ZATÍŽENÝ TAKTO:** 

**DANÉMU TVARU FUNKCE**  **ODPOVÍDÁ NOSNÍK VETKNUTÝ VPRAVO** 

**S TÍMTO ZATÍŽENÍM**  

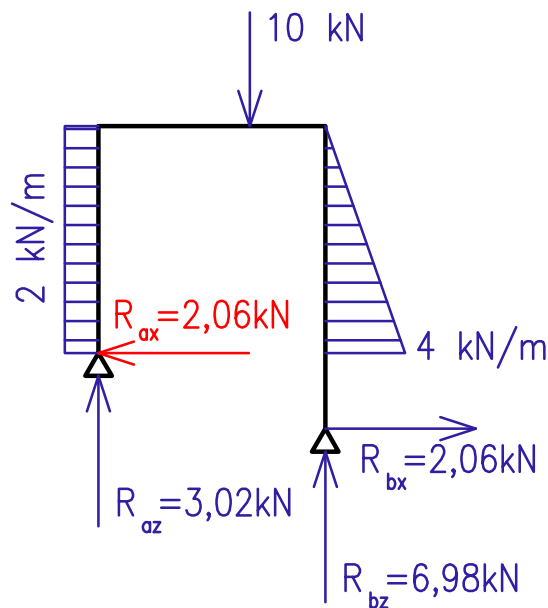
**DEKOMPOZICI DO DÍLČÍCH ZATĚŽOVACÍCH STAVŮ LZE PROVÉST NÁSLEDOVNĚ:**

 =  + 

 =  + 

**V DALŠÍ INTEGRACI JSOU UŽITY TYTO TVARY FUNKCÍ**





Obrázek 4.13: Příklad 2 – výsledné reakce

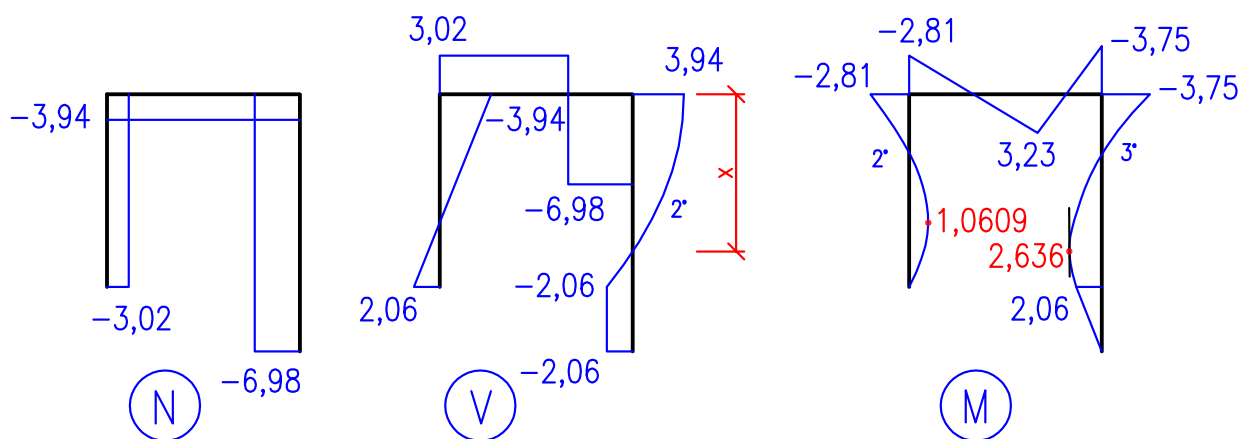
$\delta_{11}$ ,  $\delta_{10}$  dosadíme do deformační podmínky (4.7) a dostáváme

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{138,8864}{67,333} = -2,06267 \doteq -2,06 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{ax} = X_1 = 2,06 \text{ kN} (\leftarrow). \quad (4.10)$$

Dopočteme zbylé reakce  $R_{bx}$ ,  $R_{az}$ ,  $R_{bz}$ .

Velikosti a směry reakcí jsou zakresleny v obr. 4.13, průběhy vnitřních sil na obr. 4.14.



$$3,94 - \frac{q \cdot x}{3} \cdot \frac{x}{2} = 0$$

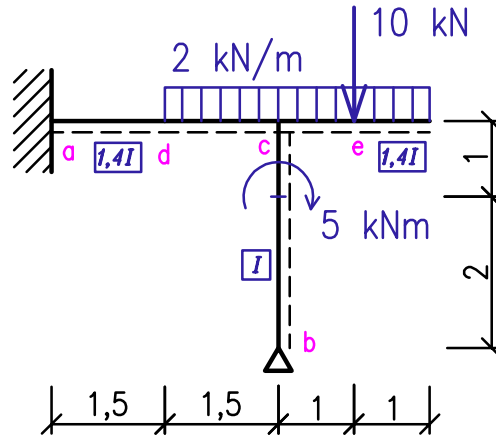
$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,94 \cdot 3}{4}} = \underline{\underline{2,431043 \text{ m}}}$$

$$M_{max,\Delta} = -3,75 + 3,94 \cdot 2,43 - \frac{4(2,43)^3}{6 \cdot 3} = \underline{\underline{2,636 \text{ kNm}}}$$

Obrázek 4.14: Příklad 2 – průběhy vnitřních sil

## 4.4 Příklad 3

Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.15. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $E=\text{konst.}$ , momenty setrvačnosti prutů  $I$  jsou uvedeny v obrázku zadání.



Obrázek 4.15: Příklad 3 – zadání

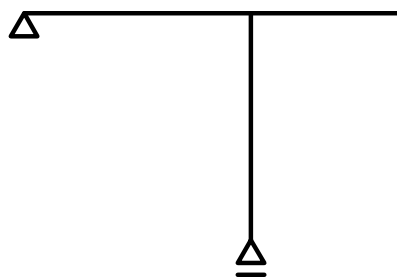
### Řešení

Řešení opět zahájíme určením stupně statické neurčitosti. Jeho hodnota je  $n_s = 2$ . Vytvořme základní, staticky a kinematically určitou, soustavu např. uvolněním vazby proti pootáčení v podpoře  $a$  a vodorovné vazby v podpoře  $b$  (viz obr. 4.16).

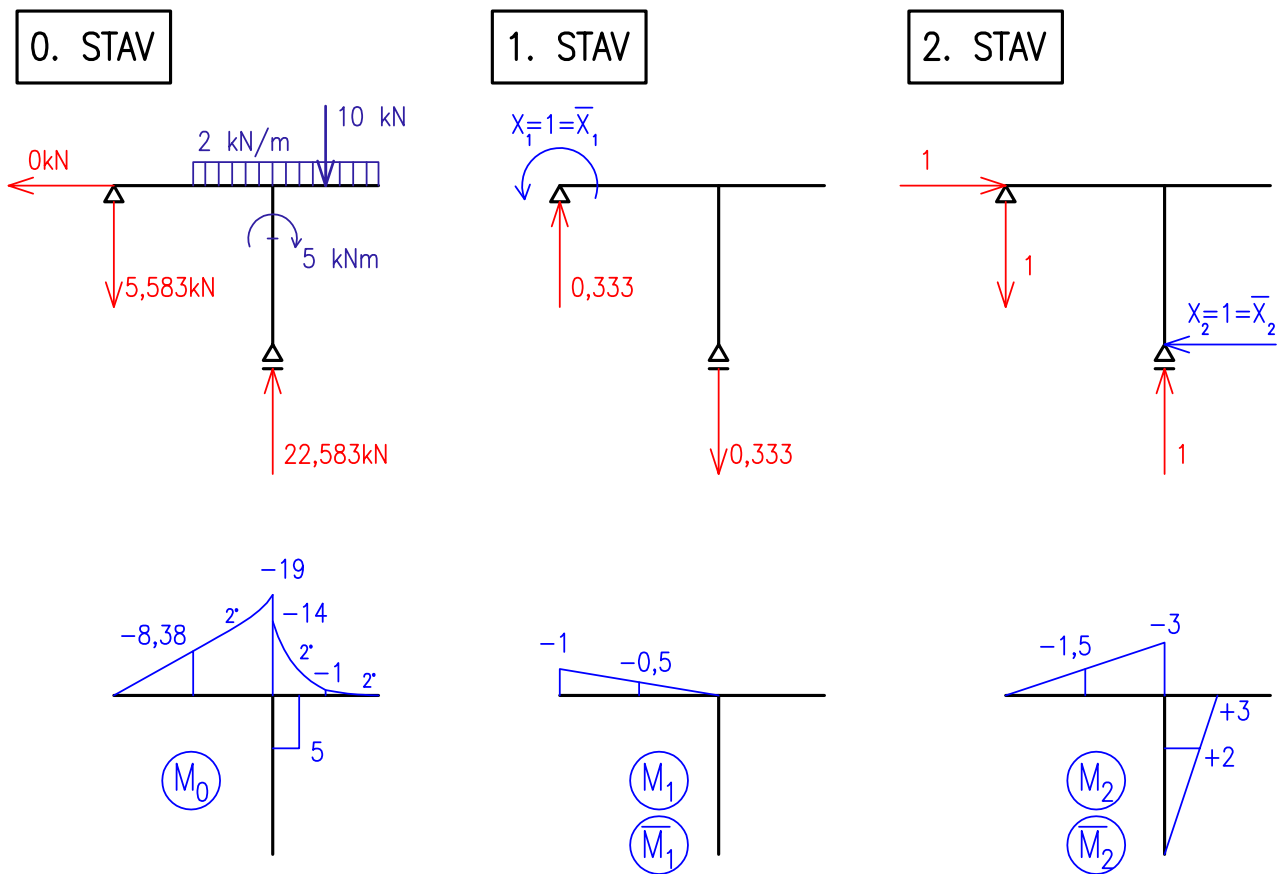
Tentokrát bude zapotřebí vytvořit tři zatěžovací stavy, neboť máme 2 staticky neurčité veličiny (obr. 4.17). Charakter staticky neurčitých veličin musí odpovídat odebraným vazbám, takže  $X_1$  reprezentuje momentovou reakci v podpoře  $a$  a  $X_2$  představuje horizontální reakci v pevné kloubové podpoře  $b$ .

Neznámé staticky neurčité veličiny vypočítáme ze soustavy deformačních podmínek (4.11). Deformační součinitele  $\delta_{ij}$  vypočteme podobně jako v předchozích příkladech.

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$



Obrázek 4.16: Příklad 3 – základní soustava



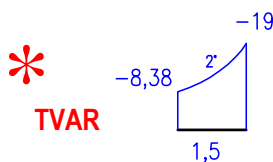
Obrázek 4.17: Příklad 3 – 0., 1. a 2. zatěžovací stav

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -1 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \right) = \frac{1}{1,4EI} \left( \frac{3}{3} (-1)(-1) \right) = \frac{0,714}{EI} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \int_L \frac{M_2 \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -1 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} -3 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \right) + \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} - \\ \triangle \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{1,4EI} \left( \frac{3}{6} (-1)(-3) \right) + \frac{1}{EI} \cdot 0 = \frac{1,0714}{EI} \end{aligned} \quad (4.13)$$

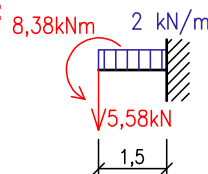
$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_L \frac{M_2 \overline{M}_2}{EI} ds = \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -3 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} -3 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \right) + \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{1,4EI} \left( \frac{3}{3} (-3)(-3) \right) + \frac{1}{EI} \left( \frac{3}{3} \cdot 3 \cdot 3 \right) = \frac{15,429}{EI} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int_L \frac{M_0 \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -0,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} + \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -19 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -0,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -0,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} + \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -16,75 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -0,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} + \begin{array}{c} -2,25 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -0,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{1,4EI} \left( \frac{1,5}{6} (-8,38)(2(-0,5) + (-1)) + \frac{1,5}{6} (-0,5)(2(-8,38) + (-16,75)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,5}{12} (-2,25)(-0,5) \right) = \frac{6,085}{EI} \end{aligned} \quad (4.15)$$

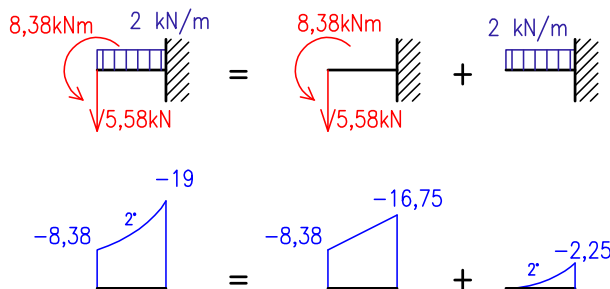


**TVAR PRO INTEGRACI TABULKAMI ROZLOŽÍME**

**NA JEDNODUŠŠÍ OBRAZCE. TENTO PRŮBĚH OHYBOVÝCH MOMENTŮ ODPOVÍDÁ NAPŘ. NOSNÍKU ZATÍŽENÉMU TAKTO:**



**ROZKLAD:**



$$\delta_{20} = \int_L \frac{M_0 \overline{M}_2}{EI} ds = \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} + \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \right) + \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} 5 \\ \square \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \square \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \square \\ 1 \end{array} \right) =$$

zde je rovněž uplatněn rozklad obrazců - viz výše červená \*

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1,4EI} \left( \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} + \begin{array}{c} -8,38 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} + \begin{array}{c} -2,25 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \begin{array}{c} -1,5 \\ \triangle \\ 1,5 \end{array} \right) + \frac{1}{EI} \left( \begin{array}{c} 5 \\ \square \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \square \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \square \\ 1 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{1,4EI} \left( \frac{1,5}{3} (-8,38)(-1,5) + \frac{1,5}{6} \left[ -8,38(2(-1,5) + (-3)) - 16,75(-1,5 + 2(-3)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,5}{12} (-2,25)(-1,5 + 3(-3)) \right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 5(3 + 2) = \\ &= \frac{1}{1,4EI} (6,285 + 43,97625 + 2,953) + \frac{1}{EI} 12,5 = \frac{50,510}{EI} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dosaďme do soustavy deformačních podmínek (4.11):

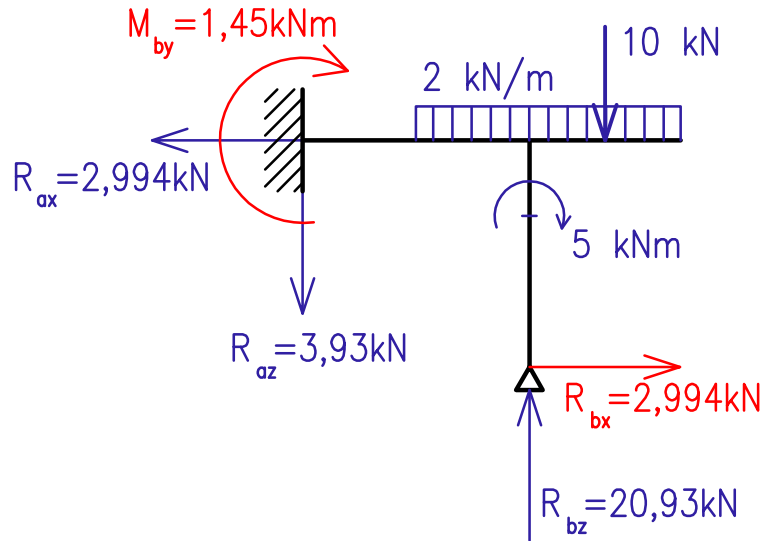
$$\begin{aligned} 0,714X_1 + 1,0714X_2 &= -6,085 \\ 1,0714X_1 + 15,429X_2 &= -50,510 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Řešením (4.17) dostaneme:

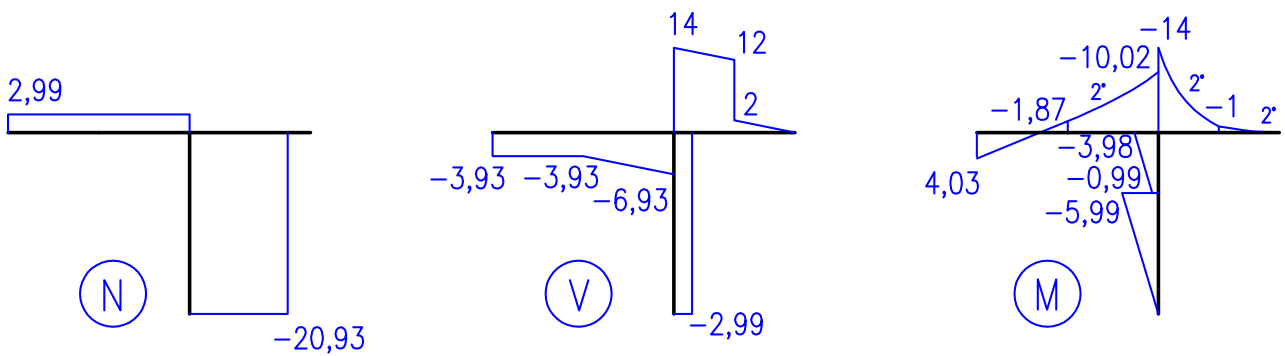
$$\begin{aligned} X_1 = M_{ay} &= -4,029 \text{ kNm } (\curvearrowright) \\ X_2 = R_{bx} &= -2,994 \text{ kNm } (\rightarrow) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dopočteme zbylé reakce  $R_{ax}, R_{az}, R_{bz}$ .

Velikosti a směry reakcí jsou zakresleny v obr. 4.18, průběhy vnitřních sil na obr. 4.19.



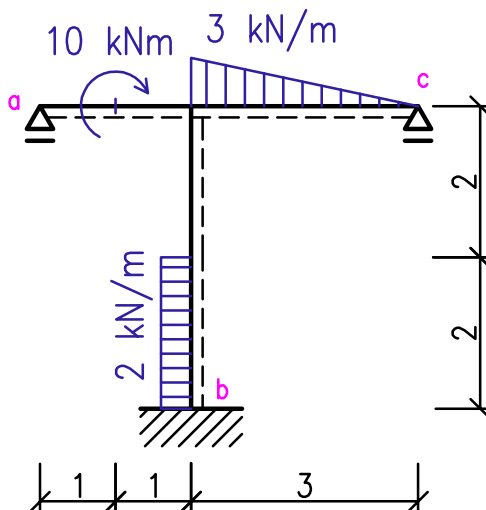
Obrázek 4.18: Příklad 3 – výsledné reakce



Obrázek 4.19: Příklad 3 – průběhy vnitřních sil

## 4.5 Příklad 4

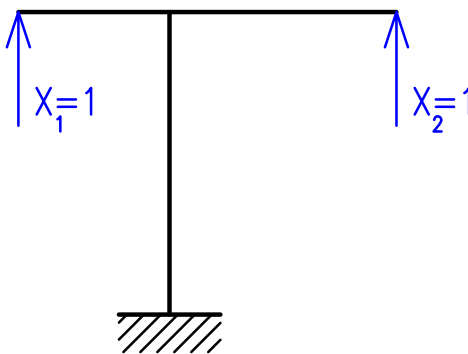
Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.20. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $EI = \text{konst.}$



Obrázek 4.20: Příklad 4 – zadání

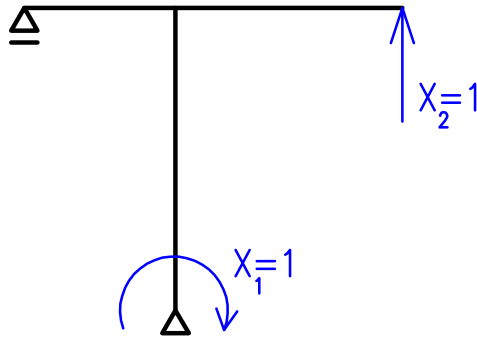
### Řešení

Jedná se o  $2 \times$  staticky neurčitou konstrukci. Základní soustavu můžeme zvolit vytvořit např. tak, že uvolníme vazby v podporách  $a$  a  $c$ . Další možnost řešení spočívá v uvolnění vazeb v podporách  $b$  a  $c$ . Jsou zde představena obě možná schémata na obr. 4.21 a 4.22, vč. příslušných výsledků (4.19) a (4.20).



Obrázek 4.21: Příklad 4 – varianta „A“ základní soustavy





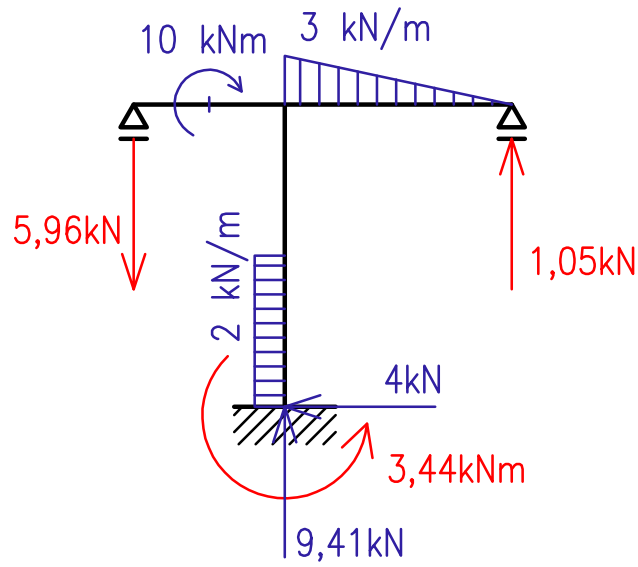
Obrázek 4.22: Příklad 4 – varianta „B“ základní soustavy

Výsledky pro variantu „A“

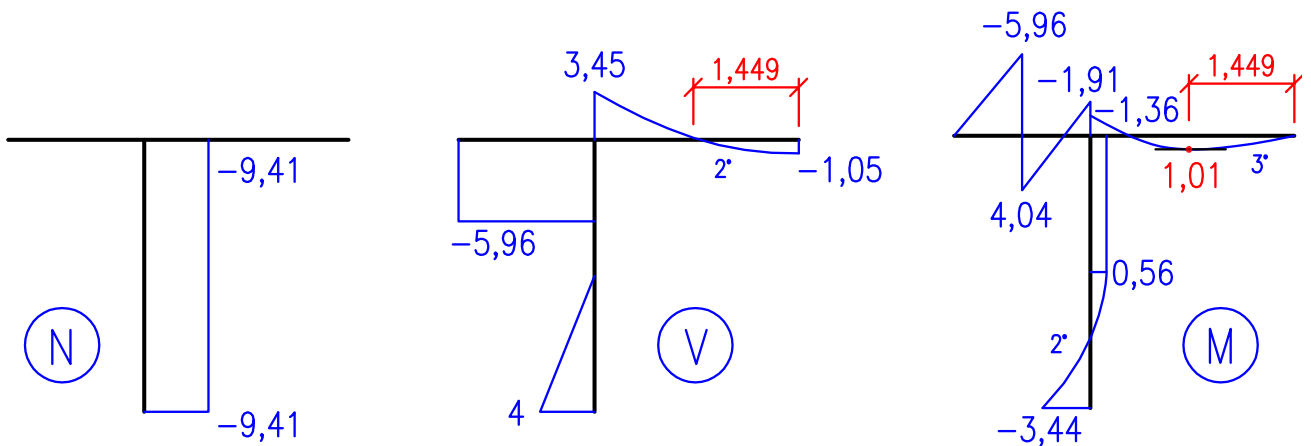
$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \frac{136,333}{EI} & \delta_{11} &= \frac{18,667}{EI} & \delta_{12} &= \frac{-24}{EI} \\
 \delta_{20} &= \frac{-190,100}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{45}{EI} \\
 X_1 &= -5,956 \text{ kN} \\
 X_2 &= 1,047 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Výsledky pro variantu „B“

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \frac{18,167}{EI} & \delta_{11} &= \frac{4,667}{EI} & \delta_{12} &= \frac{-2}{EI} \\
 \delta_{20} &= \frac{-22,601}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{15}{EI} \\
 X_1 &= -3,44 \text{ kNm} \\
 X_2 &= 1,047 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$



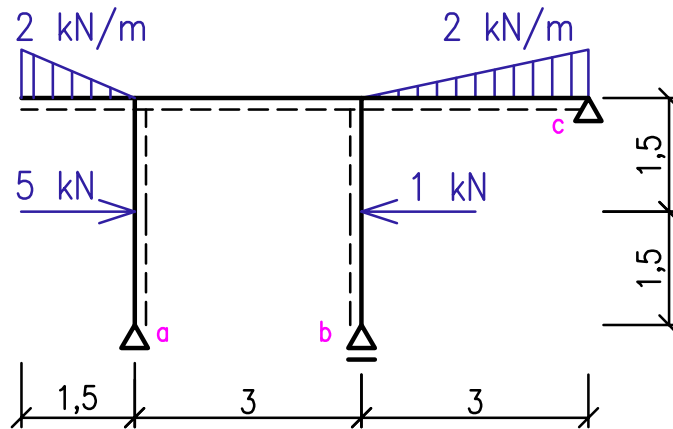
Obrázek 4.23: Příklad 4 – výsledné reakce



Obrázek 4.24: Příklad 4 – průběhy vnitřních sil

## 4.6 Příklad 5

Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.25. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $EI = \text{konst.}$



Obrázek 4.25: Příklad 5 – zadání

### Řešení

Opět jde o  $2 \times$  staticky neurčitou konstrukci. Podobně jako v předešlém příkladě jsou připraveny výsledky pro dvě možné varianty řešení dle obr. 4.26 a 4.27. Řešení je uvedeno ve vztazích (4.21) a (4.22).

Výsledky pro variantu „A“

$$\delta_{10} = \frac{-148,163}{EI}$$

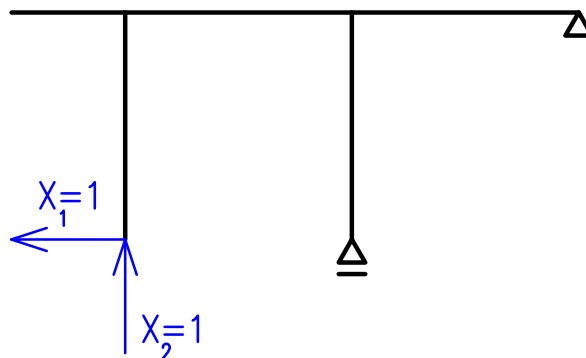
$$\delta_{11} = \frac{45}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{22,5}{EI}$$

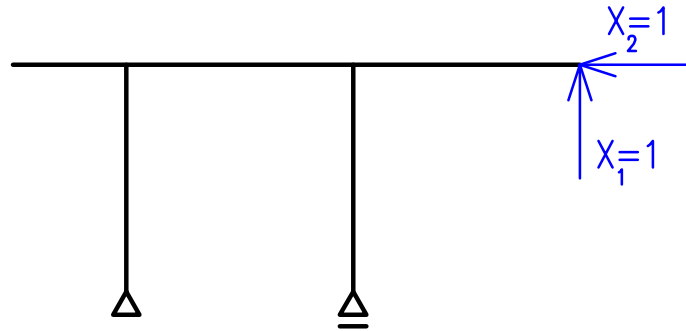
$$\delta_{20} = \frac{-80,85}{EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12}$$

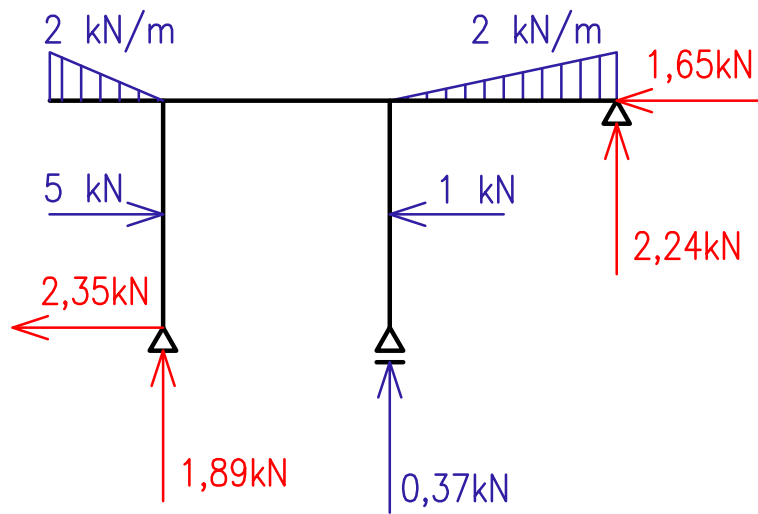
$$\delta_{22} = \frac{18}{EI}$$



Obrázek 4.26: Příklad 5 – varianta „A“ základní soustavy



Obrázek 4.27: Příklad 5 – varianta „B“ základní soustavy



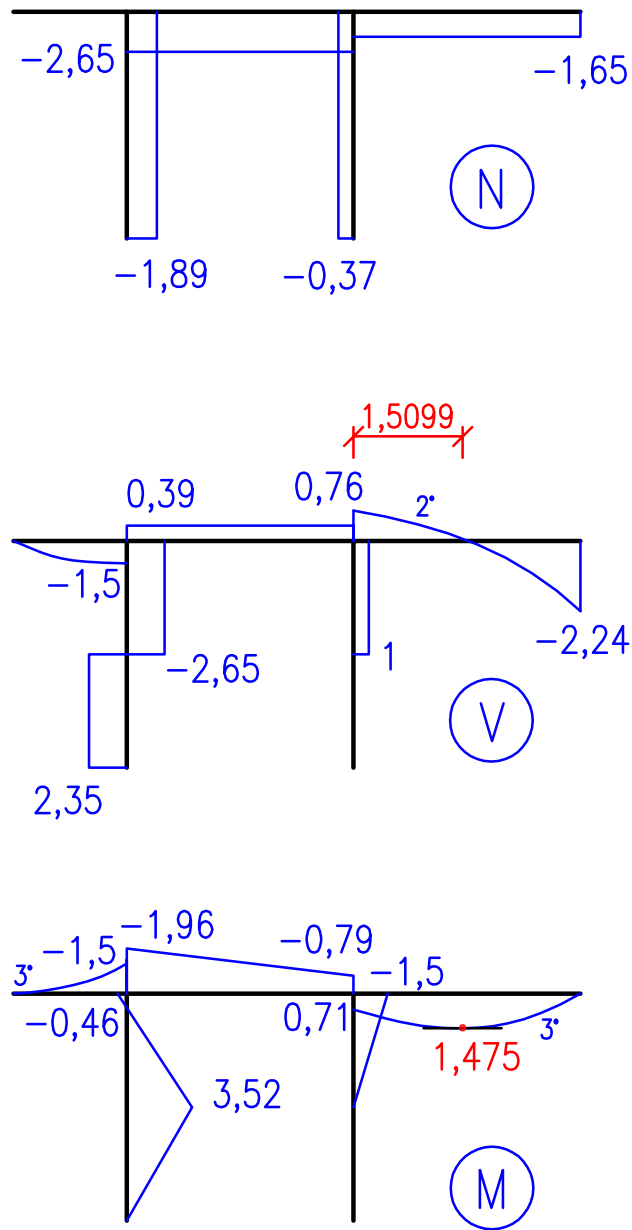
Obrázek 4.28: Příklad 5 – výsledné reakce

$$\begin{aligned} X_1 &= 2,347 \text{ kN} \\ X_2 &= 1,891 \text{ kN} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Výsledky pro variantu „B“

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{-32,85}{EI} & \delta_{11} &= \frac{18}{EI} & \delta_{12} &= \frac{-4,5}{EI} \\ \delta_{20} &= \frac{-19,688}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{18}{EI} \end{aligned}$$

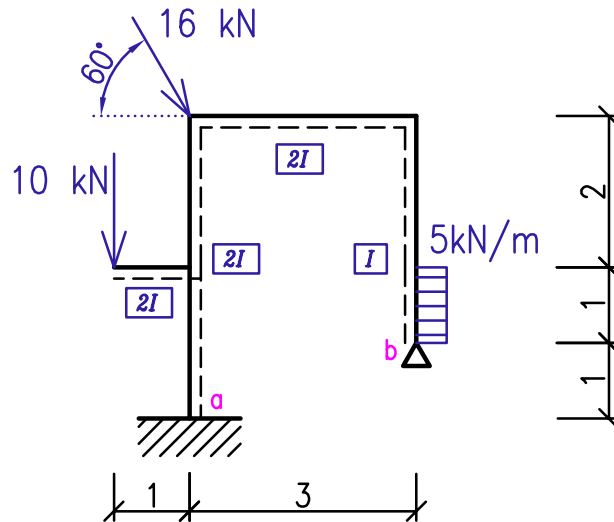
$$\begin{aligned} X_1 &= 2,238 \text{ kN} \\ X_2 &= 1,653 \text{ kN} \end{aligned} \quad (4.22)$$



Obrázek 4.29: Příklad 5 – průběhy vnitřních sil

## 4.7 Příklad 6

Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.30. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $E = \text{konst.}$ , momenty setrvačnosti prutů  $I$  jsou uvedeny v obrázku zadání.



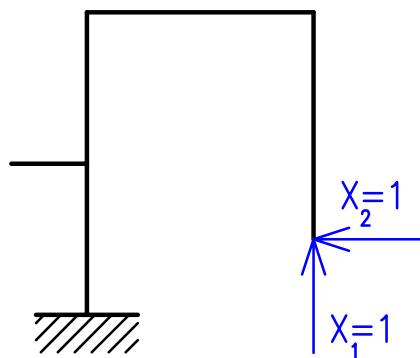
Obrázek 4.30: Příklad 6 – zadání

### Řešení

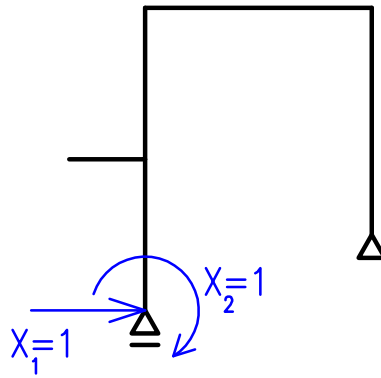
$n_s = 2$ . Tentokrát jsou zpracovány tři varianty řešení (obr. 4.31, 4.32, 4.33). Příslušné hodnoty deformačních součinitelů jsou uvedeny ve vztazích (4.23), (4.24) a (4.25).

Výsledky pro variantu „A“

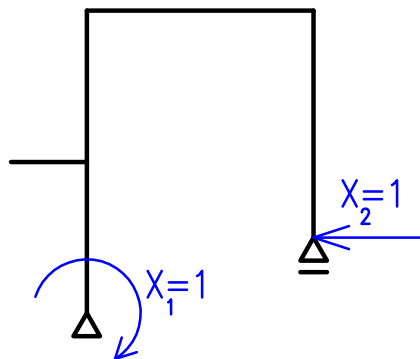
$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{-109,125}{EI} & \delta_{11} &= \frac{22,5}{EI} & \delta_{12} &= \frac{-12,75}{EI} \\ \delta_{20} &= \frac{119,208}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{27,166}{EI} \end{aligned}$$



Obrázek 4.31: Příklad 6 – varianta „A“ základní soustavy



Obrázek 4.32: Příklad 6 – varianta „B“ základní soustavy



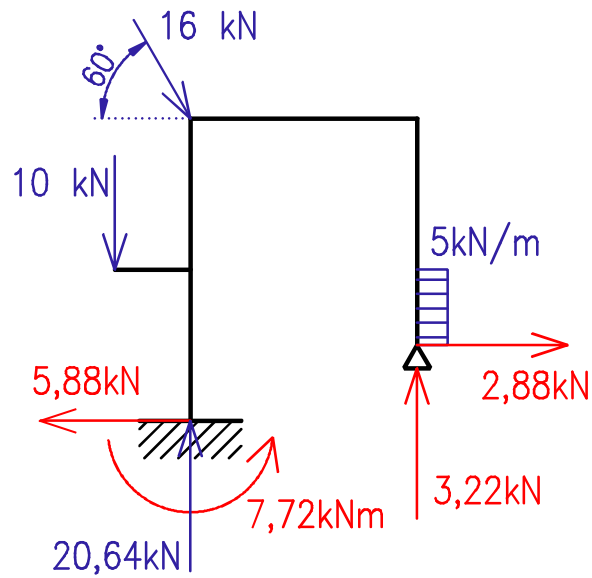
Obrázek 4.33: Příklad 6 – varianta „C“ základní soustavy

$$\begin{aligned} X_1 &= 3,219 \text{ kN} \\ X_2 &= -2,877 \text{ kN} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Výsledky pro variantu „B“

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{172,209}{EI} & \delta_{11} &= \frac{38,166}{EI} & \delta_{12} &= \frac{-6,75}{EI} \\ \delta_{20} &= \frac{-20,375}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{2,5}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= -5,877 \text{ kN} \\ X_2 &= -7,718 \text{ kNm} \end{aligned} \tag{4.24}$$



Obrázek 4.34: Příklad 6 – výsledné reakce

Výsledky pro variantu „C“

$$\delta_{10} = \frac{-0,125}{EI} \quad \delta_{11} = \frac{2,5}{EI} \quad \delta_{12} = \frac{-6,75}{EI}$$

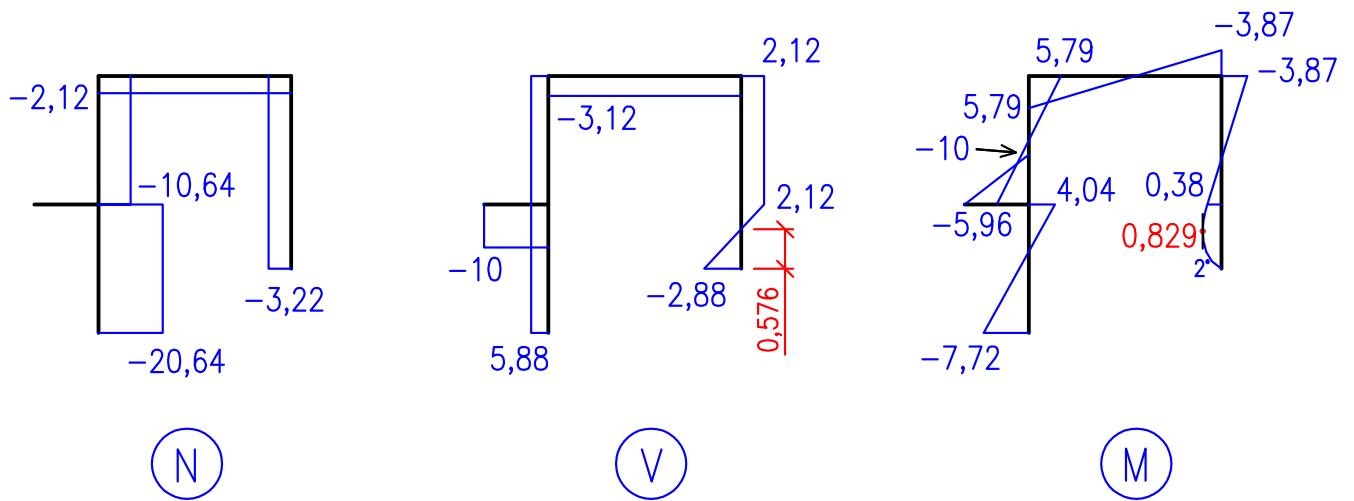
$$\delta_{20} = \frac{-57,709}{EI} \quad \delta_{21} = \delta_{12} \quad \delta_{22} = \frac{38,166}{EI}$$

$$X_1 = -7,718 \text{ kNm}$$

$$X_2 = -2,877 \text{ kN}$$

(4.25)

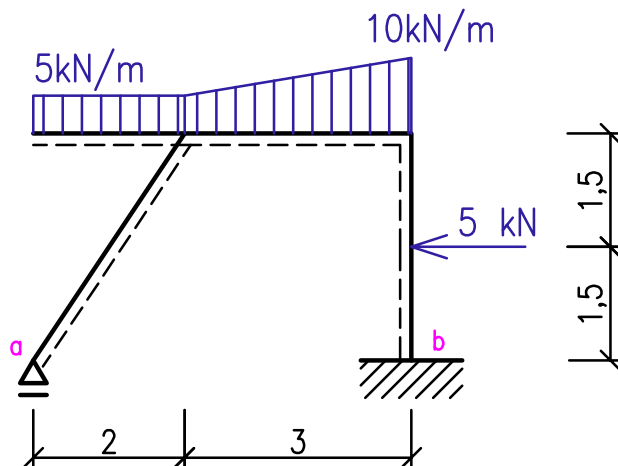




Obrázek 4.35: Příklad 6 – průběhy vnitřních sil

## 4.8 Příklad 7

Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.36. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $EI = \text{konst.}$



Obrázek 4.36: Příklad 7 – zadání

### Řešení

Tato konstrukce je  $1 \times$  staticky neurčitá. K řešení se nabízejí 2 možné varianty základní soustavy dle obr. 4.37 a 4.38. Výsledky jsou uvedeny ve vztazích (4.26) a (4.27).

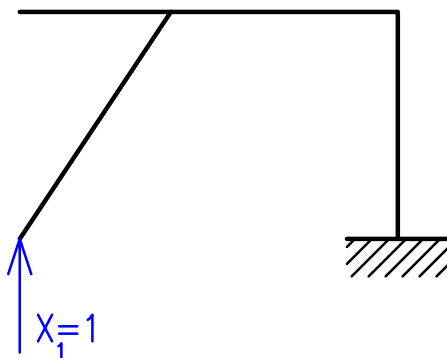
Výsledky pro variantu „A“

$$\delta_{10} = \frac{-1483,5}{EI}$$

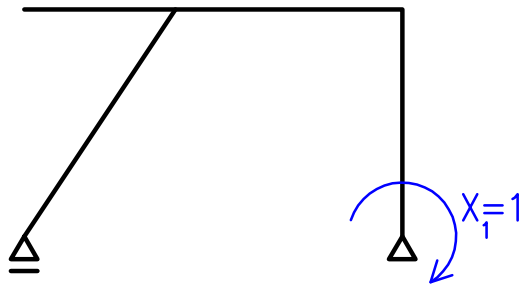
$$\delta_{11} = \frac{118,807}{EI}$$

$$X_1 = 12,487 \text{ kN}$$

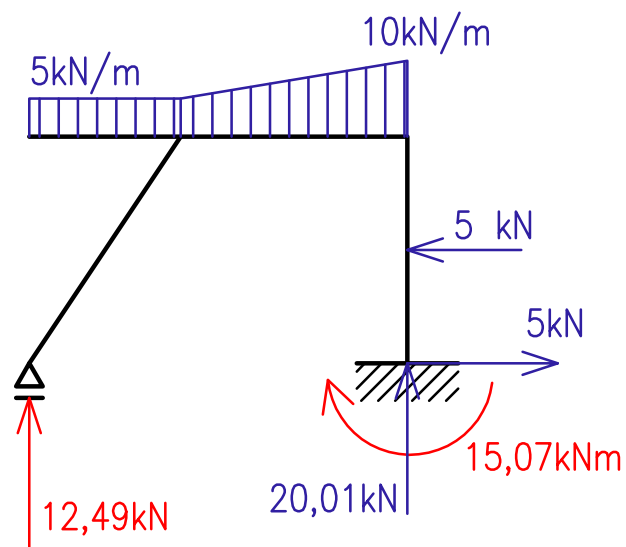
(4.26)



Obrázek 4.37: Příklad 7 – varianta „A“ základní soustavy



Obrázek 4.38: Příklad 7 – varianta „B“ základní soustavy



Obrázek 4.39: Příklad 7 – výsledné reakce

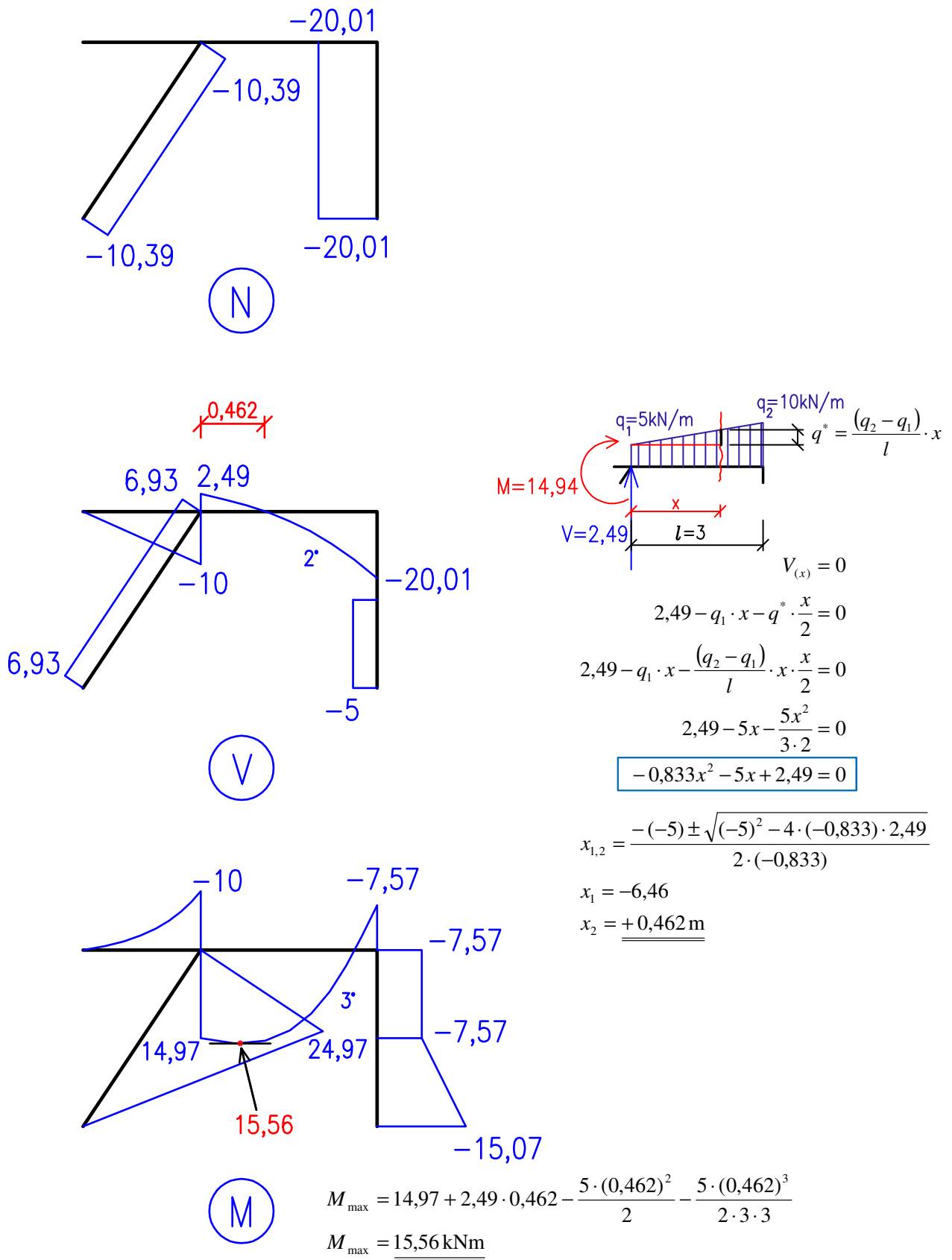
Výsledky pro variantu „B“

$$\delta_{10} = \frac{-71,603}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{4,752}{EI}$$

$$X_1 = 15,068 \text{ kN}$$

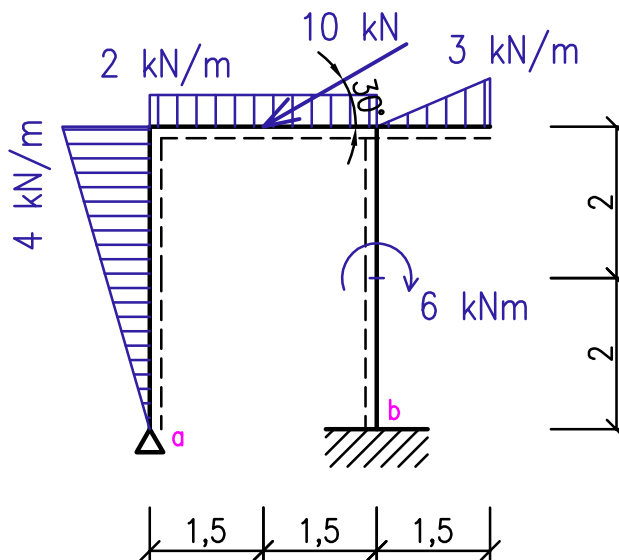
(4.27)



Obrázek 4.40: Příklad 7 – průběhy vnitřních sil

## 4.9 Příklad 8

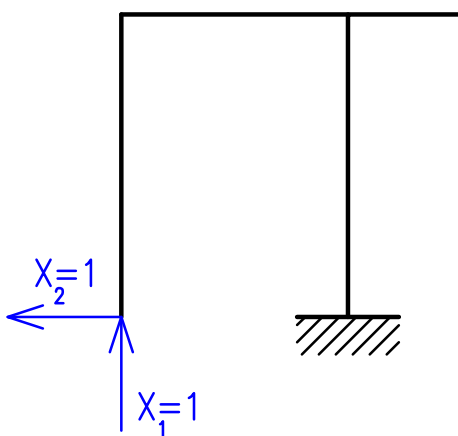
Řešte silovou metodou rovinný rám dle obr. 4.41. Určete reakce v podporách a průběh vnitřních sil.  $EI = \text{konst.}$



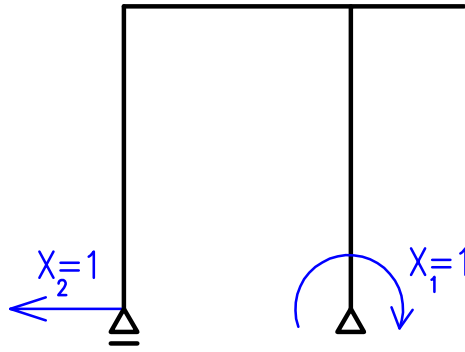
Obrázek 4.41: Příklad 8 – zadání

## Řešení

$n_s = 2$ . Opět jsou čtenáři nabídnuty k procvičení tři varianty řešení (obr. 4.42, 4.43, 4.44). Příslušné hodnoty deformačních součinitelů jsou uvedeny ve vztazích (4.28), (4.29) a (4.30).



Obrázek 4.42: Příklad 8 – varianta „A“ základní soustavy



Obrázek 4.43: Příklad 8 – varianta „B“ základní soustavy

Výsledky pro variantu „A“

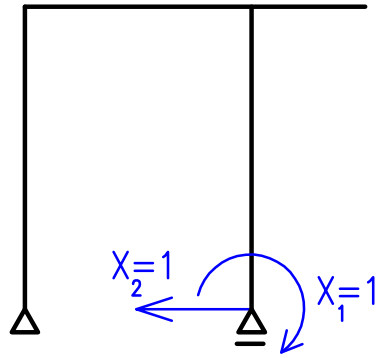
$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \frac{-361,153}{EI} & \delta_{11} &= \frac{45}{EI} & \delta_{12} &= \frac{42}{EI} \\
 \delta_{20} &= \frac{-415,007}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{90,666}{EI} \\
 X_1 &= 6,612 \text{ kN} \\
 X_2 &= 1,514 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Výsledky pro variantu „B“

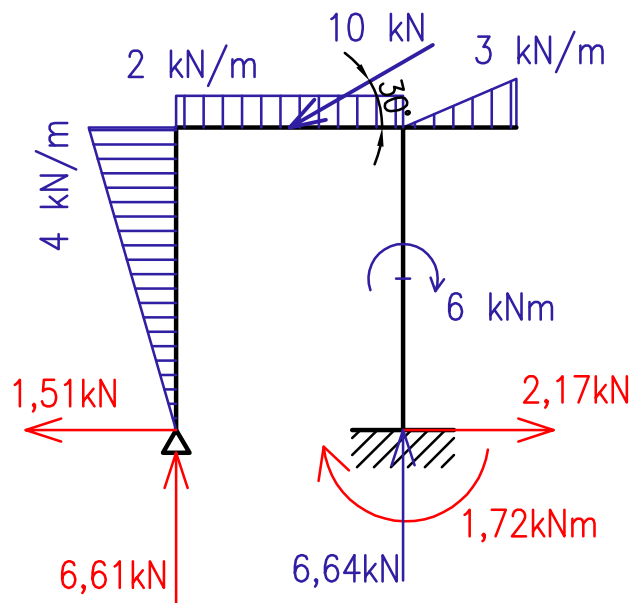
$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \frac{12,601}{EI} & \delta_{11} &= \frac{5}{EI} & \delta_{12} &= \frac{-14}{EI} \\
 \delta_{20} &= \frac{-113,213}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{90,666}{EI} \\
 X_1 &= 1,719 \text{ kNm} \\
 X_2 &= 1,514 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Výsledky pro variantu „C“

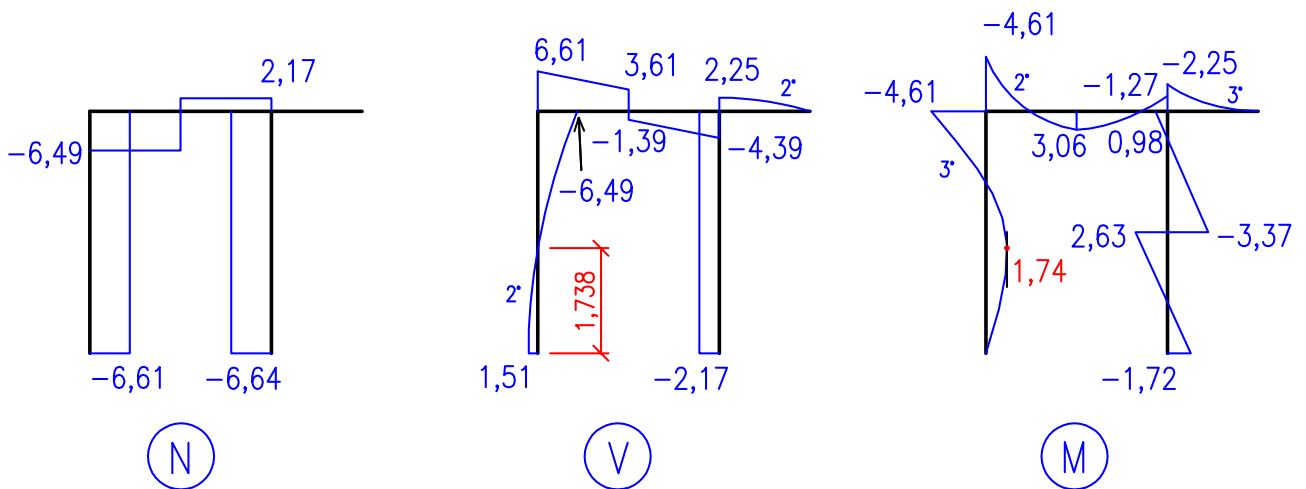
$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \frac{21,841}{EI} & \delta_{11} &= \frac{5}{EI} & \delta_{12} &= \frac{14}{EI} \\
 \delta_{20} &= \frac{173,053}{EI} & \delta_{21} &= \delta_{12} & \delta_{22} &= \frac{90,666}{EI} \\
 X_1 &= 1,719 \text{ kNm} \\
 X_2 &= -2,174 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$



Obrázek 4.44: Příklad 8 – varianta „C“ základní soustavy



Obrázek 4.45: Příklad 8 – výsledné reakce



Obrázek 4.46: Příklad 8 – průběhy vnitřních sil

# Kapitola 5

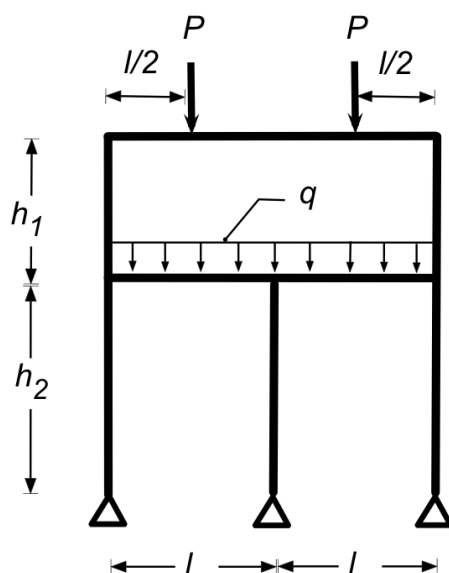
## Silová metoda řešení jednoduchého pravoúhlého staticky neurčitého uzavřeného rámu

### 5.1 Příklad 1

Zadání:

Stanovte průběhy ohybových momentů na rámu zatíženém podle obrázku 5.1.

Řešení:

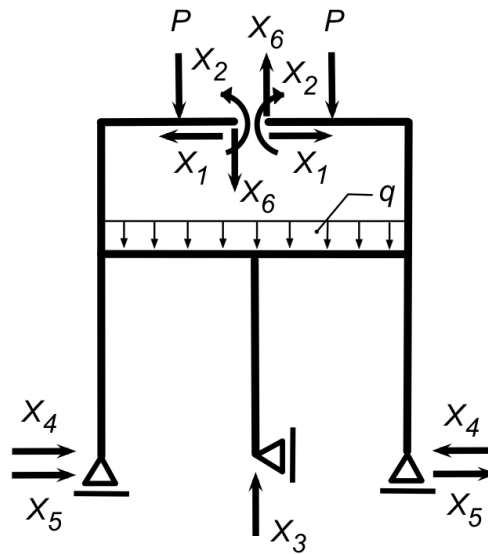


Obrázek 5.1: Uzavřený rám.

a) Soustava je  $3 + 3 = 6 \times$  staticky neurčitá. Všimněme si symetrie konstrukce, kterou velmi vhodně využijeme při řešení.

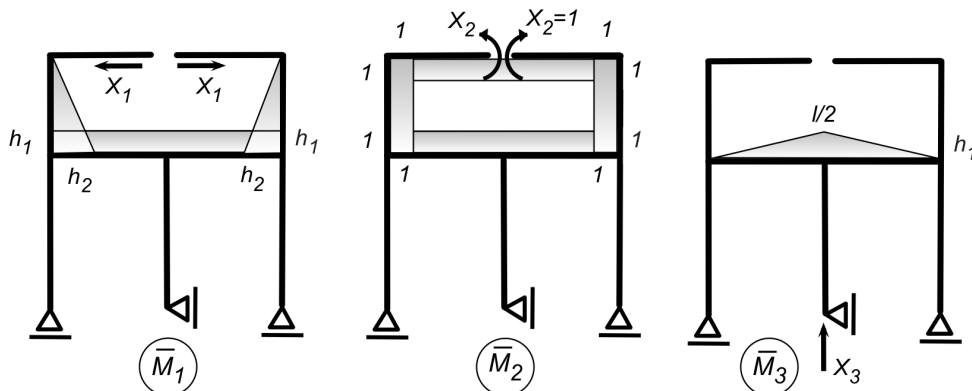


b) Vytvoříme základní soustavu přerušením horní příče a vložení náhradních sil (viz obr. 5.2).



Obrázek 5.2: Základní staticky určitá soustava s neznámými veličinami.

c) ...a vykreslíme momenty od jednotkových sil (obr. 5.3, 5.4).



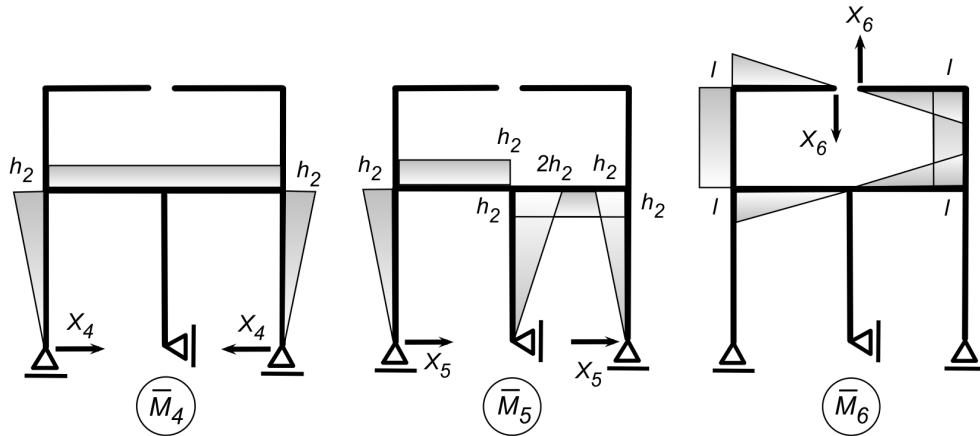
Obrázek 5.3: Průběhy momentů od jednotkových sil  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ ,  $X_3 = 1$ .

d) ...a momenty na základní soustavě od zatížení (obr. 5.5).

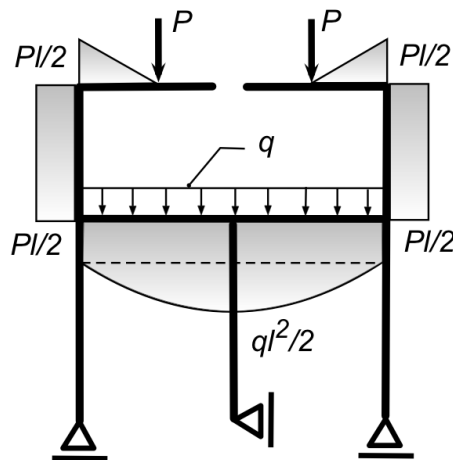
e) Sestavíme soustavu rovnic pro neznámé  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ .

$$\begin{aligned}
 X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} &= -\Delta_{1p} \\
 X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} &= -\Delta_{2p} \\
 X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} &= -\Delta_{3p} \\
 X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} &= -\Delta_{4p} \\
 X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} &= -\Delta_{5p} \\
 X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} &= -\Delta_{6p}
 \end{aligned}$$

a využijeme symetrii a antisymetrii, ze které plyne:



Obrázek 5.4: Průběhy momentů od jednotkových sil  $X_4 = 1, X_5 = 1, X_6 = 1$ .



Obrázek 5.5: Průběhy momentů od zatížení na základní soustavě.

$$\delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{25} + \delta_{26} = \delta_{35} = \delta_{36} = \delta_{45} = \delta_{46} = 0.$$

f) z čehož vyplyne nová soustava:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} &= 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + \Delta_{2p} &= 0 \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + \Delta_{3p} &= 0 \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} &= 0 \\ X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} &= 0 \\ X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0 \end{aligned}$$

g) **Z** (ne)symetrie  $\bar{M}_5$  a  $\bar{M}_p$  obdržíme:  $\bar{M}_5 \times M_p = 0 \Rightarrow \Delta_{5p} = 0$  a z (ne)symetrie  $\bar{M}_6$  a  $M_p$  obdržíme:  $\bar{M}_6 \times M_p = 0 \Rightarrow \Delta_{6p} = 0$ . **Z** posledních dvou řádek soustavy pak platí:  $X_5 = X_6 = 0$ .

## 5.1. PŘÍKLAD 1

Poznámka: V případě zatížení na konstrukci, které by bylo antisymetrické, by byly všechny symetrické členy nulové.

h) Z Vereščaginova pravidla vypočteme  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{24}, \delta_{33}, \delta_{34}, \delta_{44}, \Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \Delta_{3p}$  a  $\Delta_{4p}$ .

$$\delta_{11} : h_1 \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{3}{2} h_1 \cdot 2 + h_1 \cdot 2l \cdot h_1 = \boxed{\frac{3h_1^3}{2} + 2lh_1^2}$$

$$\delta_{12} : h_1 \cdot \frac{h_1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + h_1 \cdot 2l \cdot 1 = \boxed{h_1^2 + 2lh_1}$$

$$\delta_{13} : h_1 \cdot 2 \cdot \frac{l}{2} = \boxed{lh_1}$$

$$\delta_{14} : h_1 \cdot 2l \cdot h_2 = \boxed{2lh_1h_2}$$

$$\delta_{22} : 2 \cdot 1 \cdot 2l \cdot 1 + 2h_1 \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{4l + 2h_1}$$

$$\delta_{23} : 1 \cdot 2 \cdot \frac{l}{2} = \boxed{l}$$

$$\delta_{24} : 1 \cdot 2l \cdot h_2 = \boxed{2lh_2}$$

$$\delta_{33} : 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \boxed{\frac{1}{6}l^3}$$

$$\delta_{34} : 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot l \cdot h_2 = \boxed{l^2h_2}$$

$$\delta_{44} : h_2 \cdot h_2 + 2 \cdot h_2 \cdot h_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} h_2 = \boxed{2h_2^2 + \frac{2}{3}h_2^3}$$

a

$$\Delta_{1p} : -2h_1 \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{Pl}{2} - 2 \cdot \frac{Pl}{2} \cdot l \cdot h_1 - 2 \cdot \frac{2ql^2}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot h_1 = \boxed{-\frac{plh_1^2}{2} - Pl^2h_1 - \frac{2}{3}ql^3h_1}$$

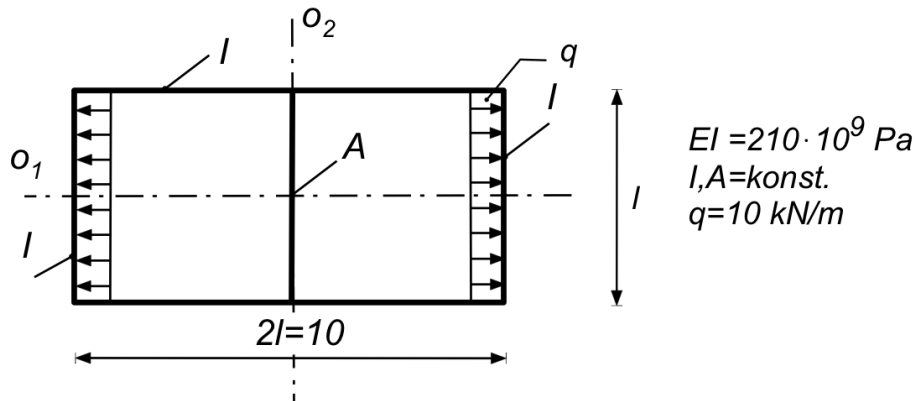
$$\Delta_{2p} : -2 \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \frac{Pl}{2} h_1 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{Pl}{2} \cdot l \cdot 1 - 2 \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot 1 = \boxed{-\frac{5Pl^2}{4} - Plh_1 - \frac{2ql^3}{3}}$$

$$\Delta_{3p} : -\frac{Pl}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot 2 - 4 \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \boxed{-\frac{Pl^3}{2} - \frac{ql^4}{8}}$$

$$\Delta_{4p} : -\frac{Pl}{2} \cdot 2l \cdot h_2 - 4 \frac{ql^2}{2} \cdot l \frac{1}{3} \cdot h_2 = \boxed{-Pl^2h_2 - \frac{2}{3}ql^3h_2}$$

i) Dosadíme skutečné hodnoty  $P, l, h_1, h_2, q$  a vyřešíme rovnice pro  $X_1, X_2, X_3 \dots X_6$ . Známe-li již tyto síly, stanovíme ohybové momenty na základní (staticky určité) soustavě.

## 5.2 Příklad 2



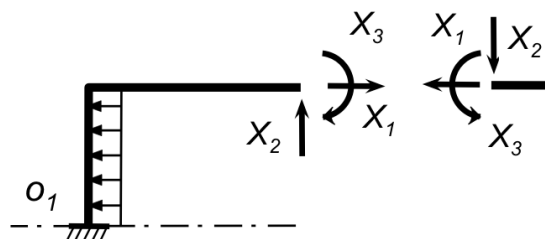
Obrázek 5.6: Uzavřený rám.

**Zadání:**

Vyřešte průběhy ohybových momentů na uzavřeném rámu podle obrázku 5.6. Uvažujte příčel  $A$  jako nekonečně tuhou.

**Řešení:**

a) Využijeme toho, že jak pro zatížení, tak rám, jsou dvě osy symetrie  $o_1$  a  $o_2$ , a uvažujeme za účelem řešení pouze 1/4 konstrukce podle obrázku 5.6. Vazby nahradíme náhradní soustavou sil (obr. 5.7). Předpoklad o neposuvném vetknutí vychází z deformace prutu, při kterém tečna v koncových řezech k deformační čáře zachovává svoji polohu i při zatěžování.



Obrázek 5.7: Využití symetrie a náhradní soustava sil.

b)  $X_1$  vypočteme z rovnováhy ve směru  $X_1$ .

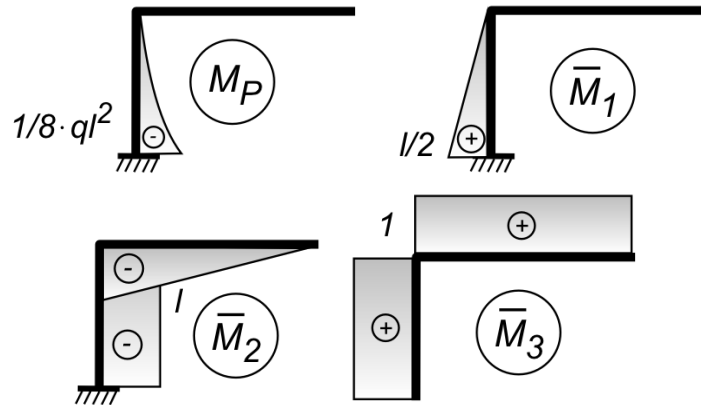
$$X_1 = \frac{q \cdot l}{2} \quad (5.1)$$

c) Pro síly  $X_2$  a  $X_3$  je nutné stanovit odpovídající deformační podmínky - nulový posun  $u_2$  a nulové natočení  $\varphi_3$ :

$$u_2 = X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \Delta_{2P} = 0$$

$$\varphi_3 = X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \Delta_{3P} = 0$$

d) Sestrojíme průběhy ohybových momentů od zatížení a jednotkových sil (obr. 5.8).



Obrázek 5.8: Průběhy ohybových momentů od jednotkových zatížení a od zatížení na základní soustavě.

e) Koeficienty  $\delta_{ij}$  spočteme např. pomocí Vereščaginova pravidla:

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{l^2}{2EI} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{l^2}{EI} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5l^3}{6EI} \\ \delta_{23} &= -\frac{l^2}{2EI} \cdot 1 - \frac{l^2}{2EI} \cdot 1 = -\frac{l^2}{EI} \\ \delta_{33} &= \frac{l}{2EI} \cdot 1 + \frac{l}{EI} \cdot 1 = \frac{3l}{2EI} \\ \delta_{21} &= -\frac{l^2}{8EI} \cdot l = -\frac{l^3}{8EI} \\ \delta_{31} &= \frac{l^3}{2 \cdot 4EI} \cdot 1 = -\frac{l^2}{8EI} \end{aligned}$$

f) Je-li příčel nepoddajná, je nutné uvažovat ke stanovení  $\Delta_{2P}$  jako vnější zatížení i síly od příčle (uvedené jako  $X_1$ ):

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= X_1 \cdot \delta_{21} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{48} q l^3 \cdot l \\ \Delta_{2P} &= \frac{ql}{2} \cdot \left( -\frac{l^3}{8EI} \right) + \frac{1}{48EI} \cdot q l^4 = -\frac{ql^4}{24EI} \end{aligned}$$

g) Obdobně musíme zohlednit pro výpočet  $\Delta_{3P}$  i vliv příčle (uvedené jako  $X_1$ ):

$$\begin{aligned} \Delta_{3P} &= X_1 \cdot \delta_{31} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{48} q l^3 \cdot 1 \\ \Delta_{3P} &= \frac{ql}{2} \cdot -\left( \frac{l^2}{8EI} \right) - \frac{1}{48EI} \cdot q l^4 = -\frac{ql^4}{24EI} \end{aligned}$$

h) Nyní již dosadíme do deformačních podmínek:

$$\begin{aligned} X_2 \cdot \frac{5l^3}{6EI} - X_3 \cdot \frac{l^2}{EI} &= \frac{ql^4}{24EI} \\ -X_2 \cdot \frac{l^2}{EI} + X_3 \cdot \frac{3l}{2EI} &= -\frac{ql^3}{24EI} \end{aligned}$$

a tudíž:

$$\begin{aligned} X_2 \cdot \frac{5l}{6} - X_3 &= \frac{ql^4}{24} \\ -X_2 \cdot l + X_3 \cdot \frac{3}{2} &= -\frac{ql^2}{24EI} \end{aligned}$$

Výsledné hodnoty neznámých  $X_2$  a  $X_3$  již lehce stanovíme:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{q \cdot l}{12} \\ X_3 &= \frac{q \cdot l^2}{36} \end{aligned}$$

i) Pozn.: Bude-li příčka rámu poddajná, pak lze pro deformaci  $\Delta_{2P}$  stanovit:

$$\Delta_{2P} = X_1 \cdot \delta_{21} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{48} ql^3 \cdot l + \Delta_{el.}$$

kde pro  $\Delta_{el.}$ , tedy stlačení příčky od  $X_2$ , platí:

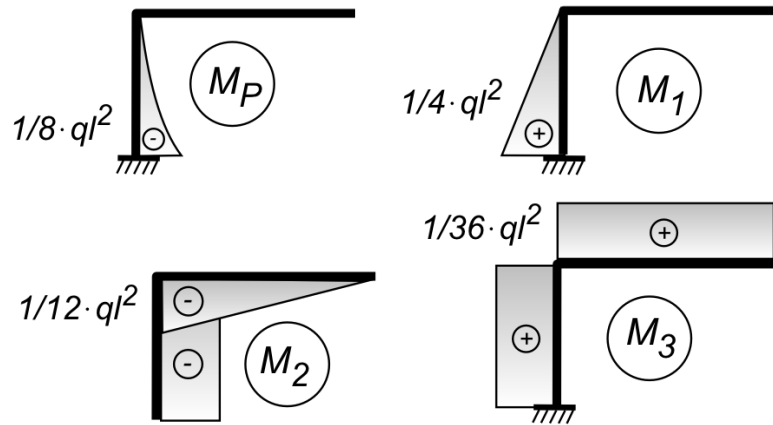
$$\Delta_{el.} = X_2 \cdot \frac{l}{EA}$$

j) Momenty již laskavý čtenář stanoví z principu superpozice podle následující rovnice:

$$M = M_P + \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \overline{M}_3 \cdot X_3$$

neboli (viz obr. 5.9)

$$M = M_P + M_1 + M_2 + M_3$$

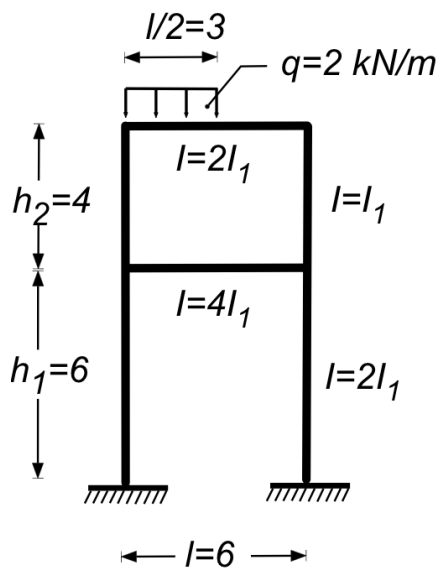


Obrázek 5.9: Výsledné průběhy momentů.

### 5.3 Příklad 3

#### Zadání:

Vypočtete ohybové momenty na konstrukci dvoupatrového rámu s rozměry a vlastnostmi podle obrázku 5.10.

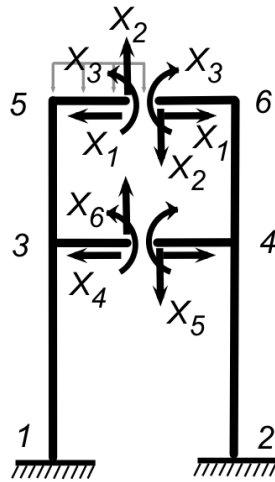


Obrázek 5.10: Dvoupatrový rám.

#### Řešení:

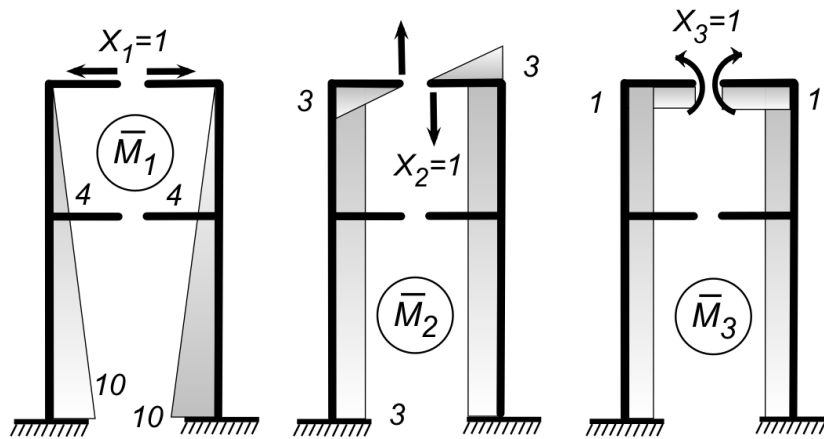
a) jedná se o  $6 \times$  staticky neurčitou soustavu se třemi vnitřními a třemi vnějšími nadbytečnými vazbami.

b) Určíme základní soustavu podle obrázku 5.11. Využijeme při tom nejen symetrii rámu, ale i nesymetrii zatížení.



Obrázek 5.11: Základní soustava.

c) Stanovíme momenty na jednotlivých jednotkových stavech (obr. 5.12, 5.13).



Obrázek 5.12: Momenty od jednotkových sil na základní soustavě.

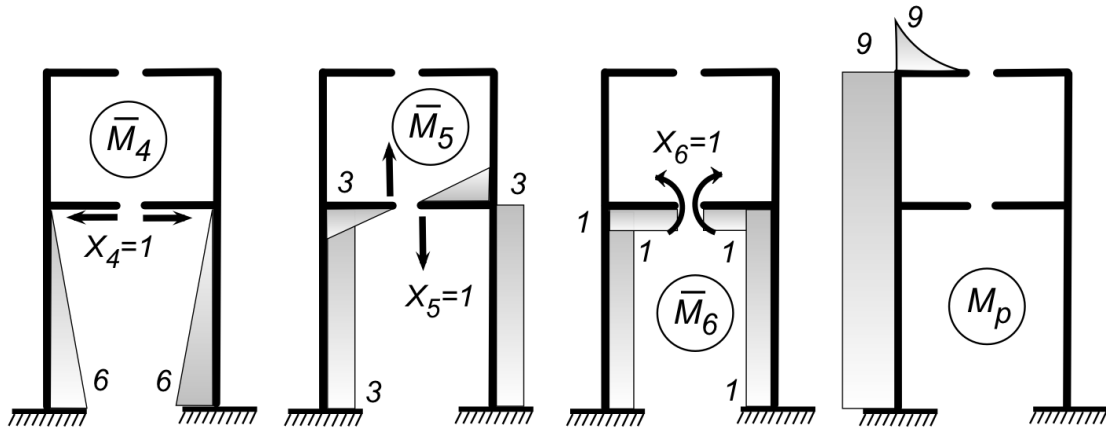
d) Využijeme symetrii základní soustavy k eliminaci některých deformací  $\delta_{ij}$ .

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{15} = 0; & & \delta_{21} = \delta_{51} = 0; & & \delta_{23} = \delta_{24} = 0; & & \delta_{32} = \delta_{42} = 0; \\ \delta_{35} = \delta_{53} = 0; & & \delta_{45} = \delta_{54} = 0; & & \delta_{56} = \delta_{65} = 0; & & \delta_{26} = \delta_{62} = 0; \end{aligned}$$

e) Sestavíme kanonické rovnice soustavy.

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} &= -\Delta_{1p} \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} &= -\Delta_{2p} \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} &= -\Delta_{3p} \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} &= -\Delta_{4p} \\ X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} &= -\Delta_{5p} \\ X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} &= -\Delta_{6p} \end{aligned}$$





Obrázek 5.13: Momenty od jednotkových sil a od zatížení na základní soustavě.

f) S přihlédnutím k symetrii (bod d) dostáváme upravenou soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
 X_1\delta_{11} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1p} &= 0 \\
 X_1\delta_{31} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} &= 0 \\
 X_1\delta_{41} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} &= 0 \\
 X_1\delta_{41} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0 \\
 X_2\delta_{22} + X_5\delta_{25} + \Delta_{2p} &= 0 \\
 X_2\delta_{52} + X_5\delta_{55} + \Delta_{5p} &= 0
 \end{aligned}$$

g) Ke stanovení součinitelů  $\delta_{ik}$  využijeme Mohrovy integrály (a Vereščagina pravidla). Můžeme vynásobit rovnice součinitelem  $EI_1$ , rovnice se nám nezmění. (Je třeba však být obezřetný při násobení různými tuhostmi  $EI$ .)

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{1} + \frac{6}{6} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 10) \cdot \frac{2}{2} &= 354,7 \\
 \delta_{13} &= \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot \frac{4 + 10}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} &= 58,0 \\
 \delta_{14} &= \frac{4 \cdot 6}{2} \left( 4 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \cdot \frac{2}{2} &= 144,0 \\
 \delta_{16} &= \frac{4 + 10}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} &= 42,0 \\
 \delta_{22} &= \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot 3 \cdot 22 &= 135,0 \\
 \delta_{25} &= 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 &= 54,0 \\
 \delta_{55} &= \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 &= 58,5 \\
 \delta_{33} &= 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} &= 17,0 \\
 \delta_{34} &= \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 &= 18,0 \\
 \delta_{36} &= 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 &= 6,0
 \end{aligned}$$

$$\delta_{44} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{2} = 72,0$$

$$\delta_{46} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 18,0$$

$$\delta_{66} = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 7,5$$

a

$$\Delta_{1p} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 1} - \frac{6(10+4) \cdot 9}{2 \cdot 2} = -261,0$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{9 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 + 4 \cdot 9 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 9 \cdot 3}{2} = -199,1$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{3 \cdot 9 \cdot 1}{3 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 9 \cdot 1}{1} - \frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{2} = -67,5$$

$$\Delta_{4p} = -\frac{6 \cdot 6 \cdot 9}{2} = -81,0$$

$$\Delta_{5p} = -\frac{6 \cdot 9 \cdot 3}{2} = -81,0$$

$$\Delta_{6p} = -\frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{2} = -27,0$$

h) Známe-li koeficienty  $\delta_{ik}$  a  $\Delta_{ip}$  vyřešíme soustavu rovnic (řešíme buď jednu soustavu, nebo dvě nezávislé soustavy rovnic, jak plyne ze struktury):

$$354,7 \cdot X_1 + 58,0 \cdot X_3 + 144,0 \cdot X_4 + 42 \cdot X_6 = 261,0$$

$$58,0 \cdot X_1 + 17,0 \cdot X_3 + 18,0 \cdot X_4 + 6,0 \cdot X_6 = 67,5$$

$$144,0 \cdot X_1 + 18,0 \cdot X_3 + 72,0 \cdot X_4 + 18,0 \cdot X_6 = 81,0$$

$$42,0 \cdot X_1 + 6,0 \cdot X_3 + 18,0 \cdot X_4 + 7,5 \cdot X_6 = 27,0$$

$$135,0 \cdot X_2 + 54,0 \cdot X_5 = 199,1$$

$$54,0 \cdot X_2 + 58,5 \cdot X_5 = 81,0$$

i) Z těchto rovnic získáme hodnoty neznámých  $X_i$ :

$$X_1 = 0,677;$$

$$X_2 = 1,460;$$

$$X_3 = 2,753;$$

$$X_4 = -0,692;$$

$$X_5 = 0,037;$$

$$X_6 = -0,340;$$

j) Výsledné momenty stanovíme po dosazení neznámých (nyní již spočtených) sil  $X_i$  do rovnice:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_6 \cdot X_6 + M_p$$

kde  $\bar{M}_i$  jsou momenty od jednotkového zatížení a  $M_p$  je moment od zatížení na základní soustavě, podle obrázku 5.11.

k) Momenty od jednotkových sil a momenty od zatížení na základní soustavě.

**Indexem značíme body na konstrukci.**

$$\begin{aligned}M_{56} &= + 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 9 &&= - 1,87 \text{ kNm} \\M_{65} &= - 1,460 \cdot 3 + 2,753 &&= - 1,64 \text{ kNm} \\M_{34} &= + 0,037 \cdot 3 - 0,340 &&= - 0,23 \text{ kNm} \\M_{43} &= - 0,037 \cdot 3 - 0,340 &&= - 0,45 \text{ kNm} \\M_{35} &= + 0,607 \cdot 4 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 9 &&= + 0,56 \text{ kNm} \\M_{46} &= + 0,607 \cdot 4 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 &&= + 0,80 \text{ kNm} \\M_{25} &= + 0,607 \cdot 4 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 + 0,037 \cdot 3 - 0,340 - 9 &&= + 0,33 \text{ kNm} \\M_{55} &= + 0,607 \cdot 10 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,037 \cdot 3 - 0,340 &&= + 0,33 \text{ kNm} \\M_{33} &= + 0,607 \cdot 10 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 + 0,692 \cdot 6 + 0,037 \cdot 3 - 0,340 - 9 &&= - 0,18 \text{ kNm} \\M_{34} &= + 0,607 \cdot 10 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 + 0,692 \cdot 6 - 0,037 \cdot 3 - 0,340 &&= + 0,16 \text{ kNm}\end{aligned}$$

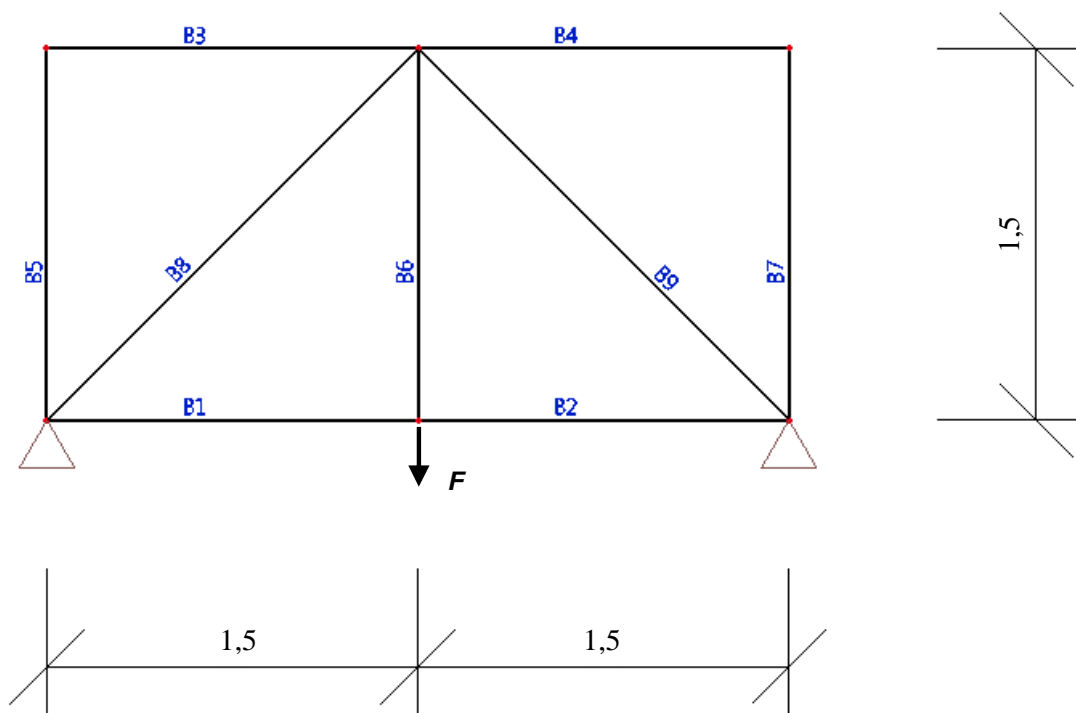
Vykreslení momentových obrazců je již snadné.

# Kapitola 6

## Řešení staticky neurčitých příhradových konstrukcí

### 6.1 Příklad 1

Určete vnitřní síly u zobrazeného příhradového nosníku. Velikost síly je  $F = 40$  kN. Schéma příhradového nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 6.1 na str. 79.



Obrázek 6.1: Schéma konstrukce

Řešení staticky neurčitého příhradového nosníku je možné rozdělit do několika kroků. Prvním krokem výpočtu je určení stupně statické neurčitosti  $n_s$ . U uvedeného příkladu je hodnota stupně statické neurčitosti 1. Další postup je obdobný jako v případě rovinných rámců. Musí se vytvořit základní, staticky a kinematicky určitá soustava. Protože u příhradového nosníku je navíc jedna vnější vazba, může se pro jednoduchost výpočtu zvolit za staticky neznámou veličinu

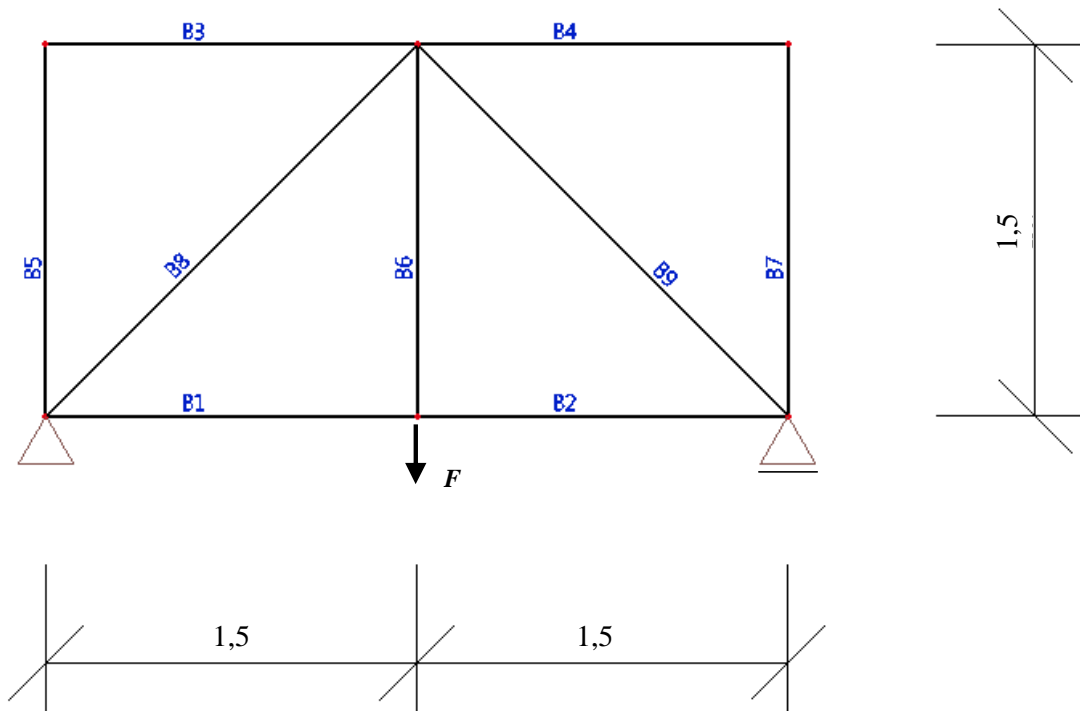
## 6.1. PŘÍKLAD 1

například horizontální vazba v pravé podpoře. Směr volíme zpravidla ve směru očekávané výsledné reakce. Následně se může vytvořit *základní soustava*, *nultý zatěžovací stav* a *1. zatěžovací stav*. Pro vytvořené zatěžovací stavy se může využít podmínek rovnováhy a vypočítat normálové síly, které se použijí při výpočtu deformací  $\delta_{10}$  a  $\delta_{11}$ . Postup a princip výpočtu je obdobný jako při řešení rámových konstrukcí. Výpočet se dále liší pouze tak, že z Maxwell-Mohrova vzorce (1.1) pro výpočet deformace se bere v úvahu pouze člen pro normálové síly. Ohybové momenty a posouvající síly jsou na příhradové konstrukci nulové. Výsledná deformační podmínka se pak může zapsat

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0, \quad (6.1)$$

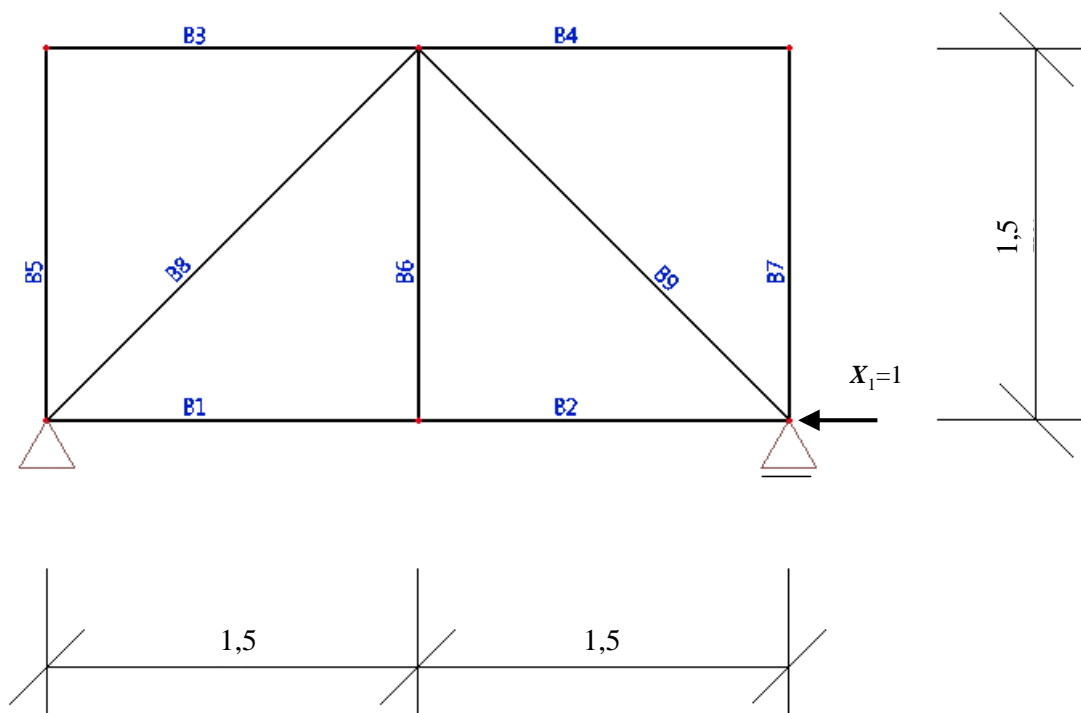
kde  $X_1$  je hledaná neznámá veličina.

Schéma zatížení nultého zatěžovacího stavu je zobrazeno na obr. 6.2 na str. 80.



Obrázek 6.2: Zatěžovací stav 0

Schéma zatížení prvního zatěžovacího stavu je zobrazeno na obr. 6.3 na str. 81.



Obrázek 6.3: Zatěžovací stav 1

## 6.1. PŘÍKLAD 1

Hodnoty normálových sil pro jednotlivé zatěžovací stavy a výsledné hodnoty pro staticky neurčitý příhradový nosník jsou uvedeny v tab. 6.1 na str. 82.

Prut	$N_0$ [kN]	$N_1$ [kN]	Délka prutu [m]	$\delta_{10}$	$\delta_{11}$	$N$ [kN]
1	20,00	-1,00	1,50	-30,00	1,50	0,00
2	20,00	-1,00	1,50	-30,00	1,50	0,00
3	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
6	40,00	0,00	1,50	0,00	0,00	40,00
7	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
8	-28,28	0,00	2,12	0,00	0,00	-28,28
9	-28,28	0,00	2,12	0,00	0,00	-28,28
$\Sigma$				-60	3	
					$X_1$	20

Tabulka 6.1: Normálové síly

Výsledná neznámá reakce v místě pravé podpory se dopočte:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad (6.2)$$

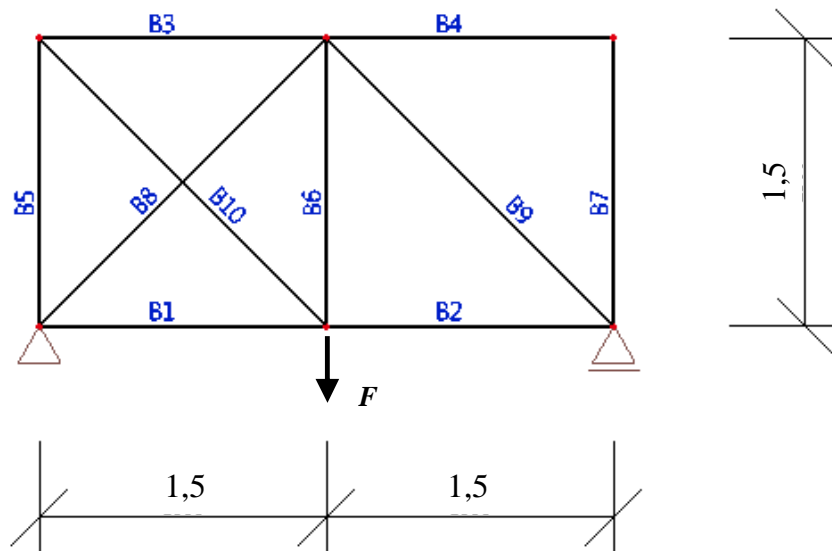
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=9} \bar{N}_i \bar{N}_i l_i = \frac{3,00}{EA} \quad (6.3)$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=9} N_i \bar{N}_i l_i = \frac{-60,00}{EA} \quad (6.4)$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-60,00}{3,00} = 20,00 \text{ kN} \quad (6.5)$$

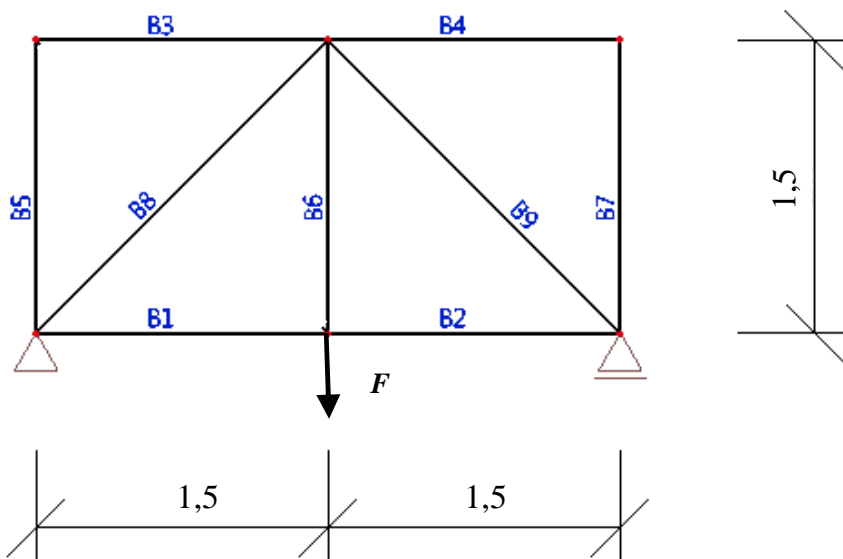
## 6.2 Příklad 2

Určete vnitřní síly u zobrazeného příhradového nosníku. Velikost síly je  $F = 40$  kN. Schéma příhradového nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 6.4 na str. 83.



Obrázek 6.4: Schéma konstrukce

Schéma zatížení nultého zatěžovacího stavu je zobrazeno na obr. 6.5 na str. 83.



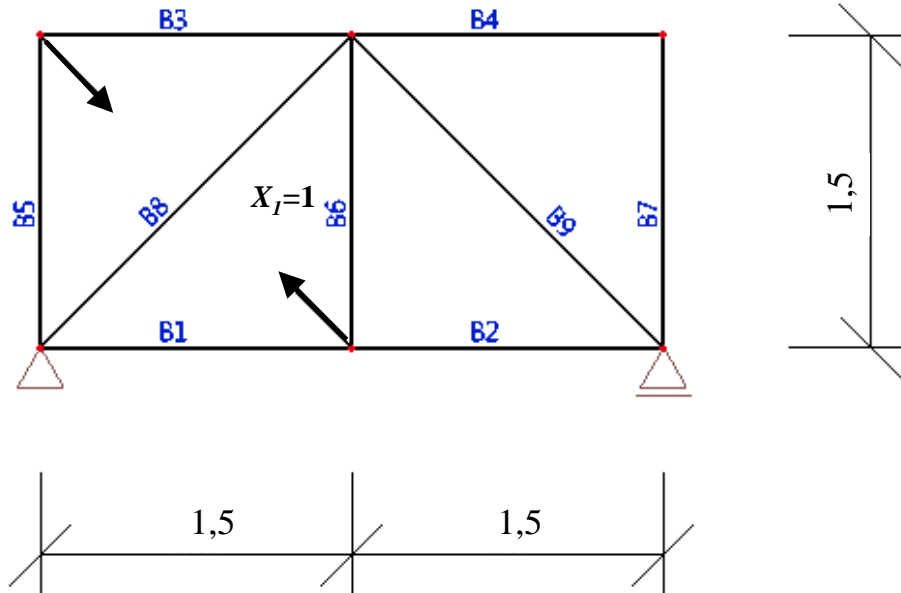
Obrázek 6.5: Zatěžovací stav 0

Schéma zatížení prvního zatěžovacího stavu je zobrazeno na obr. 6.6 na str. 84.



## 6.2. PŘÍKLAD 2

Uvedený příhradový nosník je jedenkrát vnitřně staticky neurčitý. Z tohoto důvodu se volí za staticky neurčitou veličinu normálová síla v jednom z prutů. Konkrétně se jedná o prut  $B10$ . Další rozdíly v řešení ve srovnání s předešlým příkladem nejsou.



Obrázek 6.6: Zatěžovací stav 1

Hodnoty normálových sil pro jednotlivé zatěžovací stavy a výsledné hodnoty pro staticky neurčitý příhradový nosník jsou uvedeny v tab. 6.2 na str. 85.

Výsledná neznámá reakce v místě pravé podpory se dopočte:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad (6.6)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=9} \bar{N}_i \bar{N}_i l_i = \frac{7,24}{EA} \quad (6.7)$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=9} N_i \bar{N}_i l_i = \frac{-123,61}{EA} \quad (6.8)$$

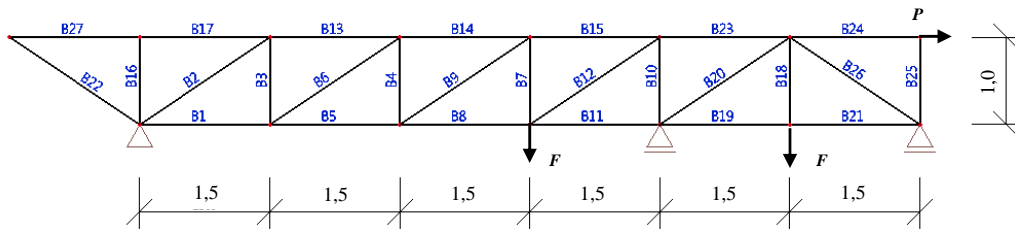
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-123,612}{7,24} = 17,07 \text{ kN} \quad (6.9)$$

Prut	$N_0$ [kN]	$N_1$ [kN]	Délka prutu [m]	$\delta_{10}$	$\delta_{11}$	$N$ [kN]
1	20,00	-0,71	1,50	-21,21	0,75	7,93
2	20,00	0,00	1,50	0,00	0,00	20,00
3	0,00	-0,71	1,50	0,00	0,75	-12,07
4	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
5	0,00	-0,71	1,50	0,00	0,75	-12,07
6	40,00	-0,71	1,50	-42,42	0,75	27,93
7	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
8	-28,28	1,00	2,12	-59,98	2,12	-11,21
9	-28,28	0,00	2,12	0,00	0,00	-28,28
10		1,00	2,12	0,00	2,12	17,07
			$\Sigma$	-123,61	7,24	
					$X_1$	17,07

Tabulka 6.2: Normálové síly

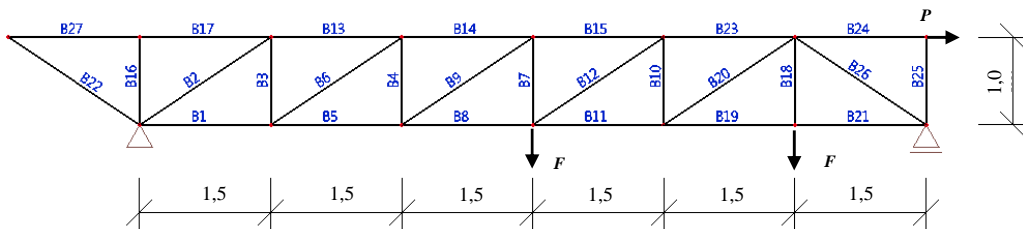
### 6.3 Příklad 3

Určete vnitřní síly u zobrazeného příhradového nosníku. Velikost síly je  $F = 100$  kN a  $P = 40$  kN. Schéma příhradového nosníku a zatížení je uvedeno na obr. 6.7 na str. 86.



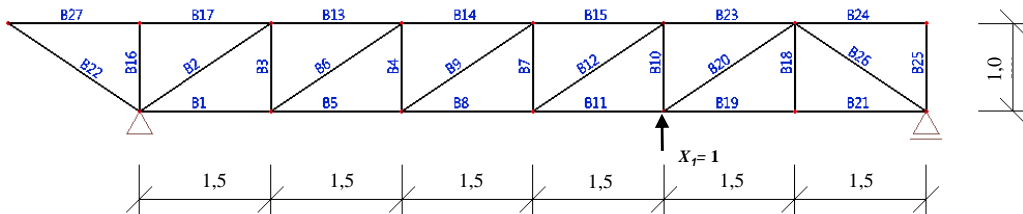
Obrázek 6.7: Schéma konstrukce

Schéma zatížení nultého zatěžovacího stavu je zobrazeno na obr. 6.8 na str. 86.



Obrázek 6.8: Zatěžovací stav 0

Schéma zatížení prvního zatěžovacího stavu je zobrazeno na obr. 6.9 na str. 86.



Obrázek 6.9: Zatěžovací stav 1

### 6.3. PŘÍKLAD 3

Hodnoty normálových sil pro jednotlivé zatěžovací stavy a výsledné hodnoty pro staticky neurčitý příhradový nosník jsou uvedeny v tab. 6.3 na str. 87.

Prut	$N_0$ [kN]	$N_1$ [kN]	Délka prutu [m]	$\delta_{10}$	$\delta_{11}$	$N$ [kN]
1	166,67	-0,50	1,50	-125,00	0,38	51,05
2	-248,38	0,60	1,80	-269,11	0,65	-109,43
3	137,78	-0,33	1,00	-45,93	0,11	60,70
4	137,78	-0,33	1,00	-45,93	0,11	60,70
5	373,33	-1,00	1,50	-560,00	1,50	142,09
6	-248,38	0,60	1,80	-269,11	0,65	-109,43
7	37,78	-0,33	1,00	-12,59	0,11	-39,30
8	430,00	-1,50	1,50	-967,50	3,38	83,14
9	-68,10	0,60	1,80	-73,78	0,65	70,85
10	-62,22	-0,33	1,00	20,74	0,11	-139,30
11	336,60	-2,00	1,50	-1009,80	6,00	-125,81
12	112,17	0,60	1,80	121,53	0,65	251,13
13	-206,67	0,50	1,50	-155,00	0,38	-91,05
14	-413,33	1,00	1,50	-620,00	1,50	-182,09
15	-470,00	1,50	1,50	-1057,50	3,38	-123,14
16	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00
18	100,00	0,00	1,00	0,00	0,00	100,00
19	243,33	-1,00	1,50	-365,00	1,50	12,09
20	112,17	-1,20	1,80	-243,07	2,60	-165,74
21	243,33	-1,00	1,50	-365,00	1,50	12,09
22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
23	-376,67	2,00	1,50	-1130,01	6,00	85,81
24	-40,00	0,00	1,50	0,00	0,00	-40,00
25	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
26	-292,45	1,20	1,80	-633,72	2,60	-14,54
27	0	0	1,5	0	0	0
			$\Sigma$	-7805,77	33,76	
					$X_1$	231,23

Tabulka 6.3: Normálové síly

Výsledná neznámá reakce v místě pravé podpory se dopočte:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad (6.10)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=27} \bar{N}_i \bar{N}_{i1} l_i = \frac{33,76}{EA} \quad (6.11)$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{n=27} N_i \bar{N}_{i1} l_i = \frac{-7805,77}{EA} \quad (6.12)$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-7805,77}{33,757} = 231,23 \text{ kN} \quad (6.13)$$

# Kapitola 7

## Rošty – řešení silovou metodou

K řešení konstrukce roštu silovou metodou uplatníme při tvorbě výpočtového modelu následující předpoklad: v místě křížení dochází mezi dvojicí spojených prutů pouze k přenosu svislé interakce (na obr. 7.1 je interakce mezi pruty pro názornost vyjádřena krátkým kyvným prutem v bodě  $c$ ). Zavedení tohoto předpokladu eliminuje vznik kroutících momentů na křížících se prutech, takže vliv kroutících momentů není potřeba zohlednit ve výpočtu. Dalším důsledkem použitého předpokladu je redukce počtu neznámých silových veličin, jenž je vyjádřen tzv. stupněm statické neurčitosti. Při výpočtu roštů silovou metodou lze s výhodou využít také případnou symetrii konstrukce a zatížení a docílit tak dalšího snížení počtu neznámých.

### 7.1 Příklad 1

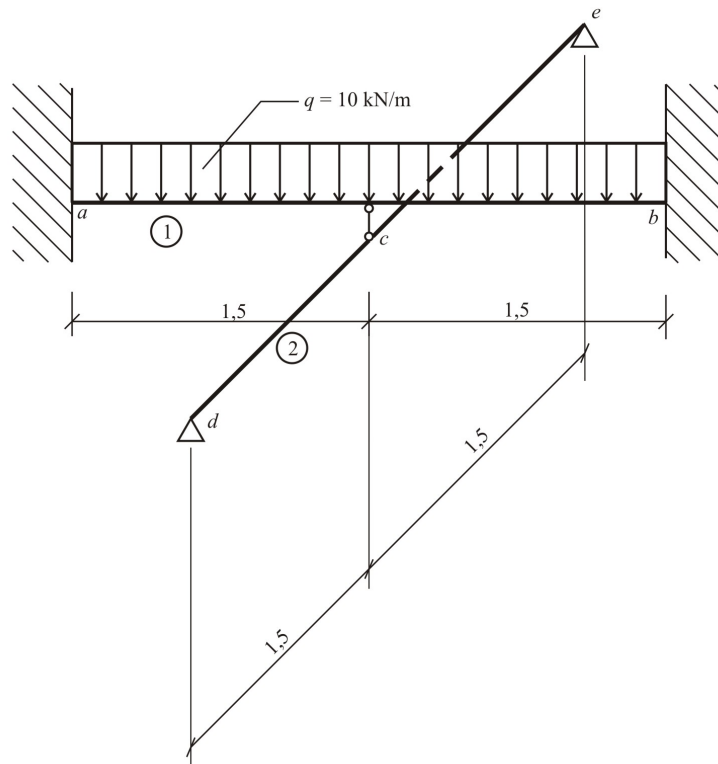
Určete reakce a vnitřní síly na roštu, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.1.

#### 7.1.1 Základní soustava

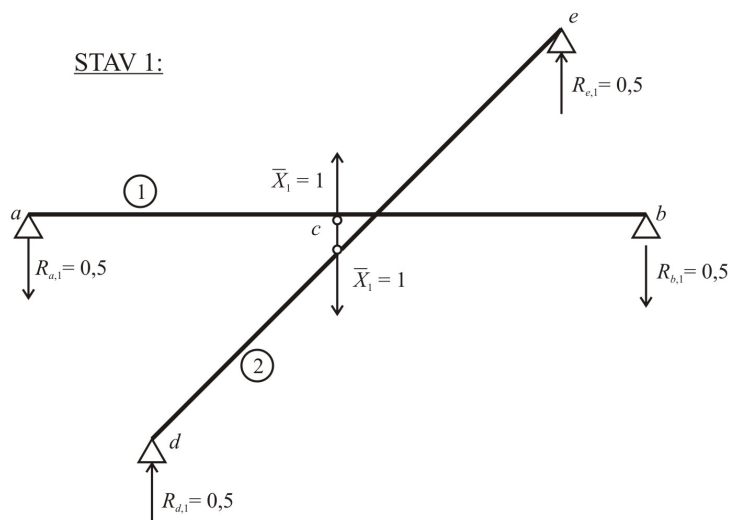
Uvedená konstrukce roštu je třikrát staticky neurčitá, uplatnění výše zmíněného předpokladu a využití symetrie tvaru a zatížení však dovolí redukovat počet neznámých na dvě. Pro zjednodušení jsou v dalším textu obě momentové reakce ve vetknutí v podporách  $a$  a  $b$  označovány jedinou staticky neurčitou veličinou.

Kromě neznámé interakce v místě křížení (staticky neurčitá veličina  $X_1$ ) je nutno také určit dva momenty ve vetknutí, které jsou vzhledem k symetrii stejné (staticky neurčitá veličina  $X_2$ ). Po uvolnění vazeb, které jsou vázány k oběma staticky neurčitým veličinám, vznikne staticky určitá základní soustava, která se skládá ze dvou prostých nosníků, na kterých je nutno určit průběhy ohybových momentů od jednotkového zatížení  $\bar{X}_1 = 1$  (zatěžovací stav 1, obr. 7.2),  $\bar{X}_2 = 1$  (zatěžovací stav 2, obr. 7.3) a skutečného zatížení (zatěžovací stav  $p$ , obr. 7.4).

Průběhy ohybových momentů od zatěžovacích stavů 1, 2 a  $p$  jsou pak zobrazeny na obr. 7.10, 7.11 a 7.7.



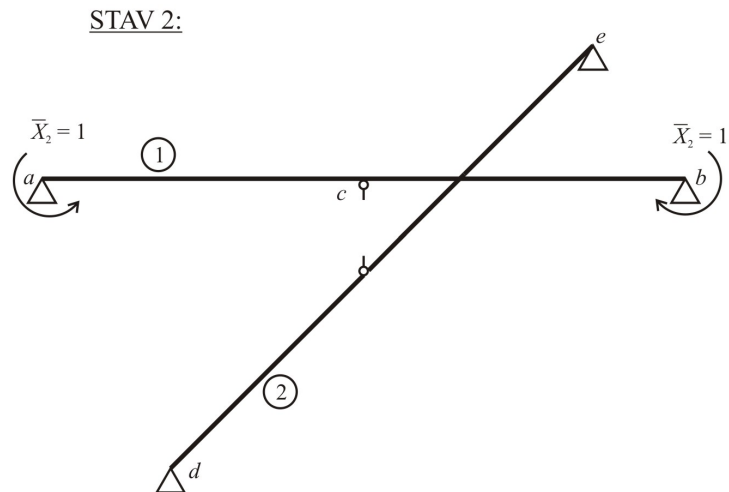
Obrázek 7.1: Statické schéma roštu příkladu 1



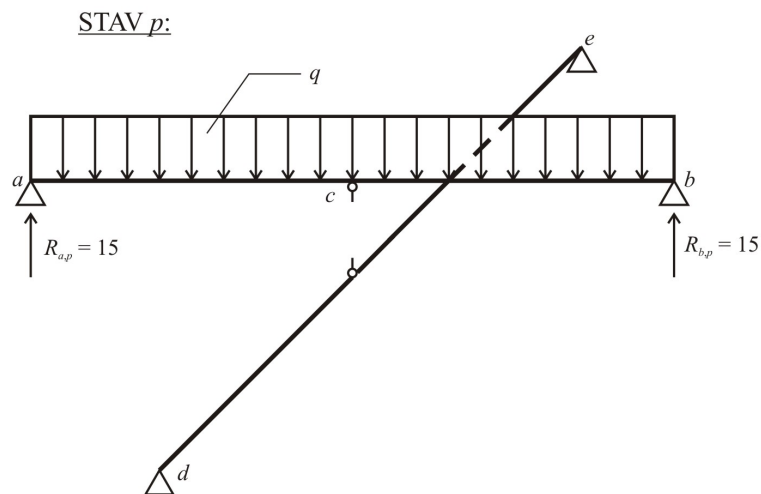
Obrázek 7.2: Zatěžovací stav 1

### 7.1.2 Řešení soustavy rovnic a určení staticky neurčitých veličin

V dalším výpočtu je nutno sestavit a vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $X_1$  a  $X_2$ :



Obrázek 7.3: Zatěžovací stav 2



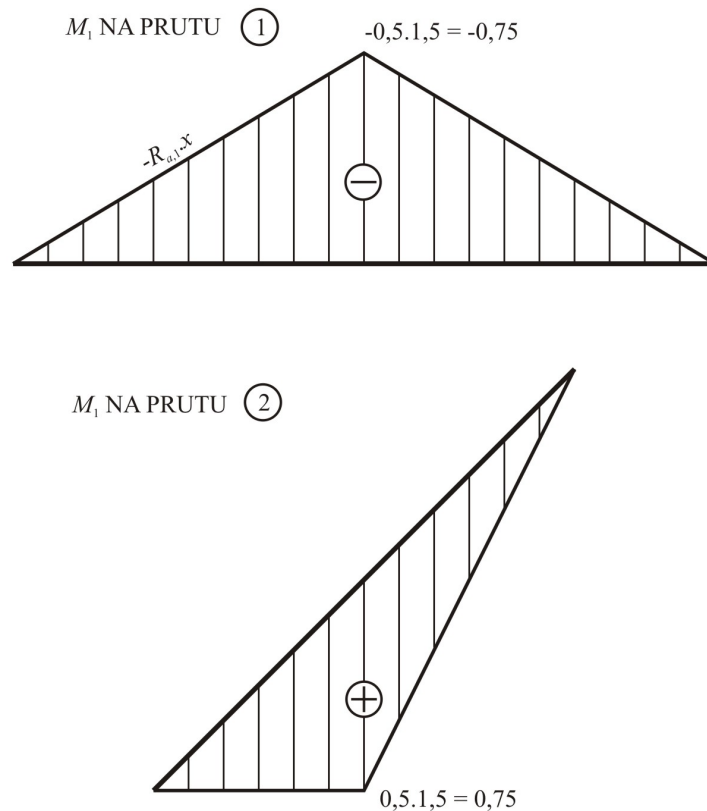
Obrázek 7.4: Zatěžovací stav  $p$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1p} = 0 \quad (7.1)$$

a

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2p} = 0 \quad (7.2)$$

Veličiny označené  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{1p}$ ,  $\delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$  a  $\delta_{2p}$  jsou tzv. přetvární součinitelé, které lze získat integrací příslušných momentových ploch z obr. 7.10, 7.11 a 7.7:



Obrázek 7.5: Průběh ohybových momentů od zatěžovacího stavu 1

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^{l_1} \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^{l_2} \frac{M_1^2}{EI} dx = \\ &= \frac{2}{EI} \cdot [1,5 \cdot -0,75 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot -0,75 + 1,5 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75] = \frac{1,125}{EI}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{EI} \cdot [1,5 \cdot -0,75 \cdot \frac{1}{2} \cdot -1] = \frac{1,125}{EI}, \quad (7.4)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot [3 \cdot -1 \cdot -1] = \frac{3}{EI}, \quad (7.5)$$

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{-0,75 \cdot 11,25}{3 \cdot 3} \cdot (3^2 \cdot \frac{3^2}{4}) \right] = \frac{-10,5469}{EI}, \quad (7.6)$$

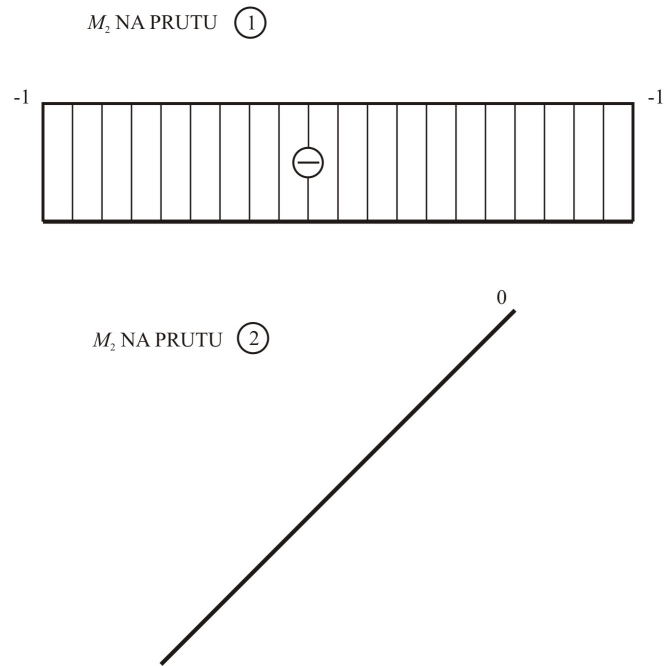
$$\delta_{2p} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot 11,25 \cdot -1 \cdot 3 \right] = \frac{-22,5}{EI}. \quad (7.7)$$

Po dosazení převárných součinitelů (7.3) až (7.7) do rovnic (7.1) a (7.2) a vyřešení soustavy lze získat výsledné staticky neurčitě veličiny:

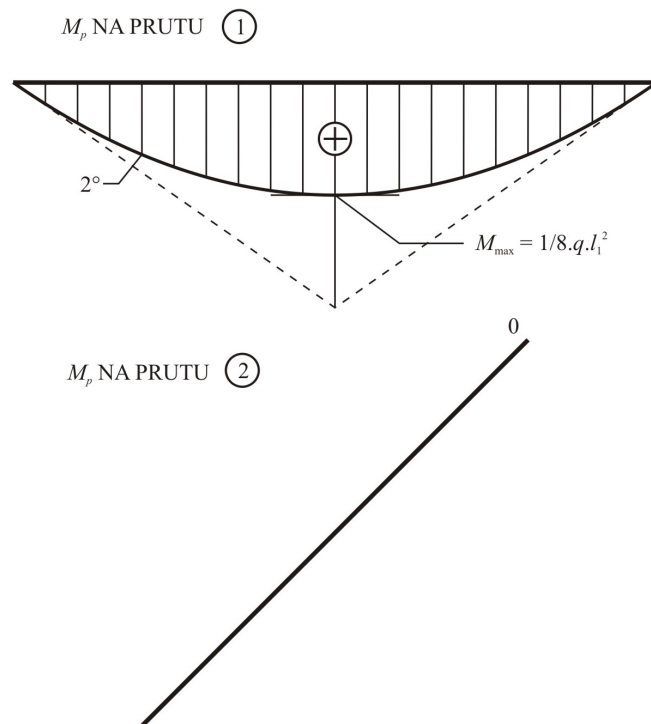
$$X_1 = 3,0 \text{ [kN]} \quad (7.8)$$

a





Obrázek 7.6: Průběh ohybových momentů od zatěžovacího stavu 2



Obrázek 7.7: Průběh ohybových momentů od zatěžovacího stavu  $p$

$$X_2 = M_{a,b} = 6,375 \text{ [kNm]}. \quad (7.9)$$

### 7.1.3 Výpočet reakcí a průběhy vnitřních sil

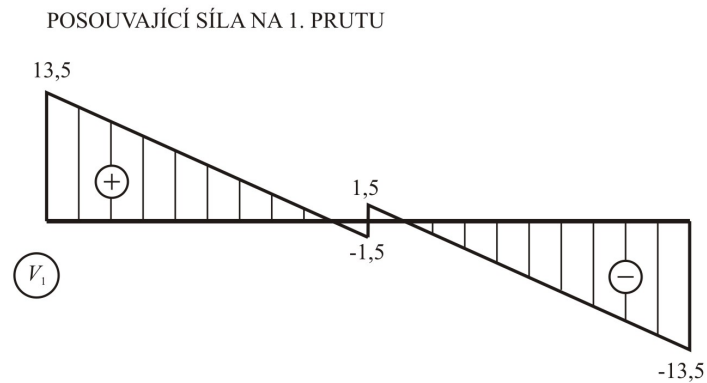
Zbývající silové reakce ve vnějších vazbách lze určit:

$$R_a = R_b = R_{a,1} \cdot X_1 + R_{a,p} = -0,5 \cdot 3 + 15 = 13,0 \text{ [kN]} (\uparrow) \quad (7.10)$$

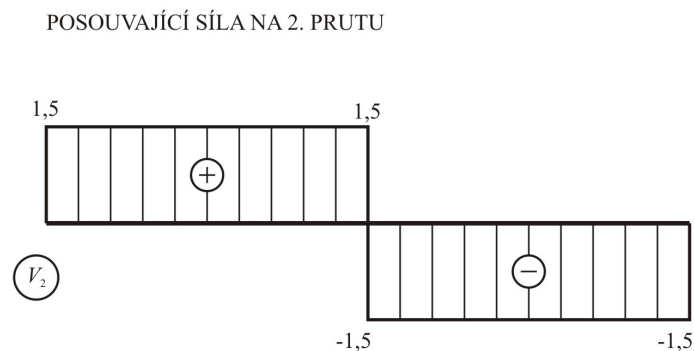
a

$$R_d = R_e = R_{d,1} \cdot X_1 = 0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ [kN]} (\uparrow). \quad (7.11)$$

Výsledné průběhy posouvajících sil a ohybových momentů na obou prutech jsou uvedeny na obr. 7.8 až 7.11.

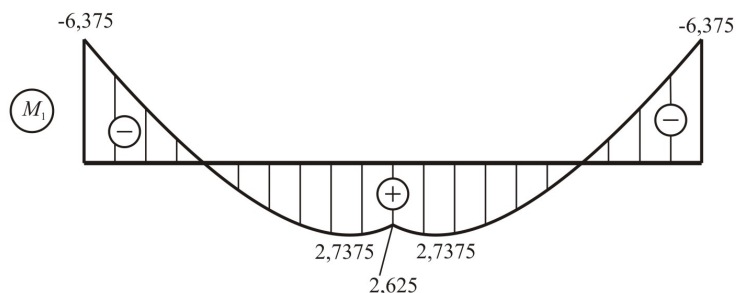


Obrázek 7.8: Průběh posouvajících sil na 1. prutu roštu



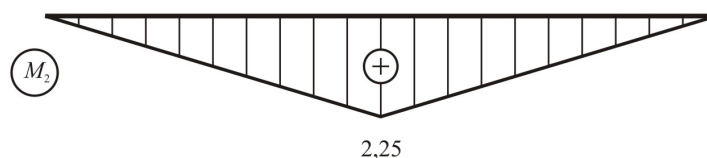
Obrázek 7.9: Průběh posouvajících sil na 2. prutu roštu

OHYBOVÝ MOMENT NA 1. PRUTU



Obrázek 7.10: Průběh pohybových momentů na 1. prutu roštu

OHYBOVÝ MOMENT NA 2. PRUTU



Obrázek 7.11: Průběh pohybových momentů na 2. prutu roštu

## 7.2 Příklad 2

Určete reakce a vnitřní síly na roštu, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.12. Zatížení rovnoměrné spojitě má velikost  $q = 45 \text{ kN/m}$ .

### 7.2.1 Základní soustava

Uvedená konstrukce roštu je díky oboustranné symetrii jedenkrát staticky neurčitá s neznámou interakcí v místech křížení  $b$  a  $b'$  (staticky neurčitá veličina  $X_1$ ).

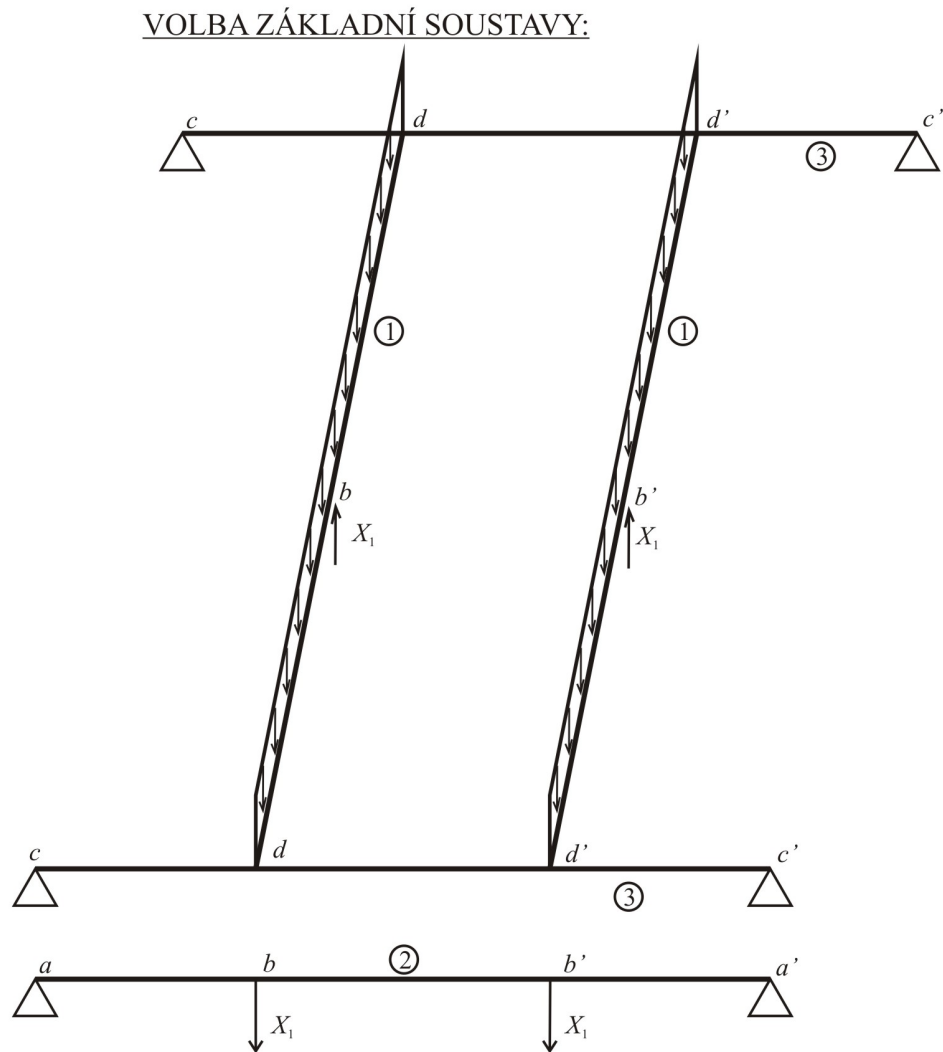
Po uvolnění konstrukce v místě křížení  $b$  a  $b'$  vznikne staticky určitá základní soustava (obr. 7.13), na které je nutno určit průběhy ohybových momentů od jednotkového zatížení  $\bar{X}_1 = 1$  (zatěžovací stav 1) a skutečného zatížení (zatěžovací stav  $p$ ). Průběhy ohybových momentů od zatěžovacích stavů 1 a  $p$  jsou zobrazeny na obr. 7.14, 7.15 a 7.16.

### 7.2.2 Určení staticky neurčité veličiny

V dalším výpočtu je nutno sestavit a vyřešit rovnici o neznámé  $X_1$ :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1p} = 0. \quad (7.12)$$

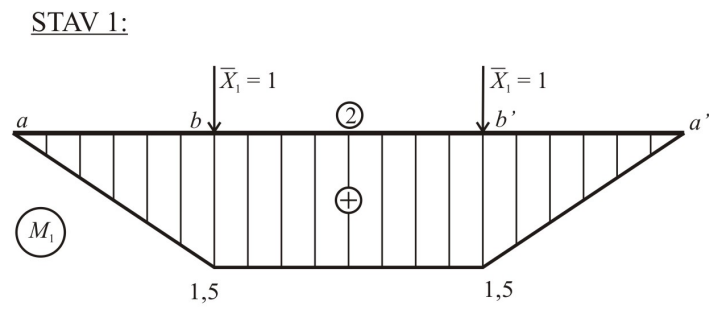




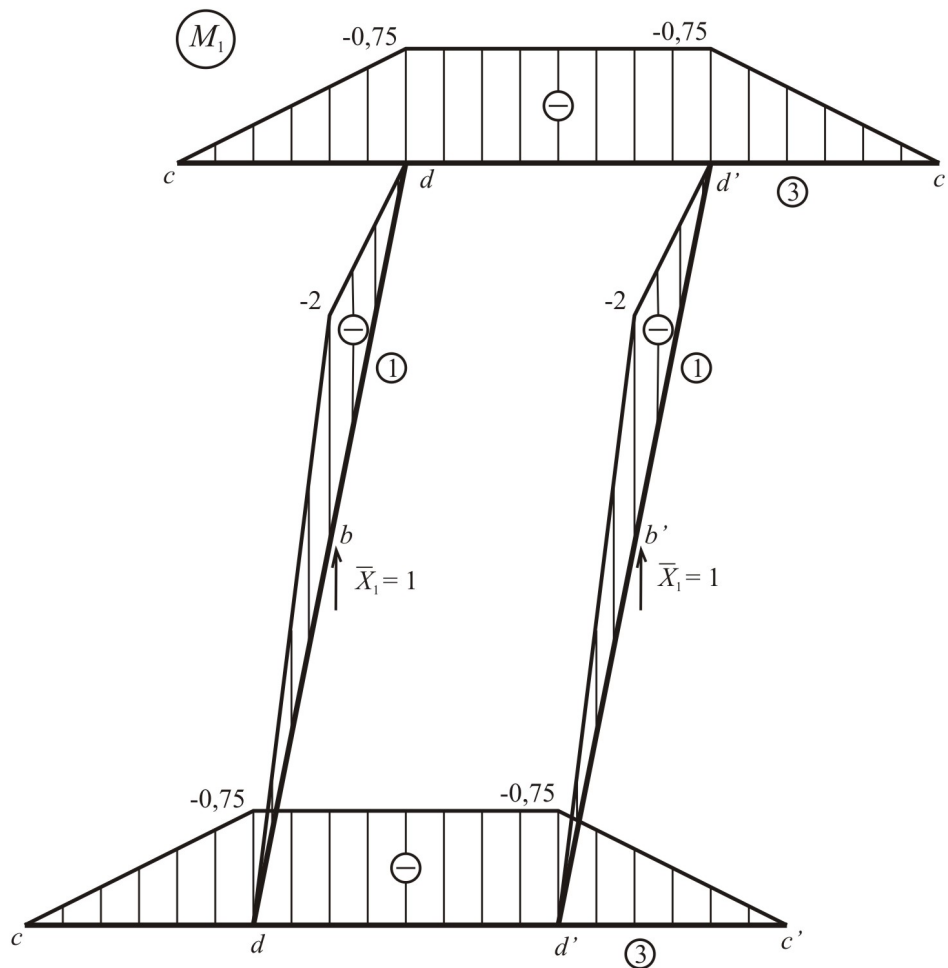
Obrázek 7.13: Základní soustava výpočtu

### 7.2.3 Průběhy vnitřních sil

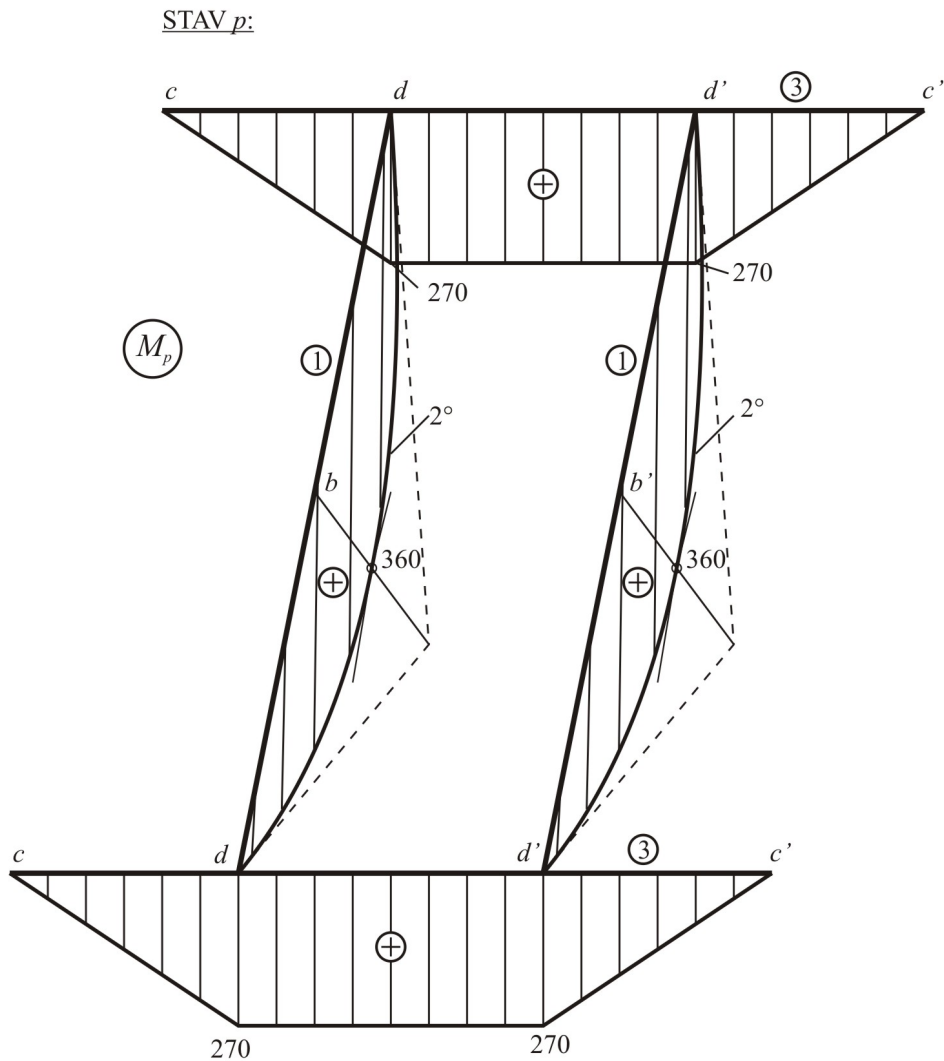
Výsledné průběhy posouvajících sil a ohybových momentů na obou prutech jsou uvedeny na obr. 7.17 až 7.21.



Obrázek 7.14: Průběh ohybového momentu na prutu od zatěžovacího stavu 1



Obrázek 7.15: Průběh ohybového momentu na zbytku konstrukce od zatěžovacího stavu 1

Obrázek 7.16: Průběh ohybových momentů od zatěžovacího stavu  $p$ 

## 7.3 Příklad 3

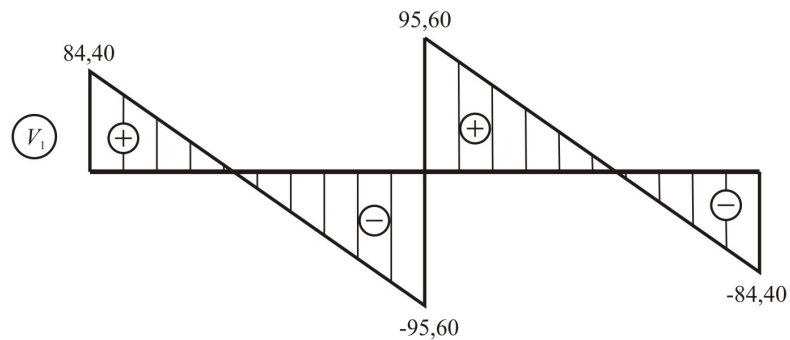
Určete reakce a vnitřní síly na roštu, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.23.

### 7.3.1 Základní soustava

Uvedená konstrukce roštu je jedenkrát staticky neurčitá s neznámou interakcí v místě křížení  $d$  (staticky neurčitá veličina  $X_1$ ).

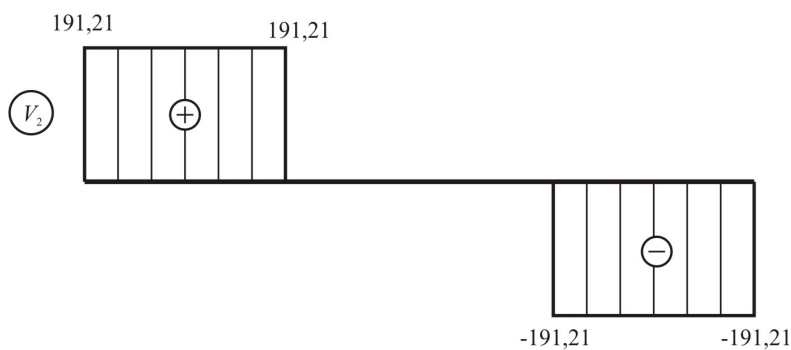
Po uvolnění konstrukce v místě křížení  $d$  vznikne staticky určitá základní soustava, na které je nutno určit průběhy ohybových momentů od jednotkového zatížení  $\bar{X}_1 = 1$  (zatěžovací stav 1, obr. 7.24) a skutečného zatížení (zatěžovací stav  $p$ , obr. 7.25). Průběhy ohybových momentů od zatěžovacích stavů 1 a  $p$  jsou zobrazeny na obr. 7.26 a 7.27.

POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA 1. PRUTU



Obrázek 7.17: Průběh posouvajících sil na 1. prutu roštu

POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA 2. PRUTU



Obrázek 7.18: Průběh posouvajících sil na 2. prutu roštu

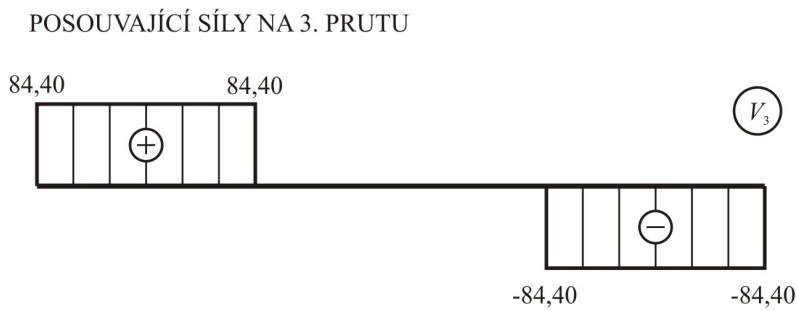
### 7.3.2 Určení staticky neurčité veličiny

V dalším výpočtu je nutno sestavit a vyřešit rovnici o neznámé  $X_1$ , jejíž výsledná hodnota je rovna 21,8432 [kN].

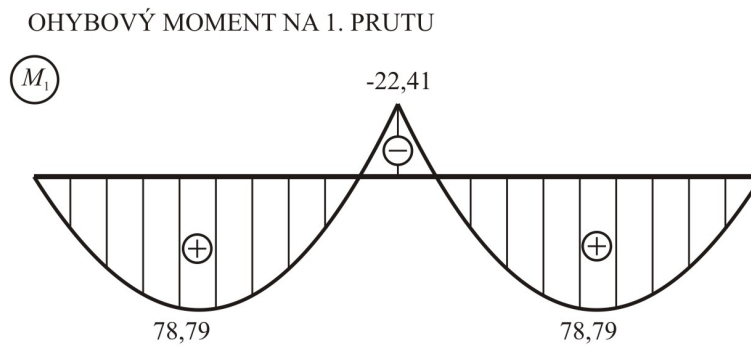
### 7.3.3 Průběhy vnitřních sil

Výsledné průběhy posouvajících sil a ohybových momentů na obou prutech roštu jsou uvedeny na obr. 7.28 až 7.29.

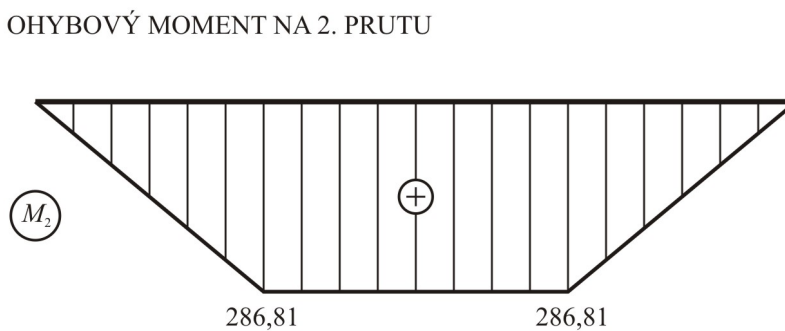




Obrázek 7.19: Průběh posouvajících sil na 3. prutu roštu



Obrázek 7.20: Průběh pohybových momentů na 1. prutu roštu

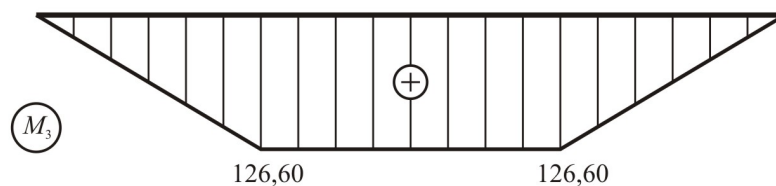


Obrázek 7.21: Průběh pohybových momentů na 2. prutu roštu

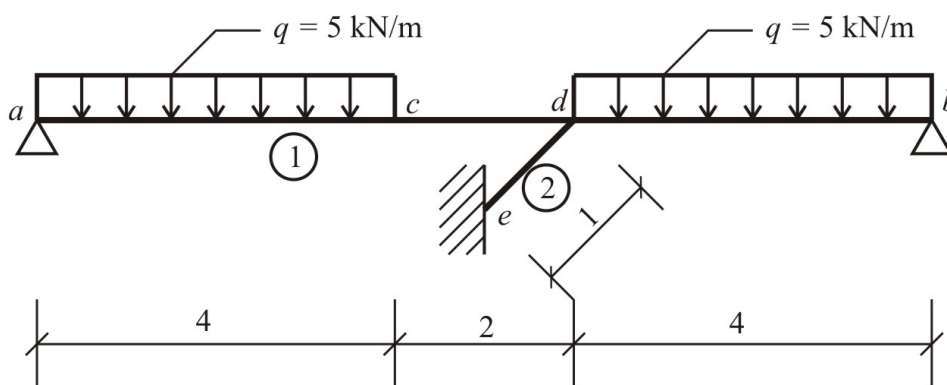
## 7.4 Příklad 4

Určete reakce a vnitřní síly na roštu, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.30.

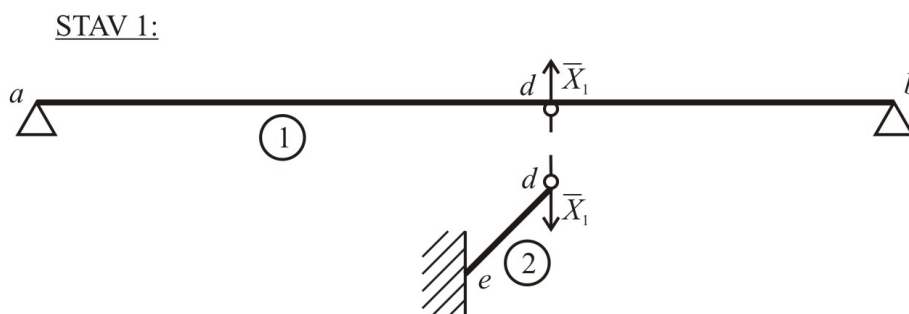
OHYBOVÝ MOMENT NA 3. PRUTU



Obrázek 7.22: Průběh pohybových momentů na 3. prutu roštu



Obrázek 7.23: Statické schéma roštu příkladu 3

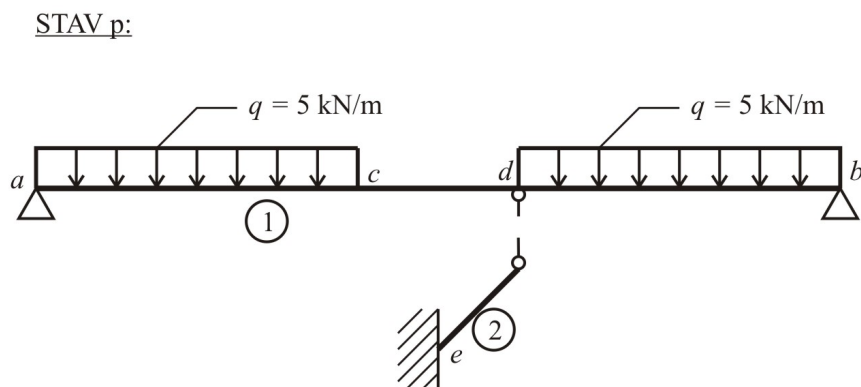
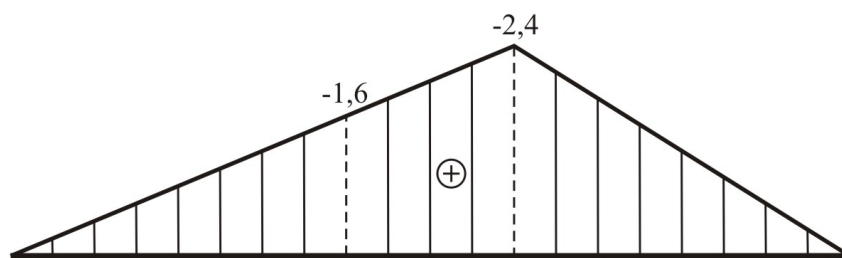
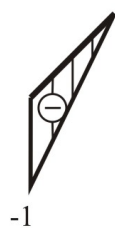


Obrázek 7.24: Statické schéma zatěžovacího stavu 1 roštu příkladu 3

### 7.4.1 Základní soustava

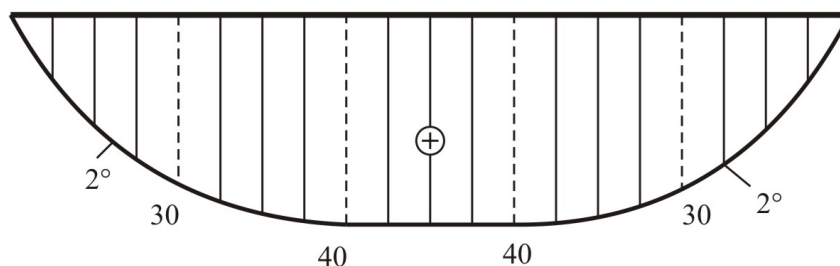
Uvedená konstrukce roštu je dvakrát staticky neurčitá s neznámou reakcí v bodě  $b$  (staticky neurčitá veličina  $X_1$ ) a neznámou interakcí v místě křížení  $e$  (staticky neurčitá veličina  $X_2$ ).

Po uvolnění vnější vazby v bodě  $b$  a vnitřní vazby v místě křížení  $e$  vznikne staticky

Obrázek 7.25: Statické schéma zatěžovacího stavu  $p$  roštu příkladu 3 $M_i$  NA PRUTU ① $M_i$  NA PRUTU ②

Obrázek 7.26: Průběh ohybového momentu na základní soustavě od zatěžovacího stavu 1

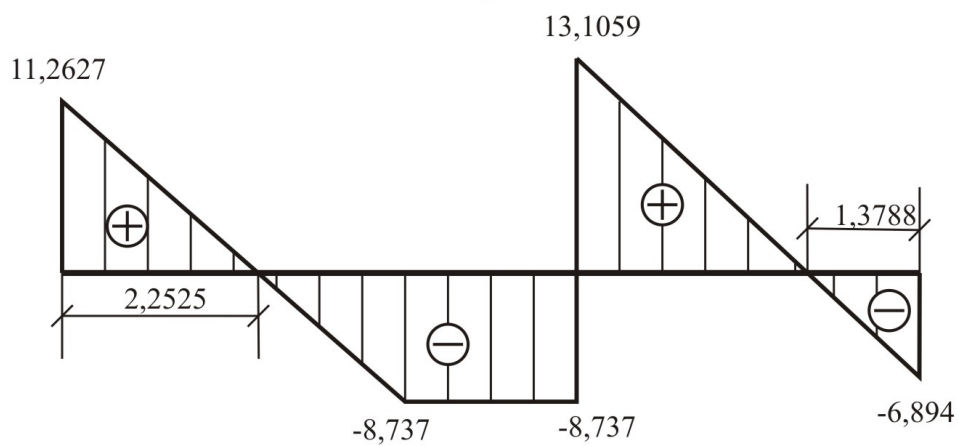
určitá základní soustava, na které je nutno určit průběhy ohybových momentů od jednotkového zatížení  $\bar{X}_1 = 1$  (zatěžovací stav 1, obr. 7.31),  $\bar{X}_2 = 1$  (zatěžovací stav 2, obr. 7.32) a skutečného zatížení (zatěžovací stav  $p$ , obr. 7.33). Průběhy ohybových momentů od zatěžovacích stavů 1, 2 a  $p$  jsou zobrazeny na obr. 7.34, 7.35 a 7.36.

$\underline{M_p}$  NA PRUTU ① $\underline{M_p}$  NA PRUTU ②Obrázek 7.27: Průběh ohybového momentu na základní soustavě od zatěžovacího stavu  $p$ 

### 7.4.2 Určení staticky neurčitých veličin

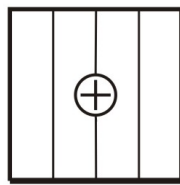
V dalším výpočtu je nutno sestavit a vyřešit soustavu dvou rovnic s neznámými  $X_1$  a  $X_2$ , jejichž výsledná hodnota je rovna 9,015 [kN], resp. 13,738 [kN].

POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA PRUTU ①



POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA PRUTU ②

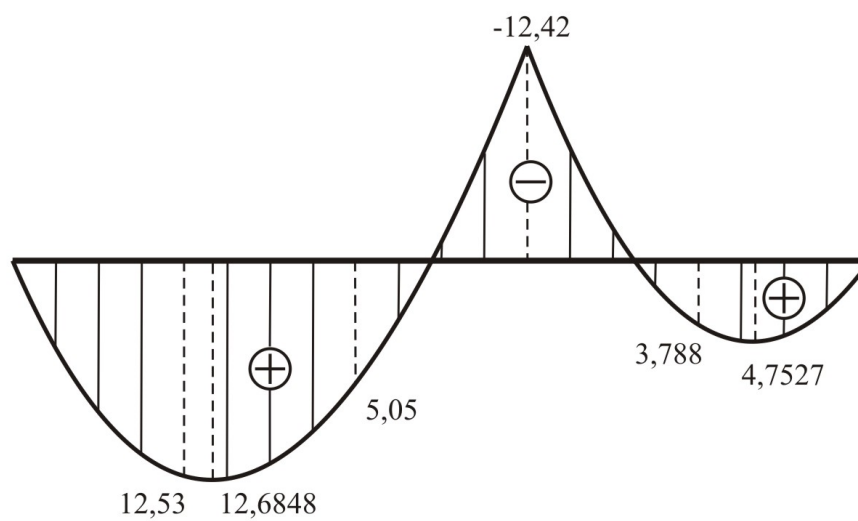
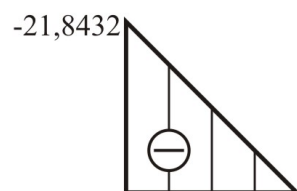
21,8432



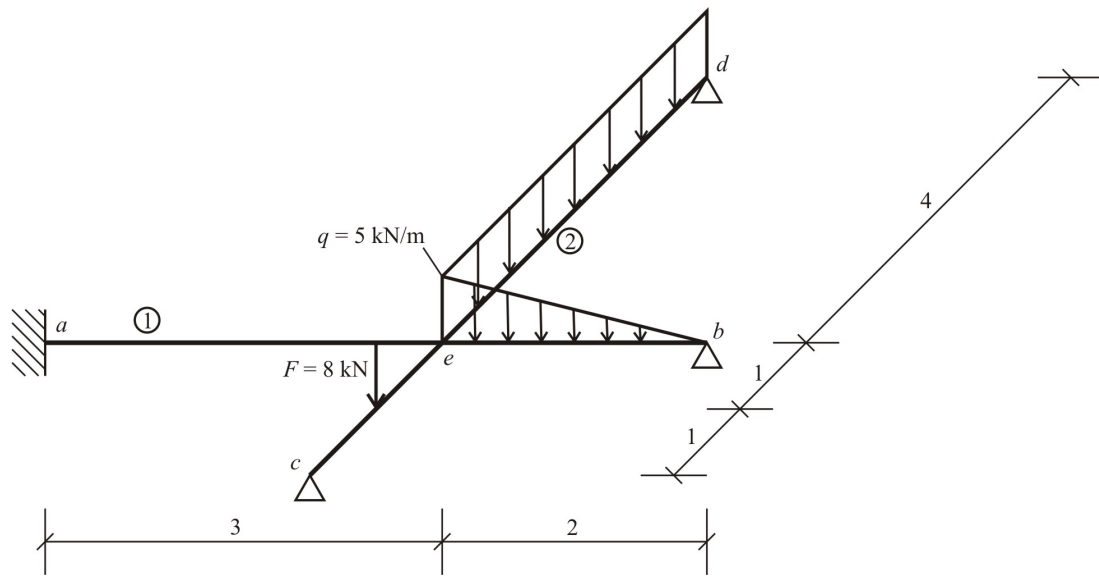
Obrázek 7.28: Průběh posouvajících sil na obou prutech roštu příkladu 3

### 7.4.3 Průběhy vnitřních sil

Výsledné průběhy posouvajících sil a ohybových momentů na obou prutech roštu jsou uvedeny na obr. 7.37 až 7.38.

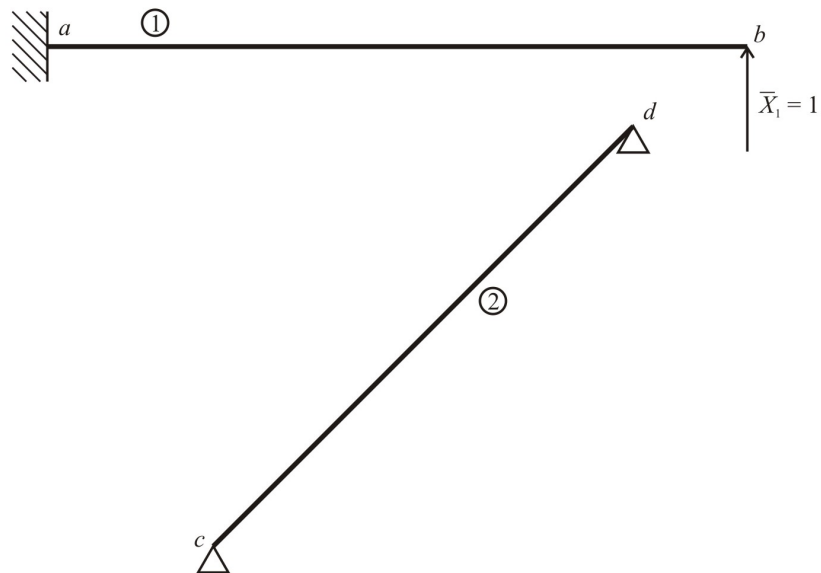
OHYBOVÉ MOMENTY NA PRUTU ①OHYBOVÉ MOMENTY NA PRUTU ②

Obrázek 7.29: Průběh ohybových momentů na obou prutech roštu příkladu 3



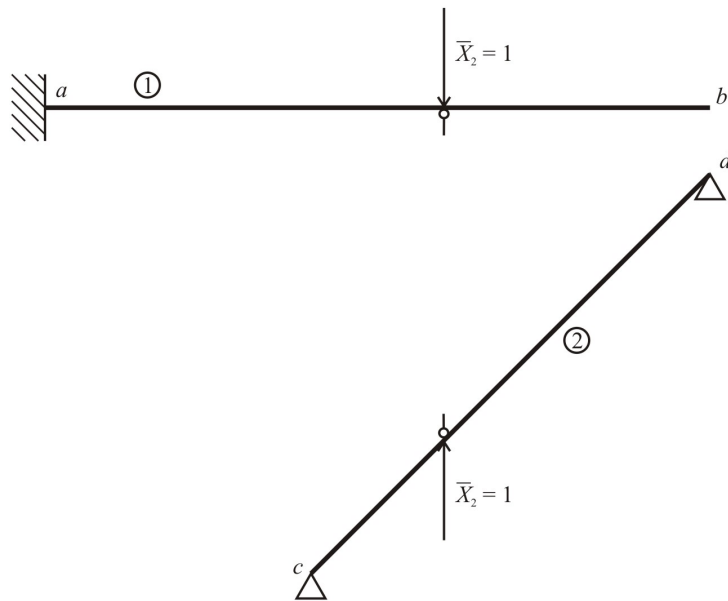
Obrázek 7.30: Statické schéma roštu příkladu 4

STAV 1:



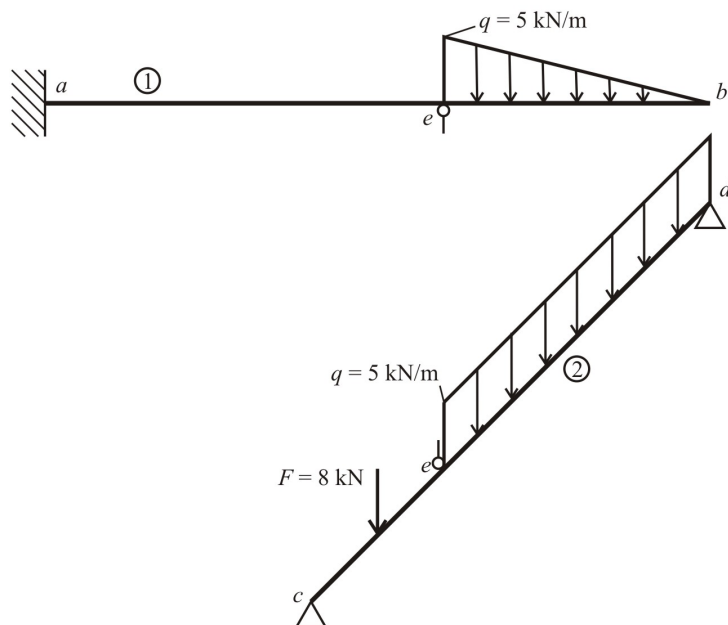
Obrázek 7.31: Statické schéma zatěžovacího stavu 1 roštu příkladu 4

STAV 2:



Obrázek 7.32: Statické schéma zatěžovacího stavu 2 roštu příkladu 4

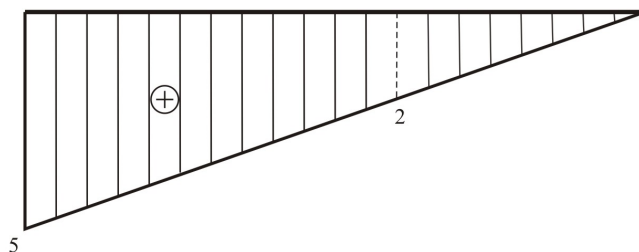
STAV p:



Obrázek 7.33: Statické schéma zatěžovacího stavu p roštu příkladu 4



$M_1$  NA PRUTU ①

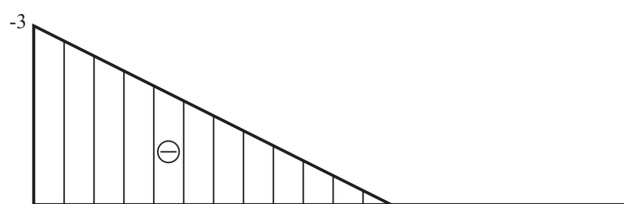


$M_1$  NA PRUTU ②



Obrázek 7.34: Průběh ohybového momentu na základní soustavě od zatěžovacího stavu 1

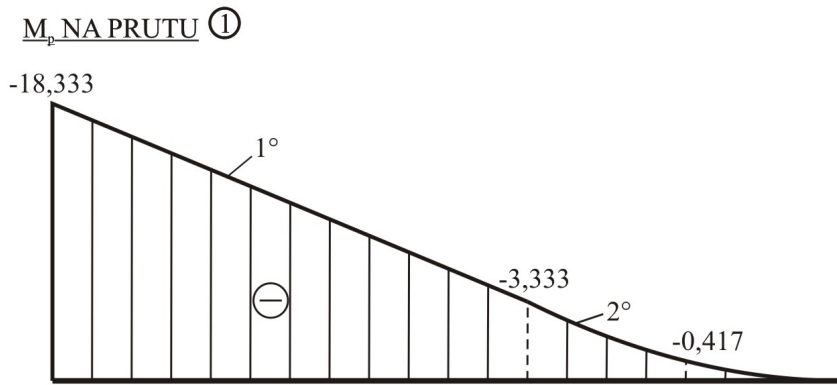
$M_2$  NA PRUTU ①



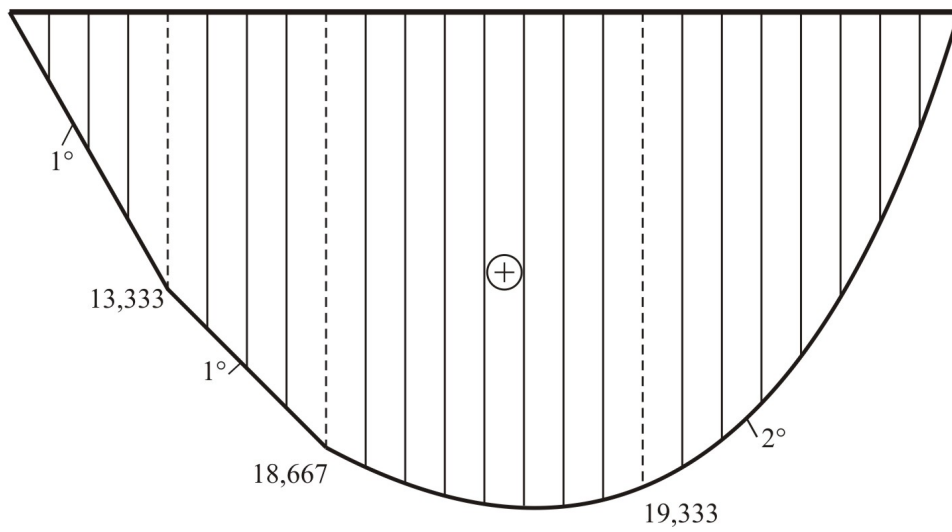
$M_2$  NA PRUTU ②



Obrázek 7.35: Průběh ohybového momentu na základní soustavě od zatěžovacího stavu 2

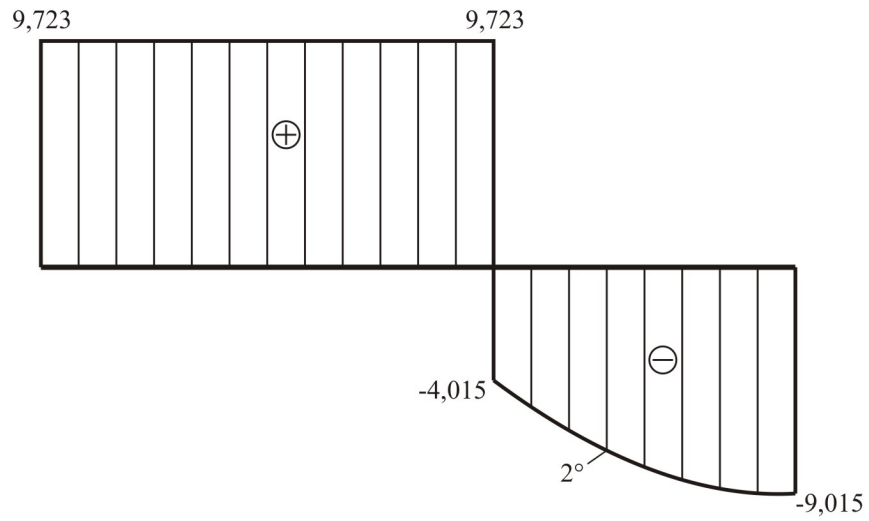


$M_p$  NA PRUTU ②

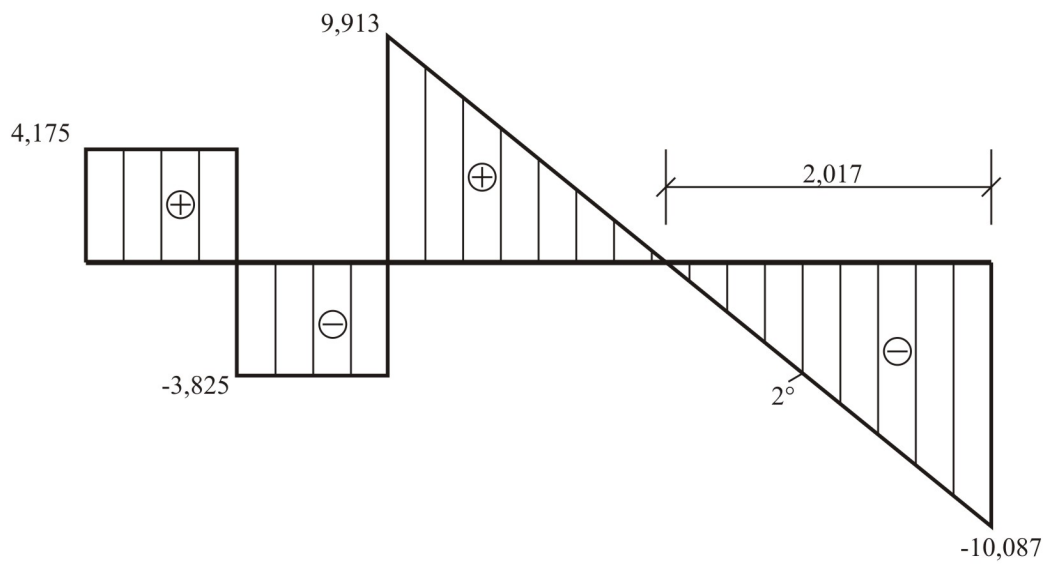


Obrázek 7.36: Průběh ohybového momentu na základní soustavě od zatěžovacího stavu  $p$

POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA PRUTU ①

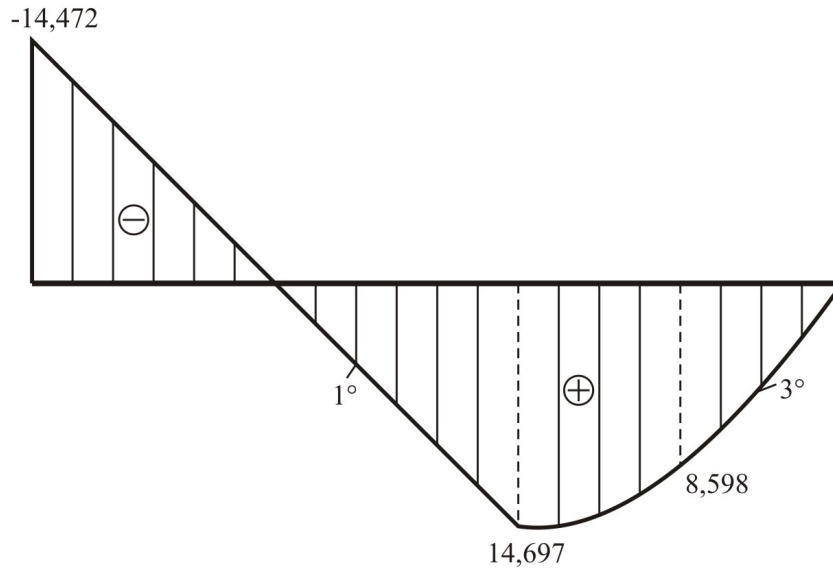


POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA PRUTU ②

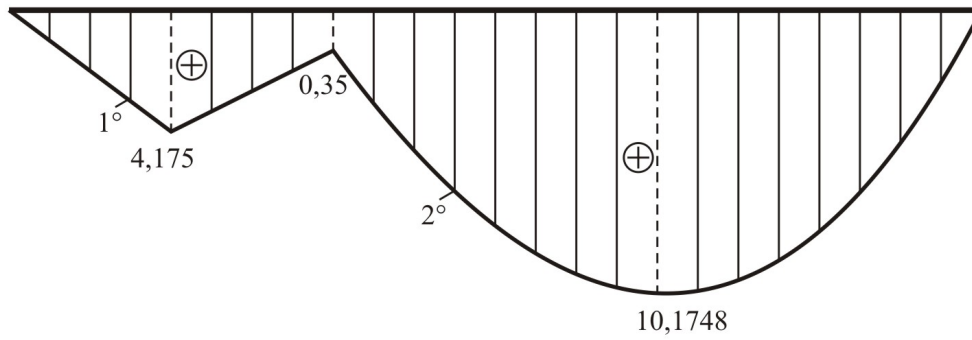


Obrázek 7.37: Průběh posouvajících sil na obou prutech roštu příkladu 4

OHYBOVÉ MOMENTY NA PRUTU ①



OHYBOVÉ MOMENTY NA PRUTU ②

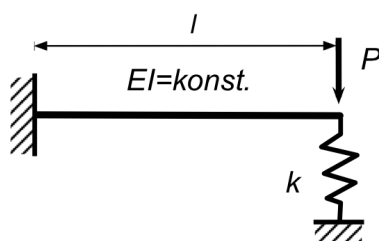


Obrázek 7.38: Průběh ohybových momentů na obou prutech roštu příkladu 4

# Kapitola 8

## Přetvoření staticky neurčitých konstrukcí

### 8.1 Příklad 1



Obrázek 8.1: Krakorec zatížený silou  $P$  v místě pružné podpory.

#### Zadání:

Stanovte svislou výchylku konce nosníku v místě působení síly  $P$  (obr. 8.1).

#### Řešení:

Síla v pružině je dána jako  $P_k = k \cdot \Delta$ . Z daného schématu pak plyne:

$$\frac{Pl^3}{3EI} - \frac{k\Delta l^3}{3EI} = \Delta$$

Z toho dále vyplývá

$$\frac{Pl^3}{3EI} = \Delta + \Delta \frac{kl^3}{3EI}$$

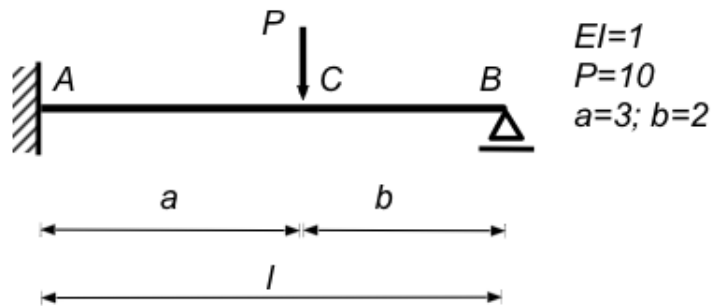
neboli

$$\frac{Pl^3}{3EI} = \Delta \cdot \left(1 + \frac{kl^3}{3EI}\right)$$

Z toho plyne výsledek pro konečnou deformaci:

$$\Delta = \left( \frac{Pl^3}{3EI + kl^3} \right)$$

## 8.2 Příklad 2

Obrázek 8.2: Nosník zatížený silou  $P$ .**Zadání:**

Stanovte deformaci nosníku podle obrázku 8.2 v místě působení břemene. Příklad rovněž řešte využitím redukční věty.

**Tabulkové řešení:**

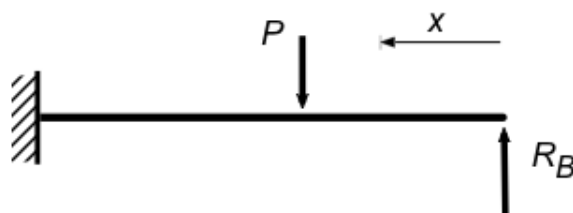
$$\delta_c = -\frac{Pa^3b^2}{12l^3EI}(3a + 4b)$$

**Řešení:**

a) Stanovíme reakci  $R_B$  a průběhy ohybových momentů z Castiglianovy věty:

$$\text{úsek } \langle 0 - b \rangle: \quad M(x) = R_B \cdot x$$

$$\text{úsek } \langle b - a \rangle: \quad M(x) = R_B \cdot (b + x) - P \cdot x$$



Obrázek 8.3: Náhradní nosník.

Potenciální energie:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2EI} \int_0^b (R_B \cdot x)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^a [R_B \cdot (b + x) - P \cdot x]^2 dx = \\ &= \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^b (R_B \cdot x)^2 dx + \int_0^a [R_B^2 \cdot (b + x)^2 - \int_0^a 2R_B \cdot P(b + x) \cdot x dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a (P \cdot x)^2 dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial U}{\partial R_B} &= \int_0^b R_B \cdot x^2 dx + \int_0^a R_B \cdot (b+x)^2 dx - \int_0^a P \cdot (b+x) \cdot x dx + 0 = \\
 &= \left[ R_B \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^b + \left[ R_B \cdot (b^2 x + bx^2 + \frac{x^3}{3}) \right]_0^a - \left[ P \left( b \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^a = \\
 &= R_B \cdot \frac{b^3}{3} + R_B \cdot \left( b^2 a + ba^2 + \frac{a^3}{3} \right) - P \left( b \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

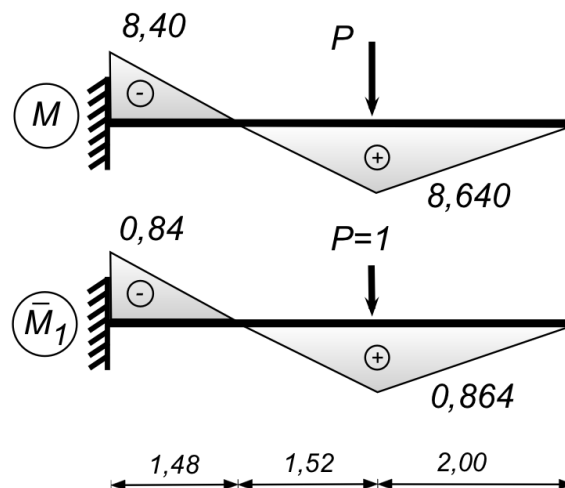
Položíme-li derivaci rovnu nule ( $\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ ) dostaneme po úpravách hodnotu reakce:

$$R_B = P \frac{a^3}{l^3} \left( 1 + \frac{3b}{2a} \right)$$

b) Vykreslíme a vyjádříme ohybové momenty:

úsek  $\langle 0 - b \rangle$ :  $M_1 = R_B \cdot x = P \frac{a^3}{l^3} \left( 1 + \frac{3b}{2a} \right) x$   
 pro místo C:  $M_C = P \frac{a^3 b}{l^3} \left( 1 + \frac{3b}{2a} \right) = 10 \frac{27 \cdot 2}{125} \left( 1 + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = \boxed{8,64}$

úsek  $\langle b - a \rangle$ :  $M_2 = R_B \cdot x - P(x - b) = P \frac{a^3}{l^3} \left( 1 + \frac{3b}{2a} \right) x - P(x - b)$   
 pro místo A:  $M_A = P \frac{a^3 b}{l^2} \left( 1 + \frac{3b}{2a} \right) - P(l - b) = \frac{10 \cdot 27 \cdot 2}{25} - \frac{10 \cdot 3 \cdot 25}{25} = \boxed{-8,40}$

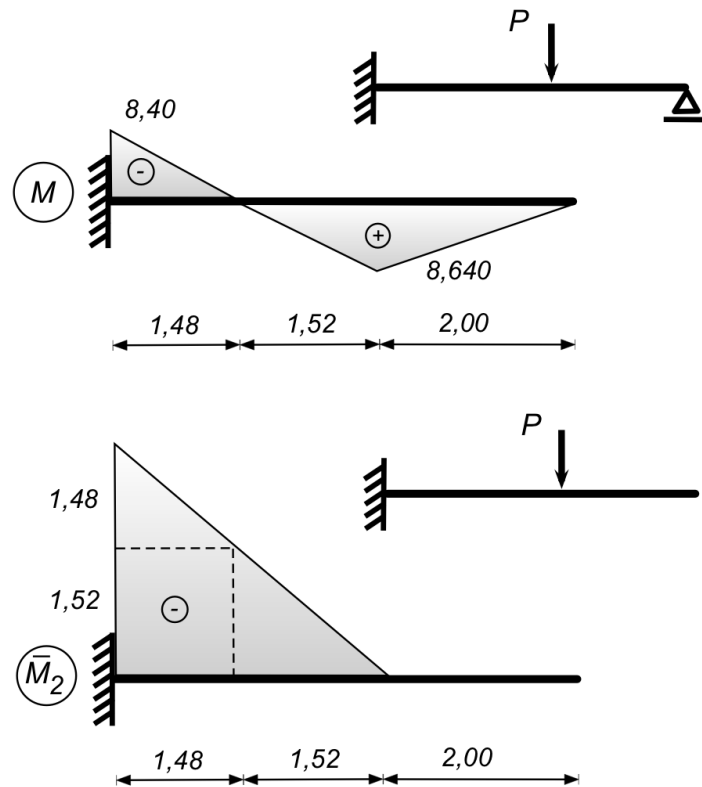


Obrázek 8.4: Ohybové momenty od zatížení  $P$  a od jednotkové síly.

c) pro výpočet deformace použijeme Vereščaginovo pravidlo:

$$\delta_C = \frac{1}{2} \cdot 8,40 \cdot 1,48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,84 + \frac{1}{2} \cdot 8,64 \cdot 1,52 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,864 + \frac{1}{2} \cdot 8,64 \cdot 2,00 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,864 = \boxed{12,24}$$

d) Použijeme nyní Redukční větu:



Obrázek 8.5: Zatěžovací stavy a využití redukční věty.

**Věta 8.2.1.** (Redukční věta) *Zobecněnou deformaci na staticky neurčité konstrukci stanovíme pomocí Mohrova integrálu s využitím momentového obrazce na původní konstrukci a momentového obrazce na přidružené staticky určité konstrukci s jednotkovým zatížením v místě hledané zobecněné deformace.*

e) a uplatníme opět Vereščaginovo pravidlo:

$$\delta_C = \frac{1}{2} \cdot 8,40 \cdot 1,48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,48 + \frac{1}{2} \cdot 8,40 \cdot 1,48 \cdot 1,52 - \frac{1}{2} \cdot 8,64 \cdot 1,52 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,52 = \boxed{12,24}$$

*Důkaz.* Mějme původní staticky neurčitou soustavu zatíženou zobecněným břemenem  $P$ . Dále mějme stejnou soustavu, zatíženou zobecněným jednotkovým břemenem v místě  $a$ , kde hledáme zobecněné přemístění. Podle Castiglianovy věty platí pro práci vnějších a vnitřních sil:

$$W_e = W_i \quad (8.1)$$

$$1 \cdot \delta_a = \int \frac{MM^a}{EI} dx \quad (8.2)$$

Pro staticky neurčitou soustavu s jednotkovým zatížením platí:

$$M^a = M_0^a + X_1 \cdot M_1^a \quad (8.3)$$

kde  $M_0^a$  je základní soustava k původní soustavě, tj. zbavená vazby.  $M_1^a$  je moment na základní soustavě od jednotkové zobecněné síly v místě odstranění vazby.



Dosadíme (8.3) do (8.2) a dostaneme:

$$\delta_a = \int \frac{MM_0^a}{EI} dx + X_1 \int \frac{MM_1^a}{EI} dx \quad (8.4)$$

Druhý integrál na pravé straně je však deformací původní soustavy od zatížení v místě vazby, což je rovno nule. Z toho plyne, že k výpočtu postačí pouze první integrál rovnice (8.4), tedy:

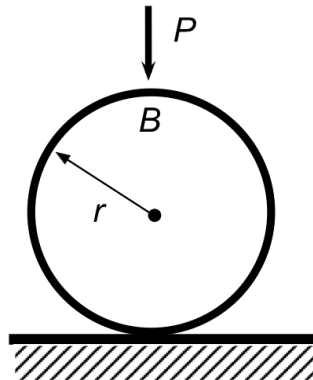
$$\boxed{\delta_a = \int \frac{MM_0^a}{EI} dx} \quad (8.5)$$

□

### 8.3 Příklad 3

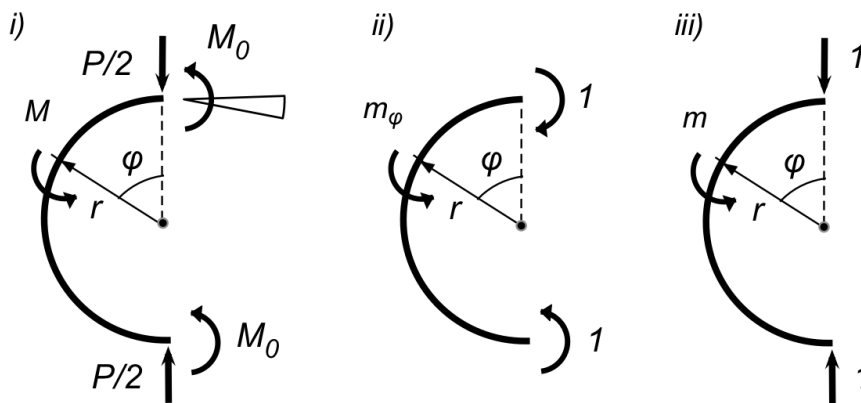
Zadání:

Stanovte svislou výchylku v místě působení síly  $P$  (obr. 8.6).



Obrázek 8.6: Kotouč zatížený osamělým břemenem  $P$ .

a) Kotouč rozdělíme a nahradíme vazby silami. K výpočtu svislého posunu opět využijeme Castiglianovy věty a odvozeného Maxwell-Mohrova vzorce a dostáváme:



Obrázek 8.7: Rozdělený kotouč zatížený osamělým břemenem  $P$  a jednotkovým momentem.

$$1 \cdot \varphi_P = \int_0^L \frac{m_\varphi M}{EI} ds$$

což dává

$$1 \cdot \varphi_P = \int_0^L \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{2} r \sin \varphi - M_0 \right) \cdot ds$$

$$EI \cdot 1 \cdot \varphi_P = \int_0^\pi \left( \frac{P}{2} r^2 \sin \varphi - M_0 r \right) d\varphi$$

Z podmínky ii) podle obrázku 8.7 platí, že úhel natočení  $\varphi_P$  musí být roven nule. Pak z předchozích vztahů lze stanovit:

$$0 = \int_0^\pi \left( \frac{P}{2} r \sin \varphi - M_0 \right) \cdot r \cdot d\varphi$$

Zintegrujeme pravou stranu a dostaneme:

$$\left[ -\frac{P}{2}r^2 \cos \varphi - M_0 \cdot r \cdot \varphi \right]_0^\varphi = -\frac{P}{2}r^2 \cos \pi - M_0 \cdot r \cdot \pi + \frac{P}{2}r^2 \cos 0 - M_0 \cdot r \cdot 0 = 0,$$

z čehož vyplývá pro  $M_0$ :

$$\boxed{M_0 = \frac{P \cdot r}{\pi}}$$

b) K výpočtu svislého posunu opět využijeme Castiglianovy věty a dostáváme:

$$1 \cdot \delta_P = \int_0^L \frac{mM}{EI} ds$$

Pro momenty platí dle obrázku 8.7 iii):

$$\begin{aligned} m &= r \cdot \sin \varphi \\ M &= \frac{Pr}{2} \sin \varphi - \frac{Pr}{\pi} \end{aligned}$$

Za momenty dosadíme a vyjádříme integrál:

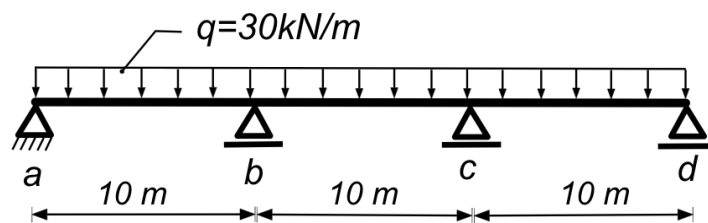
$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_P &= \int_0^\pi \frac{1}{EI} r \sin \varphi \cdot \left( \frac{Pr}{2} \sin \varphi - \frac{Pr}{\pi} \right) r d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EI} \int_0^\pi \left( \frac{\sin^2 \varphi}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EI} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{4}(1 - \cos 2\varphi) - \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right] d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EI} \left[ \frac{1}{4}(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{\pi} \cos \varphi \right]_0^\pi = \\ &= \frac{Pr^3}{EI} \left[ \frac{1}{4} \left( \varphi - \frac{2}{\pi} \right) \right] = \boxed{\frac{Pr^3}{4\pi EI} (\pi^2 - 8)} \end{aligned}$$

Vzorec v rámečku je vztahem pro výslednou svislou deformaci.

# Kapitola 9

## Řešení spojitého nosníku metodou třímomentových rovnic

### 9.1 Příklad 1



Obrázek 9.1: Spojitý nosník zatížený rovnoměrně rozděleným zatížením  $q$ .

#### Zadání:

Stanovte reakce na spojitém nosníku podle obrázku 9.1 zatíženého spojitým zatížením  $q$  a poklesem podpor  $\Delta_a = 10$  mm,  $\Delta_b = 50$  mm,  $\Delta_c = 20$  mm a konečně  $\Delta_d = 40$  mm.  $EI = \text{konst.}$ ,  $E = 200$  GPa a  $I = 700 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>. Rozpětí jednotlivých polí jsou  $l_{ab} = l_{bc} = l_{cd} = 10$  m.

#### Řešení:

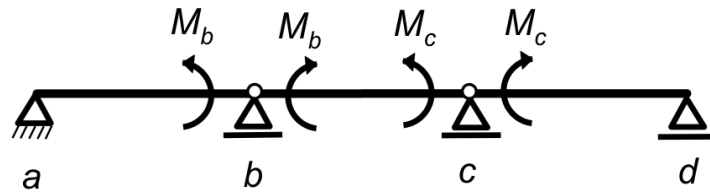
a) Soustava je  $2 \times$  staticky neurčitá s neznámými momenty  $M_b$  a  $M_c$ .

b) Určíme základní soustavu uvolněním rotačních vazeb ve styčnicích  $b$  a  $c$  podle obrázku 9.2:

c) Zapišeme (dvě) třímomentové rovnice pro styčnický  $b$  a  $c$ :

$$M_a \cdot l_{ab} + 2M_b(l_{ab} + l_{bc}) + M_c \cdot l_{bc} = -\frac{1}{4}q \cdot l_{ab}^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_{bc}^3 - 6EI \left( \frac{\Delta_a - \Delta_b}{l_{ab}} + \frac{\Delta_c - \Delta_b}{l_{bc}} \right)$$

a



Obrázek 9.2: Základní soustava s uvolněnými vazbami.

$$M_b \cdot l_{bc} + 2M_c(l_{bc} + l_{cd}) + M_d \cdot l_{cd} = -\frac{1}{4}q \cdot l_{bc}^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_{cd}^3 - 6EI \left( \frac{\Delta_b - \Delta_c}{l_{cb}} + \frac{\Delta_d - \Delta_c}{l_{cd}} \right)$$

d) Dosadíme číselné hodnoty:

$$\begin{aligned} M_a \cdot 10 + 2M_b \cdot 20 + M_c \cdot 10 &= \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 30 \cdot 1000 - \frac{1}{4} \cdot 30 \cdot 1000 - 6 \frac{200 \cdot 700}{10} (0,01 - 0,05 + 0,02 - 0,05) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} M_b \cdot 10 + 2M_c \cdot 20 + M_d \cdot 10 &= \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 30 \cdot 1000 - \frac{1}{4} \cdot 30 \cdot 1000 - 6 \frac{200 \cdot 700}{10} (0,05 - 0,02 + 0,04 - 0,02) \end{aligned}$$

Momenty  $M_a$  a  $M_d$  jsou rovny nule. Z toho plynou dvě rovnice o dvou neznámých momentech  $M_b$  a  $M_c$ :

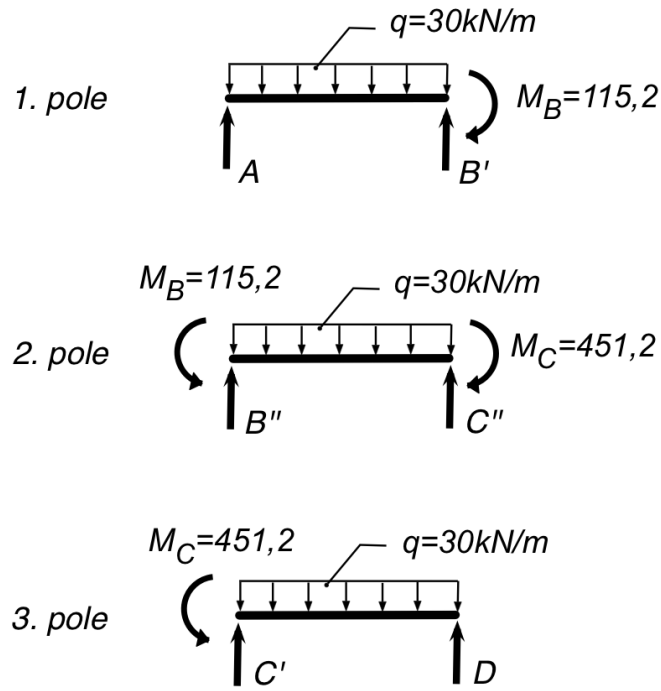
$$\begin{aligned} 2M_b \cdot 20 + M_c \cdot 10 &= -\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1000 + 120 \cdot 700 \cdot 0,07 \\ M_b \cdot 10 + 2M_c \cdot 20 &= -\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1000 - 120 \cdot 700 \cdot 0,05 \end{aligned}$$

Momenty již snadno vyřešíme:

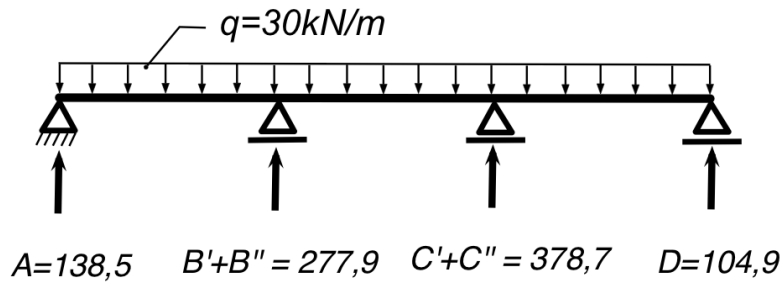
$\begin{aligned} M_b &= -115,2 \text{ kNm} \\ M_c &= -451,2 \text{ kNm} \end{aligned}$
----------------------------------------------------------------------------------------

Reakce již stanovíme z podmínek rovnováhy na jednotlivých polích podle obrázku 9.3.: Řešením rovnic (podmínek rovnováhy) dostáváme výsledné reakce (obr. 9.4):

$A = 138,5 \text{ kNm}$	$B' = 161,2 \text{ kNm}$	$B'' = 116,4 \text{ kNm}$
$C' = 195,1 \text{ kNm}$	$C'' = 183,6 \text{ kNm}$	$D = 104,9 \text{ kNm}$

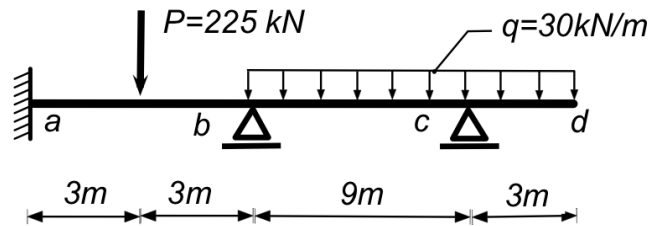


Obrázek 9.3: Spojitý nosník rozdělený na jednotlivá pole a podmínky rovnováhy.



Obrázek 9.4: Výsledné reakce na nosníku.

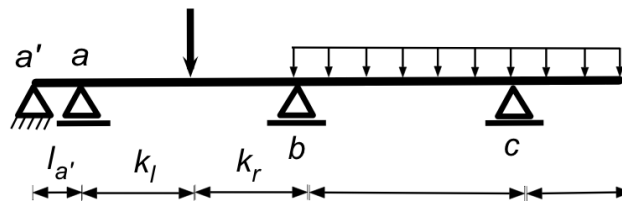
## 9.2 Příklad 2

Obrázek 9.5: Spojitý nosník zatížený rovnoměrně rozděleným zatížením  $q$ .**Zadání:**

Stanovte průběhy ohybových momentů na nosníku podle obrázku 9.5.  $I, EI = \text{konst.}$

**Řešení:**

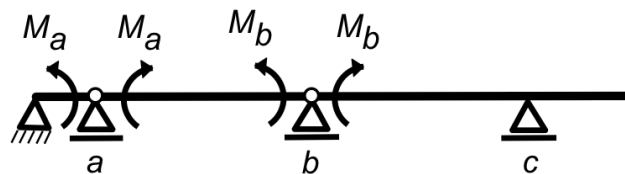
a) V prvním kroku je nutné nahradit vetknutí podle následujícího schematu (obr. 9.6) s polem  $a - a'$  s nulovou délkou.:



Obrázek 9.6: Náhradní schema nosníku.

Soustava je  $2 \times$  staticky neurčitá s neznámými momenty  $M_a$  a  $M_b$ .

b) Určíme základní soustavu uvolněním rotačních vazeb ve styčnicích  $a$  a  $b$  (obr. 9.7):



Obrázek 9.7: Základní soustava s uvolněnými vazbami.

c) Zapišeme třímomentové rovnice pro styčnický  $a$  a  $b$ :

$$M_a' \cdot l_{a'} + 2M_a (l_{a'} + l_{ab}) + M_b \cdot l_{ba} = -P \cdot l_{ab}^2 \cdot k_l (1 - k_l^2)$$

$$M_a \cdot l_{ab} + 2M_b (l_{ba} + l_{bc}) + M_c \cdot l_{cb} = -P \cdot l_{ab}^2 \cdot k_r (1 - k_r^2) - \frac{1}{4} q \cdot l_{bc}^3$$

d) Dosadíme číselné hodnoty:

$$2M_a(0 + 6) + M_b \cdot 6 = -225 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$M_a \cdot 6 + 2M_b(6 + 9) + M_c \cdot 9 = -225 \cdot 6^2 \cdot k_r \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} 30 \cdot 9^3$$

Moment  $M_c$  se snadno vyjádří jako moment na převislém konci. Dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých momentech  $M_a$  a  $M_b$ :

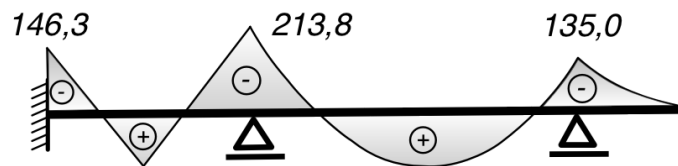
$$2M_a + M_b = -506,3$$

$$M_a + 5M_b = -1215,0$$

z čeho plyne:

$M_b = -146,3 \text{ kNm}$ $M_c = -213,8 \text{ kNm}$
-------------------------------------------------------

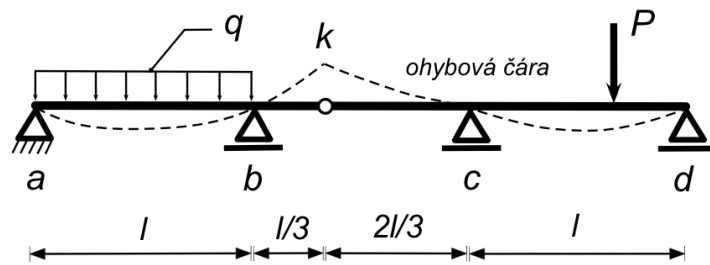
Momentové průběhy jsou vykresleny na obrázku 9.8. Čtenář sám snadno stanoví moment v poli  $\langle b - c \rangle$ .



Obrázek 9.8: Výsledné momenty.



## 9.3 Příklad 3



Obrázek 9.9: Nosník s konstrukčním kloubem.

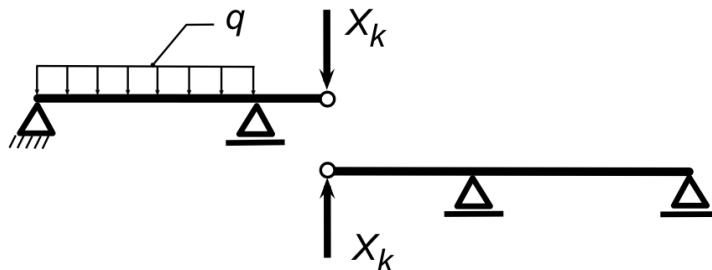
**Zadání:**

Využijte metodu třímomentových rovnic ke stanovení ohybových momentů na nosníku s konstrukčním kloubem (obr. 9.9).

**Řešení:**

a) Soustava je  $1 \times$  staticky neurčitá.

b) Určíme základní soustavu uvolněním kloubové vazby a náhradou silou  $X_k$  (obr. 9.10).



Obrázek 9.10: Náhradní schema nosníku.

c) Zapišeme třímomentové rovnice pro  $a - b - k$  respektive pro  $k - c - d$ :

Tvar rovnice:

$$M_a \cdot l_{ab} + 2M_b(l_{ab} + l_{bk}) + M_k \cdot l_{kb} = -\frac{1}{4}ql_{ab}^3 - \frac{1}{4}ql_{bk}^3 - 6EI \left( \frac{\Delta_a - \Delta_b}{l_{ab}} + \frac{\Delta_k - \Delta_b}{l_{bk}} \right)$$

$$2M_b(l + l/3) = -\frac{1}{4}ql^3 - 6EI \frac{3\delta_k}{l}$$

$$2M_c(2l/3 + l) = -P \cdot \frac{l^2}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) - 6EI \frac{3\delta_k}{2l}$$

### 9.3. PŘÍKLAD 3

Soustava pro neznámé  $M_b$ ,  $M_c$  a  $\delta_k$  má jen dvě rovnice. Je třeba soustavu doplnit o jednu doplňující – geometrickou – rovnici. Pro  $M_b$  a  $M_c$  platí z trojúhelníkové podobnosti:

$$\frac{3 \cdot M_b}{l} = -\frac{3 \cdot M_c}{2l} \Rightarrow M_c = -2 \cdot M_b$$

d) Nyní již můžeme psát soustavu:

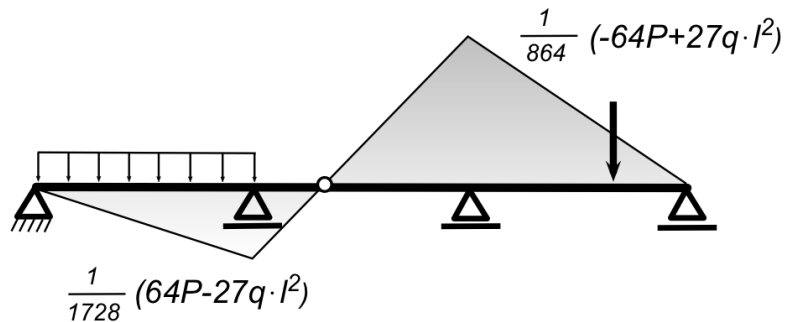
$$\begin{aligned} \frac{8}{3} M_b \cdot l &= -\frac{1}{4} q l^3 - 18EI \frac{\delta_k}{l} \\ -\frac{20}{3} M_b \cdot l &= -\frac{8}{27} P l^2 - 9EI \frac{\delta_k}{l} \end{aligned}$$

po úpravách dostáváme:

$$16M_b \cdot l = -\frac{1}{4} q l^3 - \frac{16}{27} P \cdot l^2 \Rightarrow$$

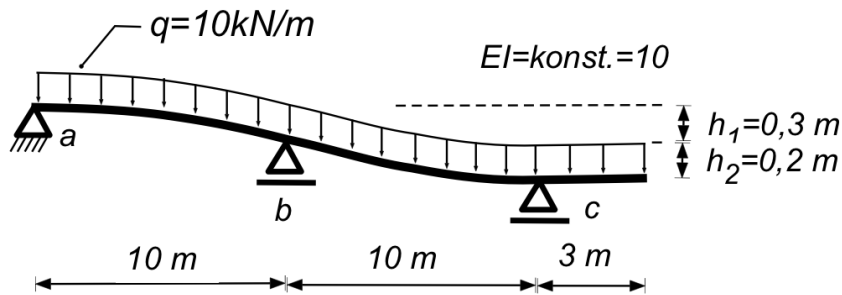
$$\begin{aligned} M_b &= -\frac{1}{64} q l^2 + \frac{1}{27} P \cdot l \\ M_c &= \frac{1}{36} q l^2 - \frac{2}{27} P \cdot l \end{aligned}$$

Momentové průběhy jsou vykresleny na obrázku 9.11.



Obrázek 9.11: Průběh ohybových momentů.

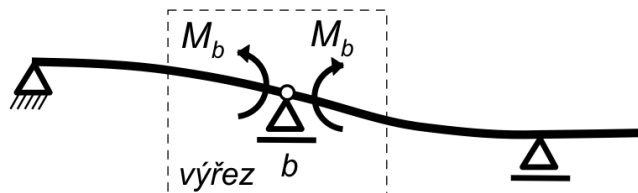
## 9.4 Příklad 4

Obrázek 9.12: Spojitý nosník zatížený rovnoměrně rozděleným zatížením  $q$ .**Zadání:**

Stanovte průběhy ohybových momentů na nosníku podle obrázku 9.12.  $I, EI = \text{konst.}$

**Řešení:**

a) Zapišeme odvození třímomentové rovnice pro řešený případ, který je  $1 \times$  staticky neurčitý - moment  $M_b$  v místě  $b$  (obr. 9.13). Uvádíme zde i odvození třímomentové rovnice, protože se jedná o komplexnější alternativu předchozích případů s podporami ve stejné výši.

Obrázek 9.13: Základní soustava s uvolněnou rotační vazbou v místě  $b$ .

b)  $\varphi_b$  je rotace (natočení) nosníku v podpoře  $b$ .

c) Z podmínky kompatibility (spojitosti) v místě podpory  $b$  plyne pro natočení:

$$\varphi_b = \varphi_{bl} + \varphi_{br} = 0$$

kde  $l$  je index pro natočení nalevo od podpory a  $r$  je index pro natočení napravo.

d) třímomentová rovnice pro nosník s prostým zatížením s podporami ve stejné výši se odvodí z podmínky:

$$\varphi_b = \varphi_{bl1} + \varphi_{br1} + \varphi_{bl2} + \varphi_{br2}$$

kde :

$\varphi_{bl1}$  – natočení od zatížení nalevo od podpory na základní soustavě.

$\varphi_{br1}$  – natočení od zatížení napravo od podpory na základní soustavě.

$\varphi_{bl2}$  – natočení od momentu  $M_b$  nalevo do podpory na základní soustavě.

$\varphi_{br2}$  – natočení od momentu  $M_b$  napravo od podpory na základní soustavě.

Protože známe jednotlivá natočení:

$$\begin{aligned}\varphi_{bl1} &= \frac{ql_{ab}^3}{24EI}; & \varphi_{br1} &= \frac{ql_{bc}^3}{24EI}; \\ \varphi_{bl2} &= \frac{M_a \cdot l_{ab}}{6EI} + \frac{M_b \cdot l_{ab}}{3EI}; & \varphi_{br2} &= \frac{M_b \cdot l_{bc}}{3EI} + \frac{M_c \cdot l_{bc}}{6EI};\end{aligned}$$

můžeme po dosazení do podmínky  $\varphi_b = \varphi_{bl} + \varphi_{br} = 0$  a za předpokladu  $l_{ab} = l_{bc} = l$  psát:

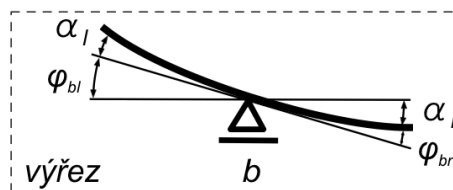
$$\frac{1}{24EI}ql^3 + \frac{1}{24EI}ql^3 + M_a \frac{l}{6EI} + M_b \frac{l}{3EI} + M_b \frac{l}{3EI} + M_c \frac{l}{6EI} = 0$$

což lze zjednodušit na:

$$\frac{1}{12}ql^3 + M_a \frac{l}{6} + M_b \frac{2l}{3} + M_c \frac{l}{6} = 0$$

Tím jsme obdrželi rovnici pro podpory ve stejné výši.

e) Deformační podmínka pro podpory v nestejně výši vychází z obrázku 9.14:



Obrázek 9.14: K deformační podmínce podpor v nestejně výši.

Z geometrie platí:

$$-\alpha_l + \varphi_{bl} + \alpha_r + \varphi_{br} = 0$$

neboli:

$$\frac{1}{12EI}ql^3 + M_a \frac{l}{6EI} + M_b \frac{2l}{3EI} + M_c \frac{l}{6EI} = \frac{h_1 - h_2}{l}$$

a konečně:

$$M_a l + 4M_b l + M_c l = \frac{6EI}{l}(h_1 - h_2) - \frac{1}{12}ql^3$$

dosadíme rozměry a hodnoty zatížení a dostáváme:

$$4M_b \cdot 10 - 45 \cdot 10 = 6 \cdot 0.1 - 5 \cdot 1000$$

Výsledný moment v podpoře pak je:

$$M_b = -113,8 \text{ kNm}$$

f) Podle obr. 9.15 stanovíme reakce a ostatní hodnoty momentů:

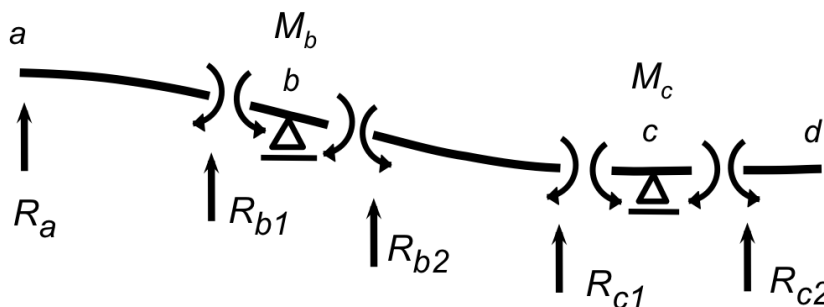
$$\circlearrowleft b : R_a \cdot l - \frac{1}{2}ql^2 + M_b = 0 \Rightarrow R_a = 38,6 \text{ kN}$$

$$\uparrow a-b : R_a + R_{b1} - ql = 0 \Rightarrow R_{b1} = 61,4 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft c : R_{b2} \cdot l - \frac{1}{2}ql^2 - M_b + M_c = 0 \Rightarrow R_{b2} = 56,9 \text{ kN} \Rightarrow R_b = 118,2 \text{ kNm}$$

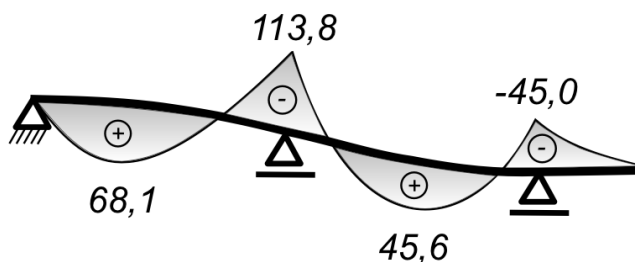
$$\uparrow b-c : R_{b2} + R_{c1} - ql = 0 \Rightarrow R_{c1} = 43,1 \text{ kN}$$

$$\uparrow c : R_{c2} = 30,0 \text{ kN} \Rightarrow R_c = 73,1 \text{ kN}$$



Obrázek 9.15: Schéma pro výpočet výsledných reakcí a momentů.

g) Výsledné momenty vykreslíme:



Obrázek 9.16: Výsledný momentový obrazec.

Doplňkové zadání:

- Stanovte maximální momenty v poli  $\langle a - b \rangle$  a  $\langle b - c \rangle$
- Stanovte momenty a posouvající síly pro  $h_1 = 2$  a  $h_2 = 1$  m.

# Otázky

1. Jaký je postup výpočtu svislého posunutí Metodou jednotkových sil?
2. Jak lze použít Metodu jednotkových sil k výpočtu pootočení?
3. Jak se určí posunutí v konkrétním průřezu lomeného nosníku (nebo rovinného rámu) v obecném směru?
4. V čem se liší výpočet přetvoření rovinných plnostěnných nosníků od výpočtu přetvoření příhradových nosníků?
5. S jakými složkami vnitřních sil uvažujeme při výpočtu přetvoření rovinných rámu Metodou jednotkových sil a proč?
6. Čeho se týká Vereščaginovo pravidlo? Za jakých podmínek jej lze uplatnit?
7. Jaký je rozdíl mezi staticky neurčitou a staticky určitou konstrukcí?
8. Co rozhoduje o velikosti stupně statické neurčitosti?
9. Jaký je princip Silové metody?
10. Jaká kritéria musí splňovat základní soustava?
11. Jaký je fyzikální význam deformačních součinitelů v deformačních podmínkách (např.:  $\delta_{10}, \delta_{11}, \dots$ )?
12. Kde se v Silové metodě uplatňuje princip superpozice?
13. Jak se od sebe liší řešení otevřeného a uzavřeného rovinného rámu Silovou metodou?
14. Jakými způsoby můžeme z uzavřeného rámu vytvořit základní soustavu?
15. Jak se dopočítají složky vnitřních sil v průřezech uzavřeného rámu po vyřešení staticky neurčitých veličin  $X_1, \dots, X_n$ ?
16. Jaké jsou možnosti snížení stupně statické neurčitosti (při tvorbě základní soustavy) u příhradových konstrukcí?
17. Jaké zjednodušující předpoklady přijímáme při tvorbě výpočtového modelu roštu? Jaké to má výhody?
18. Jak se určí počet neznámých veličin při řešení roštu Silovou metodou?

19. V čem je výhodné použití redukční věty při výpočtu přetvoření staticky neurčité konstrukce?
20. Co má společného Silová metoda s Metodou třímomentových rovnic?
21. Jak se používá Metoda třímomentových rovnic k řešení spojitých nosníků?
22. Jak se na spojitém nosníku řešeném Metodou třímomentových rovnic určí podporové reakce?

# Literatura

- [1] Kytýr J. Kadlčák J. *Statika stavebních konstrukcí II*. VUTIUM, Brno, 2001.
- [2] Benda J. *Stavební statika II*. VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2006.





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ