

Téma 11

Obecná deformační metoda – řešení rovinných rámu

- Transformace parametrů deformace a koncových sil z lokálního do globálního souřadnicového systému a zpět
- Globální matice tuhosti a globální vektor koncových sil prutu
- Výpočet koncových sil, reakcí a složek vnitřních sil rámu
- Kontrola správnosti řešení rámu
- Výpočet deformací rámu

Lokální a globální parametry prutu

Parametry deformace:

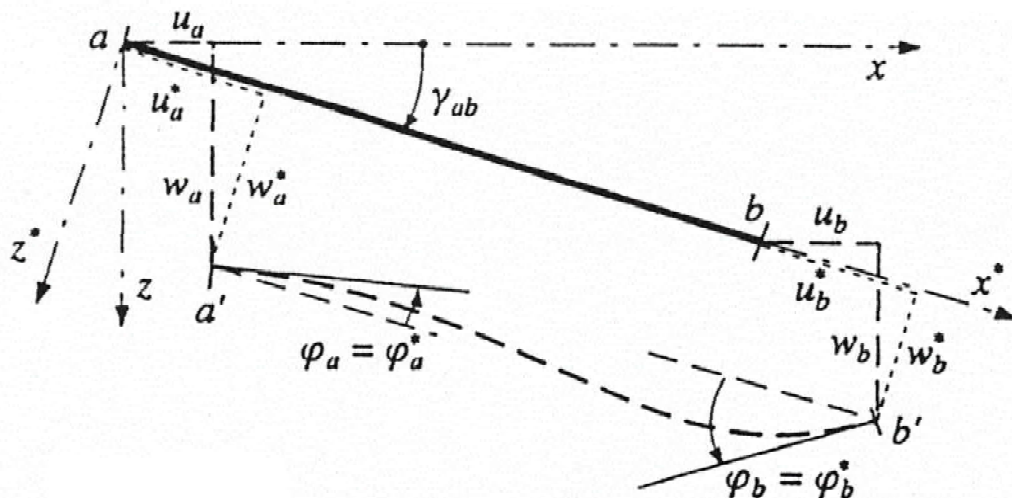
- lokální, pro prut a-b souřadnice x^* , z^* , počátek v bodě a .
- globální, pro celou konstrukci, souřadnice x , z , počátek v libovolném bodě.

Vektor globálních parametrů deformace

Vektor lokálních parametrů deformace

$$r_{ab} = \{u_a \quad w_a \quad \varphi_a \quad u_b \quad w_b \quad \varphi_b\}^T$$

$$r_{ab}^* = \{u_a^* \quad w_a^* \quad \varphi_a^* \quad u_b^* \quad w_b^* \quad \varphi_b^*\}^T$$

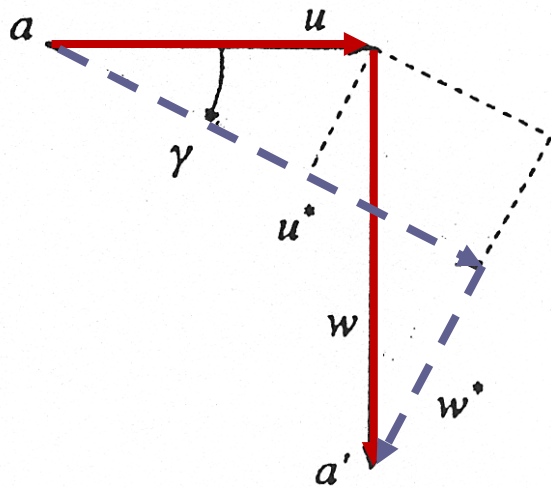


$$s = \sin \gamma_{ab} = \frac{z_b - z_a}{l_{ab}}$$

$$c = \cos \gamma_{ab} = \frac{x_b - x_a}{l_{ab}}$$

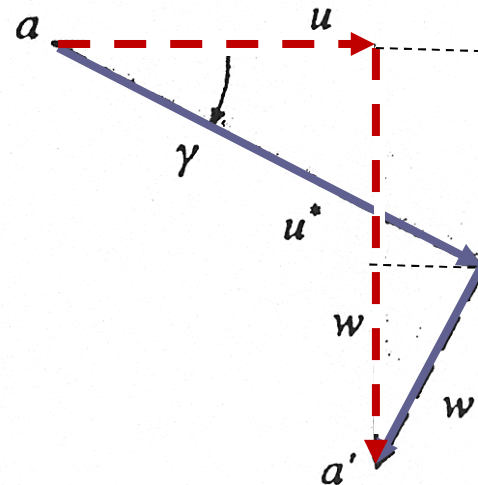
$$l_{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Transformace složek posunutí



$$\begin{aligned}u^* &= u \cdot \cos \gamma + w \cdot \sin \gamma \\w^* &= -u \cdot \sin \gamma + w \cdot \cos \gamma \\ \varphi^* &= \varphi\end{aligned}$$

$$T_{ab}$$



$$\begin{aligned}u &= u^* \cdot \cos \gamma - w^* \cdot \sin \gamma \\w &= u^* \cdot \sin \gamma + w^* \cdot \cos \gamma \\ \varphi^* &= \varphi\end{aligned}$$

$$T_{ab}^T$$



Transformační matice

$$u^* = u \cdot \cos \gamma + w \cdot \sin \gamma$$

$$w^* = -u \cdot \sin \gamma + w \cdot \cos \gamma$$

$$\varphi^* = \varphi$$

■ Maticově lze zapsat $r_{ab}^* = T_{ab} \cdot r_{ab}$

$$r_{ab}^* = \begin{pmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a c + w_a s \\ -u_a s + w_a c \\ \varphi_a \\ u_b c + w_b s \\ -u_b s + w_b c \\ \varphi_b \end{pmatrix}$$

Transformační matice T_{ab} vyjadřuje geometrickou závislost lokálních parametrů deformace na globálních.

Transformační matice, pokračování

Z maticového zápisu $r_{ab}^* = T_{ab} \cdot r_{ab}$ lze odvodit: $r_{ab} = T_{ab}^{-1} \cdot r_{ab}^*$

$$r_{ab} = \begin{pmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_{ab} & -\sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & -\sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a^* c - w_a^* s \\ u_a^* s + w_a^* c \\ \varphi_a^* \\ u_b^* c - w_b^* s \\ u_b^* s + w_b^* c \\ \varphi_b^* \end{pmatrix}$$

Invertovaná transformační matice T_{ab}^{-1} vyjadřuje geometrickou závislost lokálních parametrů deformace na globálních. Transformační matice T_{ab} je ortogonální, platí:

$$T_{ab}^{-1} = T_{ab}^T$$



Transformační matice, pokračování

Transformační matice T_{ab} , případně transponovaná transformační matice T_{ab}^T se využije pro výpočet lokálních koncových sil z globálních, případně pro výpočet globálních koncových sil z lokálních.

$$R_{ab}^* = \begin{pmatrix} X_{ab}^* \\ Z_{ab}^* \\ M_{ab}^* \\ X_{ba}^* \\ Z_{ba}^* \\ M_{ba}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{pmatrix}$$

$$R_{ab}^* = T_{ab} \cdot R_{ab} \quad \text{případně} \quad R_{ab} = T_{ab}^T \cdot R_{ab}^*$$



Koncové síly prutu v globálním souřadném systému

- Z rovnice $R_{ab} = T_{ab}^T \cdot R_{ab}^*$ vyplývá:

$$R_{ab} = T_{ab}^T (\overline{R}_{ab}^* + \hat{R}_{ab}^*) = T_{ab}^T \overline{R}_{ab}^* + T_{ab}^T \hat{R}_{ab}^* = T_{ab}^T \overline{R}_{ab}^* + T_{ab}^T k_{ab}^* r_{ab}^*$$

$$R_{ab} = T_{ab}^T \overline{R}_{ab}^* + T_{ab}^T k_{ab}^* T_{ab} r_{ab} = \overline{R}_{ab} + k_{ab} r_{ab}$$

V globálním souřadném systému platí pro:

a) primární vektor koncových sil: $\overline{R}_{ab} = T_{ab}^T \overline{R}_{ab}^*$

b) matici tuhosti prutu: $k_{ab} = T_{ab}^T k_{ab}^* T_{ab}$

Globální vektor primárních koncových sil

$$\begin{aligned} u &= u^* \cdot \cos \gamma - w^* \cdot \sin \gamma \\ w &= u^* \cdot \sin \gamma + w^* \cdot \cos \gamma \\ \varphi^* &= \varphi \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{ab} = T_{ab}^T \cdot \bar{R}_{ab}^*$$

$$\bar{R}_{ab} = \begin{array}{c} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ \bar{M}_{ab} \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ \bar{M}_{ba} \end{array} = \begin{array}{ccccccc} \cos \gamma_{ab} & -\sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & -\sin \gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{array} = \begin{array}{c} \bar{X}_{ab}^* c - \bar{Z}_{ab}^* s \\ \bar{X}_{ab}^* s + \bar{Z}_{ab}^* c \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* c - \bar{Z}_{ba}^* s \\ \bar{X}_{ba}^* s + \bar{Z}_{ba}^* c \\ \bar{M}_{ba}^* \end{array}$$

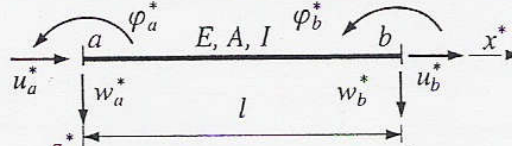
$$c = \cos \gamma_{ab}$$

$$s = \sin \gamma_{ab}$$

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu [1]

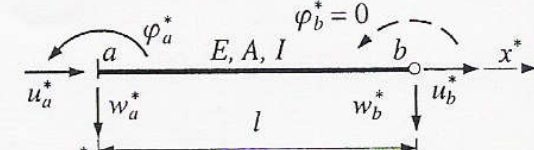
Tabulka 11.3. Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený



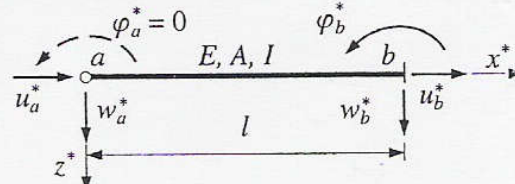
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený



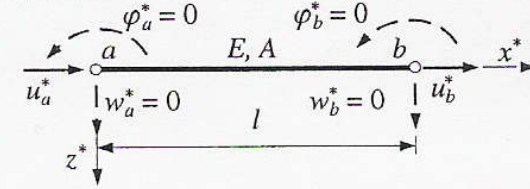
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu oboustranně monoliticky připojeného

$$k_{ab}$$

	K	L	M	N
3	Souřadnice konc			
4	x_a [m]	0	x_b [m]	5
5	z_a [m]	0	z_b [m]	-1,5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Prut č.1 (-)								
2									
3	Kódová čísla pr								
4		0	0	0	1	2	3		
5									
6	Parametry prutu								
7		A [m ²]	J [m ⁴]	E [kPa]	I [m]	cos γ_{ab}	sin γ_{ab}		
8		0,15	0,003125	20000000	$=((N4-L4)^2+(N5-L5)^2)/E8$	$=(N4-L4)/E8$	$=(N5-L5)/E8$		
9									
10	Lokální matice tuhosti								
11	1. Oboustranně připojeného								
12	kód. č.	=B4	=C4	=D4	=E4	=F4	=G4		
13	=B4	$=D8*B8/E8$	0	0	$=-D8*B8/E8$	0	0		
14	=C4	0	$=12*C8*D8/(E8*E8)$	$=-6*D8*C8/(E8*E8)$	0	$=-12*D8*C8/(E8*E8)$	$=-6*D8*C8/(E8*E8)$		
15	=D4	0	$=-6*D8*C8/(E8*E8)$	$=4*D8*C8/E8$	0	$=6*D8*C8/(E8*E8)$	$=2*D8*C8/E8$		
16	=E4	$=-D8*B8/E8$	0	0	$=D8*B8/E8$	0	0		
17	=F4	0	$=-12*D8*C8/(E8*E8)$	$=6*D8*C8/E8/E8$	0	$=12*D8*C8/E8/E8$	$=-6*D8*C8/E8/E8$		
18	=G4	0	$=-6*D8*C8/E8/E8$	$=2*D8*C8/E8$	0	$=6*D8*C8/E8/E8$	$=4*D8*C8/E8$		
19									

Globální matice tuhosti prutu konstantního průřezu oboustranně monoliticky připojeného

$$k_{ab} = T_{ab}^T k_{ab}^* T_{ab}$$

$$k_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & \frac{6EI}{l^2}s & -(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2) & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & \frac{6EI}{l^2}s \\ (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & -\frac{6EI}{l^2}c & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & -(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2) & -\frac{6EI}{l^2}c \\ \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} \\ -(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2) & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & -\frac{6EI}{l^2}s \\ -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & -(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2) & \frac{6EI}{l^2}c & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & \frac{6EI}{l^2}c \\ \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Globální matice tuhosti prutu konstantního průřezu oboustranně monoliticky připojeného

$$k_{ab} = T_{ab}^T k_{ab}^* T_{ab}$$

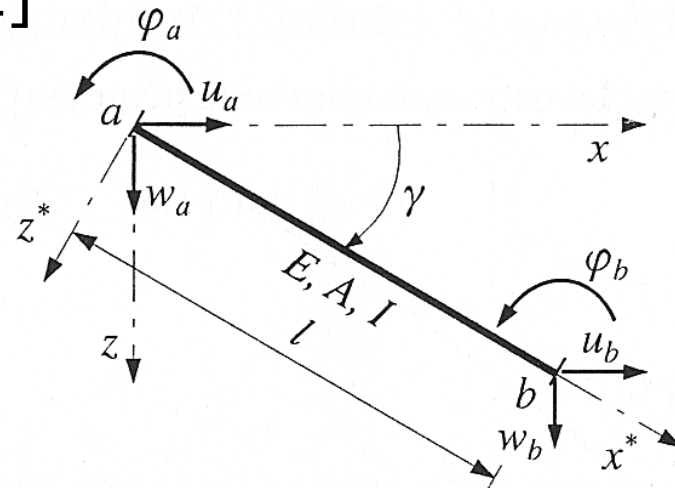
	A	B	C	D	E	F	G
37	Globální matice tuhosti k_{ab}						
38	=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MATIC(K30:P35;B13:G18);B30:G35)						
39	=A11						
40	=A12	=B12	=C12	=D12	=E12	=F12	=G12
41	=A13	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MA	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(
42	=A14	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MA	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(
43	=A15	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MA	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(
44	=A16	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MA	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(
45	=A17	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MA	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(
46	=A18	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(SOUČIN.MA	=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(=SOUČIN.MATIC(
47							

Matice tuhosti prutu v GSS dle [1]

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený

$$c = \cos \gamma$$

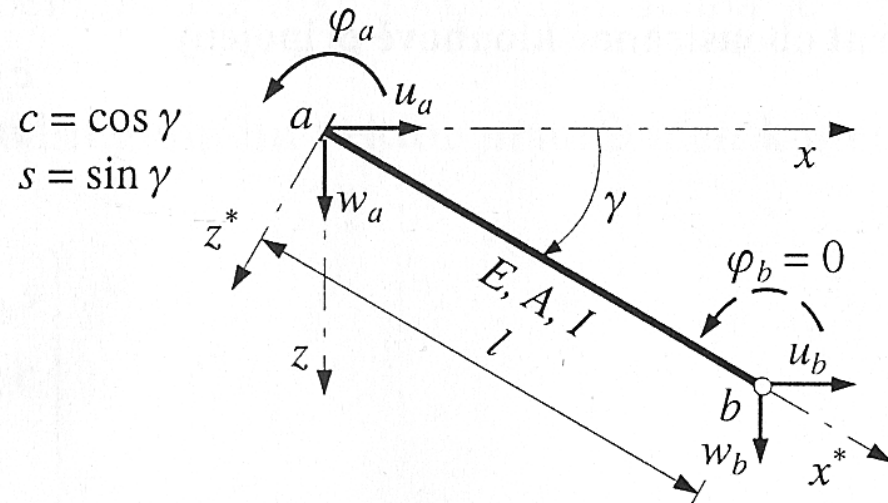
$$s = \sin \gamma$$



$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s \\
 \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & -\frac{6EI}{l^2}c & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2\right) & -\frac{6EI}{l^2}c \\
 \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} \\
 -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\frac{6EI}{l^2}s \\
 -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2\right) & \frac{6EI}{l^2}c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & \frac{6EI}{l^2}c \\
 \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l}
 \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti prutu v GSS dle [1]

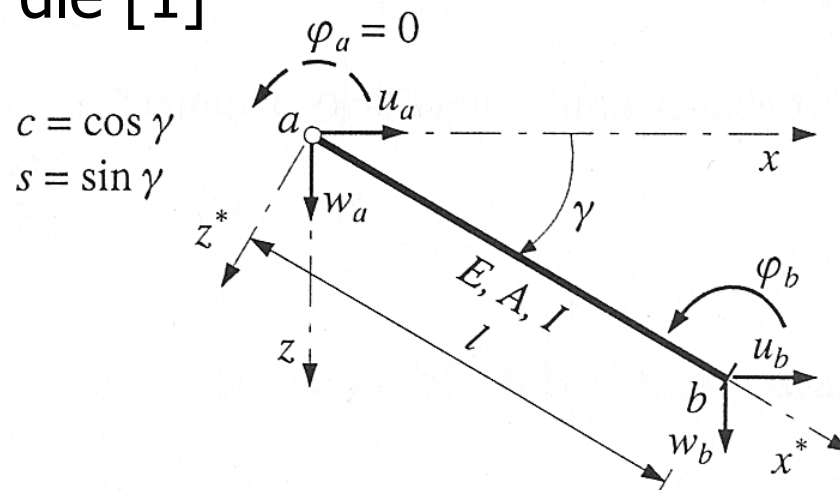
(b) Prut pravostranně kloubově připojený



$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{3EI}{l^2}s & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & -\frac{3EI}{l^2}c & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & 0 \\ \frac{3EI}{l^2}s & -\frac{3EI}{l^2}c & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{3EI}{l^2}c & 0 \\ \hline -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & \frac{3EI}{l^2}c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti prutu v GSS dle [1]

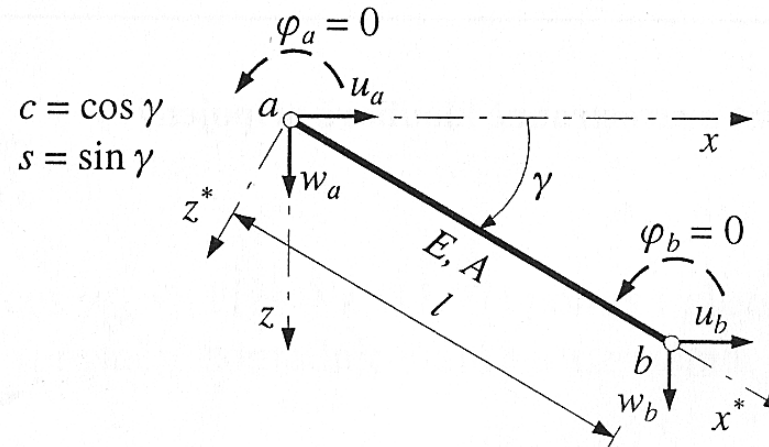
(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{3EI}{l^2}s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & -\frac{3EI}{l^2}c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\frac{3EI}{l^2}s \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & 0 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & \frac{3EI}{l^2}c \\ \frac{3EI}{l^2}s & -\frac{3EI}{l^2}c & 0 & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{3EI}{l^2}c & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti prutu v GSS dle [1]

(d) Prut oboustranně kloubově připojený



$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{EA}{l} \left[\begin{array}{ccc|cc} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

K výpočtu lokálních koncových sil z globálních parametrů deformace:

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} = \frac{EA}{l} \left[\begin{array}{ccc|cc} c & s & 0 & -c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{r}_{ab}$$

Architektonické a konstrukční řešení



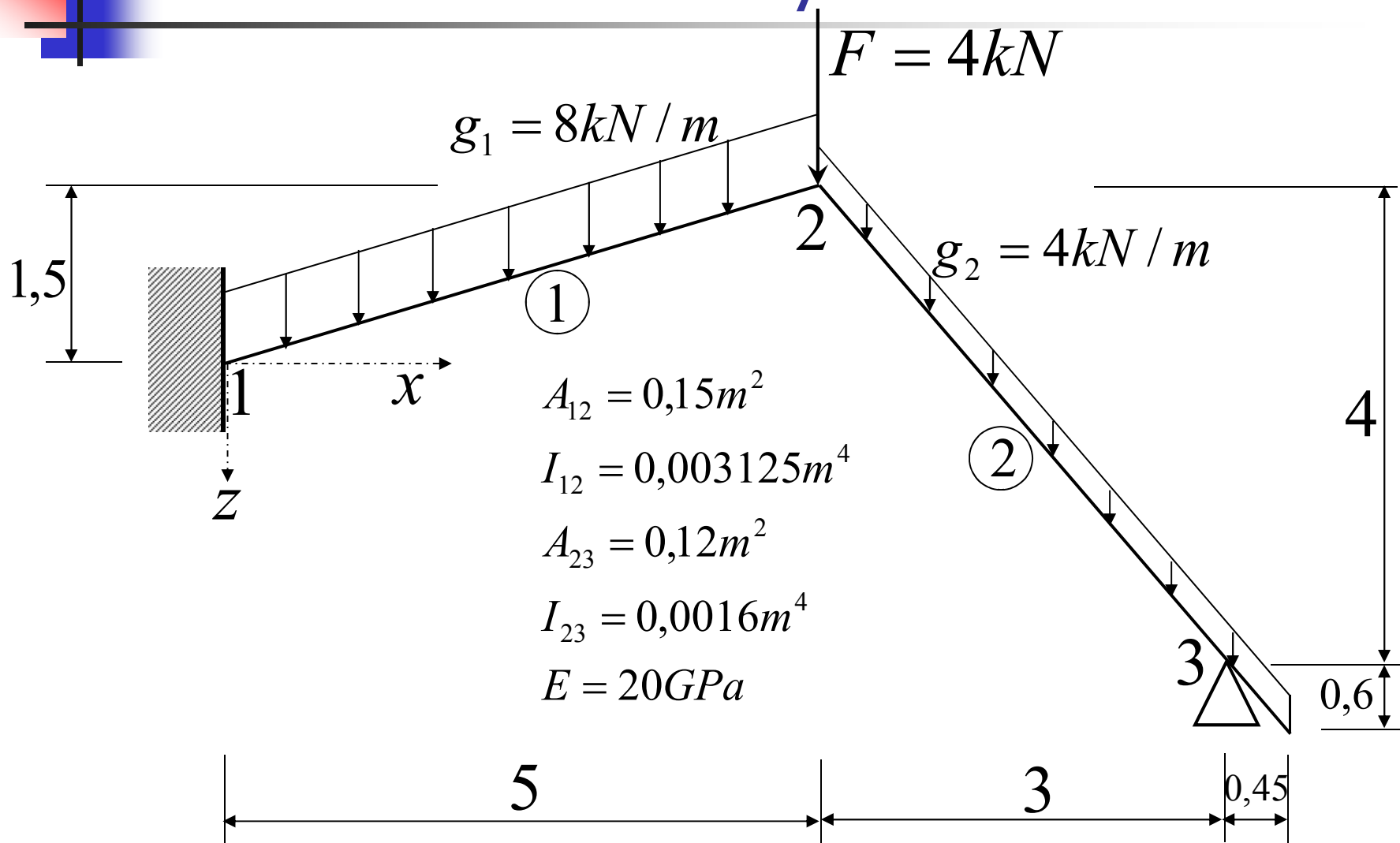
Románský sloh - Rotunda na Řípu,
foto: <http://www.wikipedia.org/>

Architektonické a konstrukční řešení

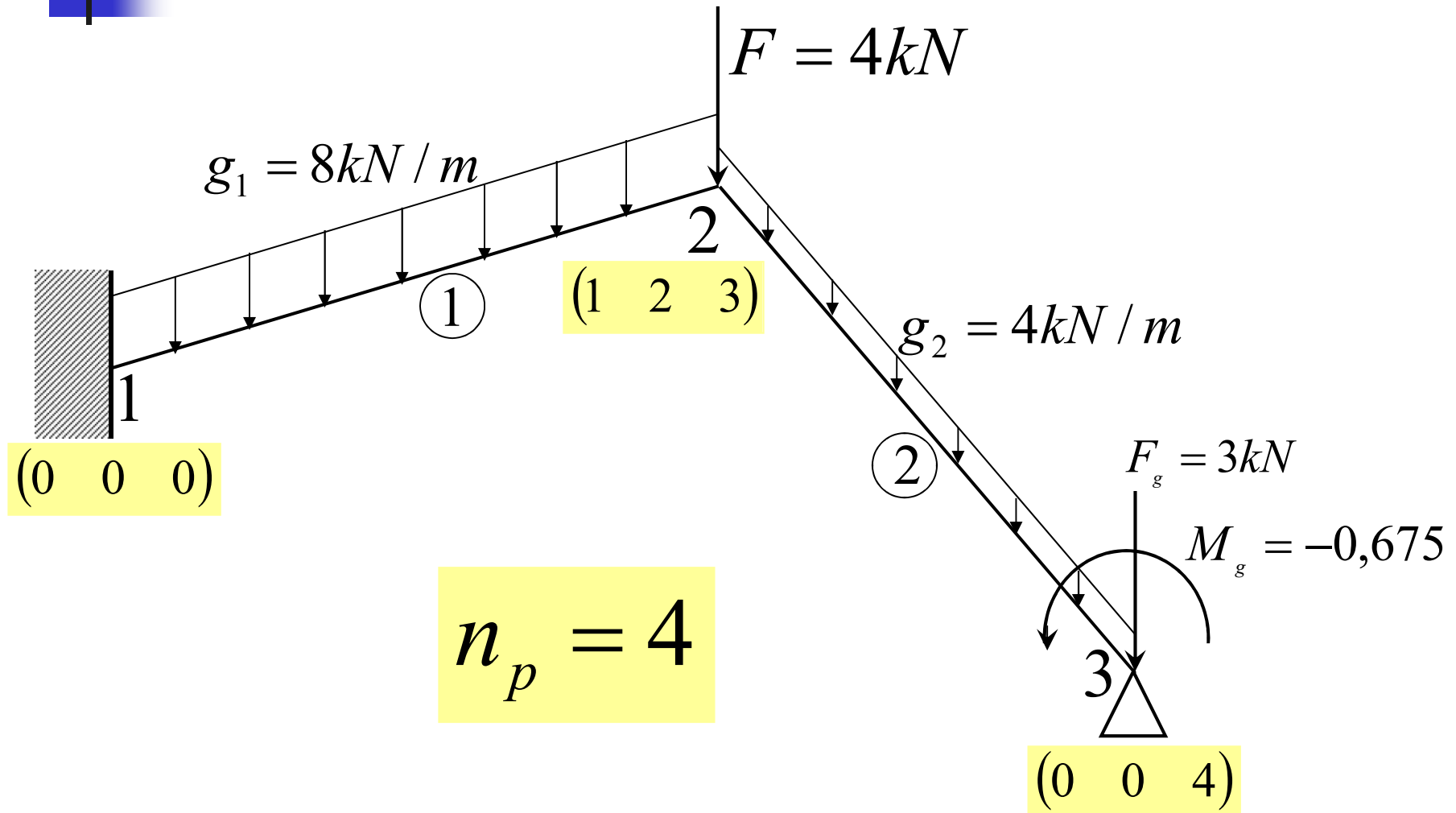


Gotický sloh – Chrám sv. Víta,
foto: <http://www.wikipedia.org/>

Příklad 3 – kosoúhlý rám - zadání

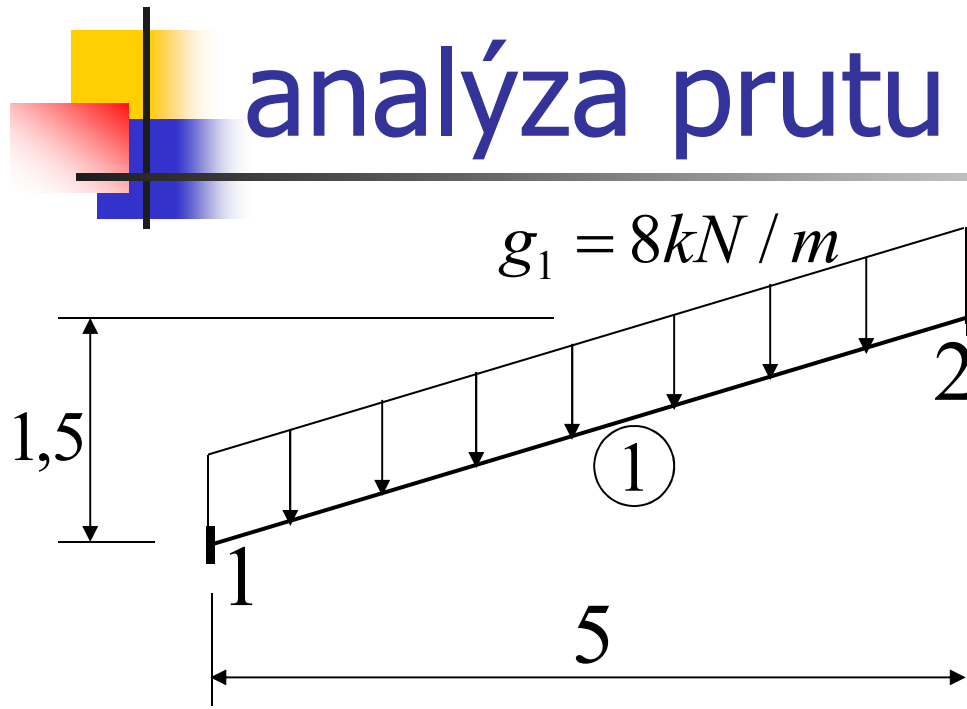


Příklad 3 – kosoúhlý rám výpočtový model



Příklad 3 – kosoúhlý rám

analýza prutu 1 (1 - 2)



$$x_1 = 0 \quad x_2 = 5 \text{ m}$$
$$z_1 = 0 \quad z_2 = -1,5 \text{ m}$$

$$l_{12} = 5,22 \text{ m}$$

$$\sin \gamma_{12} = \frac{z_2 - z_1}{l_{12}} = \frac{-1,5}{5,22} = -0,287$$

$$\cos \gamma_{12} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}} = \frac{5}{5,22} = 0,958$$

$$\Rightarrow \gamma_{12} = -16,7^\circ = 343,3^\circ$$

$$n_1 = g_1 \sin \gamma_{12} = -2,299 \text{ kNm}^{-1}$$

$$q_1 = g_1 \cos \gamma_{12} = 7,663 \text{ kNm}^{-1}$$

Příklad 3, analýza prutu 1 (1 – 2), pokračování

Lokální primární vektor koncových sil

Prut oboustranně monolitický:

Vstupy:

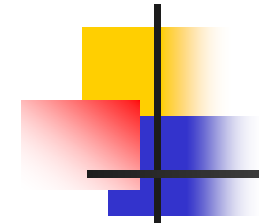
$$n_1 = -2,299 \text{ kNm}^{-1}$$

$$q_1 = 7,663 \text{ kNm}^{-1}$$

$$l_{12} = 5,22 \text{ m}$$

$$\bar{R}_{12}^* = \begin{bmatrix} \bar{X}_{12}^* \\ \bar{Z}_{12}^* \\ \bar{M}_{12}^* \\ \bar{X}_{21}^* \\ \bar{Z}_{21}^* \\ \bar{M}_{21}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_1 l_{12} / 2 \\ -q_1 l_{12} / 2 \\ q_1 l_{12}^2 / 12 \\ -n_1 l_{12} / 2 \\ -q_1 l_{12} / 2 \\ -q_1 l_{12}^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -20 \\ 17,4 \\ 6 \\ -20 \\ -17,4 \end{bmatrix}$$

Příklad 3, analýza prutu 1 (1 – 2), pokračování



Transformační matice $T_{12} =$

$$\begin{array}{c}
 \cos \gamma_{12} \quad \sin \gamma_{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 -\sin \gamma_{12} \quad \cos \gamma_{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cos \gamma_{12} \quad \sin \gamma_{12} \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\sin \gamma_{12} \quad \cos \gamma_{12} \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0,9578 \quad 0,2874 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 -0,2874 \quad 0,9578 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,9578 \quad 0,2874 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0,2874 \quad 0,9578 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

Transponovaná transformační matice $T_{12}^T =$

$$\begin{array}{c}
 \cos \gamma_{12} \quad -\sin \gamma_{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \sin \gamma_{12} \quad \cos \gamma_{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cos \gamma_{12} \quad -\sin \gamma_{12} \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sin \gamma_{12} \quad \cos \gamma_{12} \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0,9578 \quad -0,2874 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0,2874 \quad 0,9578 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,9578 \quad -0,2874 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,2874 \quad 0,9578 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

Příklad 3, analýza prutu 1 (1 – 2), pokračování

Globální primární vektor koncových sil

$$\bar{\mathbf{R}}_{12} = \mathbf{T}_{12}^T \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12}^*$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{12} = \begin{pmatrix} \bar{X}_{12} \\ \bar{Z}_{12} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{X}_{21} \\ \bar{Z}_{21} \\ \bar{M}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_{12}^* c - \bar{Z}_{12}^* s \\ \bar{X}_{12}^* s + \bar{Z}_{12}^* c \\ \bar{M}_{12}^* \\ \bar{X}_{21}^* c - \bar{Z}_{21}^* s \\ \bar{X}_{21}^* s + \bar{Z}_{21}^* c \\ \bar{M}_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot c + 20 \cdot s \\ 6 \cdot s - 20 \cdot c \\ 17,4 \\ 6 \cdot c + 20 \cdot s \\ 6 \cdot s - 20 \cdot c \\ -17,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20,881 \\ 17,400 \\ 0 \\ -20,881 \\ -17,400 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Příklad 3, analýza prutu 1 (1 – 2), pokračování

Lokální matice tuhosti

$$k_{12}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 574,7 & 0 & 0 & -574,7 & 0 & 0 \\ 0 & 5,3 & -13,8 & 0 & -5,3 & -13,8 \\ 0 & -13,8 & 47,9 & 0 & 13,81 & 23,9 \\ -574,7 & 0 & 0 & 574,7 & 0 & 0 \\ 0 & -5,3 & 13,8 & 0 & 5,3 & 13,8 \\ 0 & -13,8 & 23,9 & 0 & 13,8 & 47,9 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Příklad 3, analýza prutu 1 (1 – 2), pokračování

$$k_{12} = T_{12}^T k_{12}^* T_{12}$$

Globální matice tuhosti prutu

$$k_{12} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 527,7 & -156,7 & -3,95 & -527,7 & 156,7 & -3,95 \\ -156,7 & 522,9 & -13,18 & 156,7 & -52,29 & -13,18 \\ -3,95 & -13,18 & 47,9 & 3,95 & 13,18 & 23,9 \\ -527,7 & 156,7 & 3,95 & 527,7 & -156,7 & 3,95 \\ 156,7 & -52,29 & 13,18 & -156,7 & 522,9 & 13,18 \\ -3,95 & -13,18 & 23,9 & 3,95 & 13,18 & 47,8 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \end{matrix}$$

Příklad 3 – kosoúhlý rám

analýza prutu 2 (2 - 3),

$$x_2 = 5m \quad x_3 = 8m \quad l_{23} = 5m$$
$$z_2 = -1,5m \quad z_3 = 2,5m$$

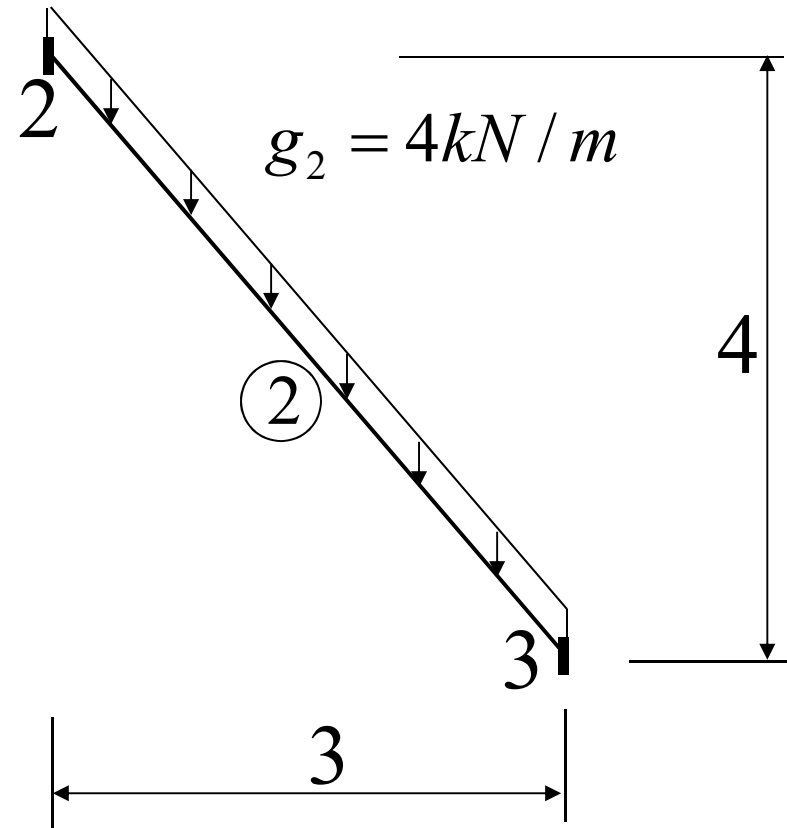
$$\sin \gamma_{23} = \frac{z_3 - z_2}{l_{23}} = \frac{2,5 - (-1,5)}{5} = 0,8$$

$$\cos \gamma_{23} = \frac{x_3 - x_2}{l_{23}} = 0,6$$

$$\Rightarrow \gamma_{23} = 53,13^\circ$$

$$n_2 = g_2 \sin \gamma_{23} = 3,2kNm^{-1}$$

$$q_2 = g_2 \cos \gamma_{23} = 2,4kNm^{-1}$$



Příklad 3, analýza prutu 2 (2 - 3), pokračování

Lokální primární vektor (oboustranně monoliticky):

Vstupy:

$$n_2 = 3,2kNm^{-1}$$

$$q_2 = 2,4kNm^{-1}$$

$$l_{23} = 5$$

$$\bar{R}_{23}^* = \begin{bmatrix} \bar{X}_{23}^* \\ \bar{Z}_{23}^* \\ \bar{M}_{23}^* \\ \bar{X}_{32}^* \\ \bar{Z}_{32}^* \\ \bar{M}_{32}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_2 l_{32} / 2 \\ -q_2 l_{23} / 2 \\ q_2 l_{23}^2 / 12 \\ -n_2 l_{23} / 2 \\ -q_2 l_{23} / 2 \\ -q_2 l_{23}^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \\ -8 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Příklad 3, analýza prutu 2 (2 - 3), pokračování

Transformační matice T_{23}

$$T_{23} = \begin{vmatrix} \cos \gamma_{23} & \sin \gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{23} & \cos \gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{23} & \sin \gamma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{23} & \cos \gamma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transponovaná transformační matice T_{23}^T

$$T_{23}^T = \begin{vmatrix} \cos \gamma_{23} & -\sin \gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \gamma_{23} & \cos \gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{23} & -\sin \gamma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \gamma_{23} & \cos \gamma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Příklad 3, analýza prutu 2 (2 - 3), pokračování

Globální primární vektor koncových sil

$$\bar{R}_{23} = T_{23}^T \cdot \bar{R}_{23}^*$$

$$\bar{R}_{23} = \begin{array}{c} \bar{X}_{23} \\ \bar{Z}_{23} \\ \bar{M}_{23} \\ \bar{X}_{23} \\ \bar{Z}_{23} \\ \bar{M}_{23} \end{array} = \begin{array}{c} \bar{X}_{23}^* c - \bar{Z}_{23}^* s \\ \bar{X}_{23}^* s + \bar{Z}_{23}^* c \\ \bar{M}_{23}^* \\ \bar{X}_{32}^* c - \bar{Z}_{32}^* s \\ \bar{X}_{32}^* s + \bar{Z}_{32}^* c \\ \bar{M}_{32}^* \end{array} = \begin{array}{c} -8 \cdot c + 6 \cdot s \\ -8 \cdot s - 6 \cdot c \\ 5 \\ -8 \cdot c + 6 \cdot s \\ -8 \cdot s - 6 \cdot c \\ -5 \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ -10 \\ 5 \\ 0 \\ -10 \\ -5 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{array}$$

Příklad 3, analýza prutu 2 (2 - 3), pokračování

Lokální matice tuhosti

$$k_{23}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 & 0 & 0 & -480 & 0 & 0 \\ 0 & 3,072 & -7,68 & 0 & -3,072 & -7,68 \\ 0 & -7,68 & 25,6 & 0 & 7,68 & 12,8 \\ -480 & 0 & 0 & 480 & 0 & 0 \\ 0 & -3,072 & 7,68 & 0 & 3,072 & 7,68 \\ 0 & -7,68 & 12,8 & 0 & 7,68 & 25,6 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Příklad 3, analýza prutu 2 (2 - 3), pokračování

$$k_{23} = T_{23}^T k_{23}^* T_{23}$$

Globální matice tuhosti prutu

$$k_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 174,8 & 228,9 & 6,14 & -174,8 & -228,9 & 6,14 \\ 228,9 & 308,3 & -4,61 & -228,9 & -308,3 & -4,61 \\ 6,14 & -4,61 & 25,6 & -6,14 & 4,61 & 12,8 \\ -174,8 & -228,9 & -6,14 & 174,8 & 228,9 & -6,14 \\ -228,9 & -308,3 & 4,61 & 228,9 & 308,3 & 4,61 \\ 6,14 & -4,61 & 12,8 & -6,14 & 4,61 & 25,6 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

Příklad 3, rovnice rovnováhy

Rovnice rovnováhy:

$$ad1) -X_{21} - X_{23} = 0$$

$$ad2) -Z_{21} - Z_{23} + F = 0$$

$$ad3) -M_{21} - M_{23} = 0$$

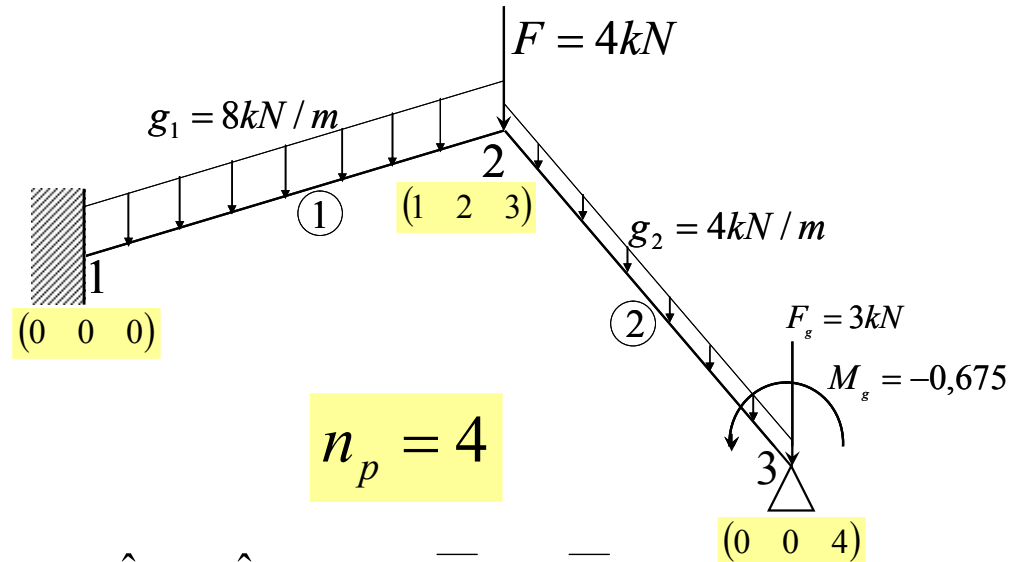
$$ad4) -M_{32} + M_g = 0$$

$$ad1) \bar{X}_{21} + \hat{X}_{21} + \bar{X}_{23} + \hat{X}_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{X}_{21} + \hat{X}_{23} = -\bar{X}_{21} - \bar{X}_{23}$$

$$ad2) \bar{Z}_{21} + \hat{Z}_{21} + \bar{Z}_{23} + \hat{Z}_{23} = F \quad \Rightarrow \quad \hat{Z}_{21} + \hat{Z}_{23} = F - \bar{Z}_{21} - \bar{Z}_{23}$$

$$ad3) \bar{M}_{21} + \hat{M}_{21} + \bar{M}_{23} + \hat{M}_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{M}_{21} + \hat{M}_{23} = -\bar{M}_{21} - \bar{M}_{23}$$

$$ad4) \bar{M}_{32} + \hat{M}_{32} = M_g \quad \Rightarrow \quad \hat{M}_{32} = M_g - \bar{M}_{32}$$



Obecně:

$$K \cdot r = S - \bar{R} = F$$



Příklad 3, zatěžovací vektor

Zatěžovací vektor F představuje pravou stranu řešených lineárních rovnic :

$$F = S - \bar{R}$$

S je vektor uzlových zatížení, do řešení lineárních rovnic vstupuje tam, kde hledáme neznámý parametr deformace (dle kódových čísel)

\bar{R} je součet vektorů primárních koncových sil v globálním souřadném systému působících v uzlech ve smyslu hledaných parametrů deformace (dle kódových čísel)

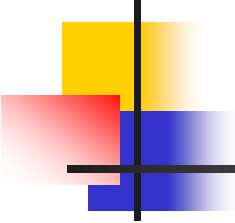
$$S = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ M_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -0,675 \end{Bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{21} \\ \bar{Z}_{21} \\ \bar{M}_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{X}_{23} \\ \bar{Z}_{23} \\ \bar{M}_{23} \\ \bar{M}_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20,88 \\ -17,40 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \\ -5 \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 34,88 \\ 12,4 \\ 4,325 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Příklad 3, tvorba matice tuhosti konstrukce

- Matice tuhosti konstrukce se tvoří z částí matic tuhostí prutů konstrukce, v daném případě prutů 1 a 2:

$$K = K_1 + K_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 527,7 & -156,7 & 3,95 & 0 \\ -156,7 & 52,3 & 13,2 & 0 \\ 3,95 & 13,2 & 47,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \cdot 10^3 + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 174,8 & 228,9 & 6,14 & 6,14 \\ 228,9 & 308,3 & -4,61 & -4,61 \\ 6,14 & -4,61 & 25,6 & 12,8 \\ 6,14 & -4,61 & 12,8 & 25,6 \end{array} \right| \cdot 10^3 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 702,4 & 72,2 & 10,1 & 6,14 \\ 72,2 & 360,6 & 8,57 & -4,61 \\ 10,1 & 8,57 & 73,5 & 12,8 \\ 6,14 & -4,61 & 12,8 & 25,6 \end{array} \right| \cdot 10^3 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array}$$



Příklad 3, sestavení matice tuhosti k-ce a řešení soustavy lineárních rovnic

$$K \cdot r = F$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{bmatrix} 702,445 & 72,203 & 10,098 & 6,144 \\ 72,203 & 360,595 & 8,573 & -4,608 \\ 10,098 & 8,573 & 73,491 & 12,8 \\ 6,144 & -4,608 & 12,8 & 25,6 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 34,880 \\ 12,400 \\ 4,325 \end{Bmatrix}$$

$$r = \{u_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3\}^T = \{-1,3 \cdot 10^{-5} \quad 9,76 \cdot 10^{-5} \quad 1,38 \cdot 10^{-4} \quad 1,21 \cdot 10^{-4}\}^T$$

Příklad 3, výpočet koncových sil prutu 1 (1 -2) v GSS a LSS

Globální

$$R_{12} = \overline{R}_{12} + k_{12}r_{12}$$

$$R_{12} = \begin{Bmatrix} X_{12} \\ Z_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Z_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{12} \\ \overline{Z}_{12} \\ \overline{M}_{12} \\ \overline{X}_{21} \\ \overline{Z}_{21} \\ \overline{M}_{21} \end{Bmatrix} + k_{12} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20,88 \\ 17,40 \\ 0 \\ -20,88 \\ -17,40 \end{Bmatrix} + k_{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,3 \cdot 10^{-5} \\ 9,76 \cdot 10^{-5} \\ 1,35 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20,88 \\ 17,40 \\ 0 \\ -20,88 \\ -17,40 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 21,65 \\ -8,97 \\ 4,54 \\ -21,65 \\ 8,97 \\ 7,85 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21,65 \\ -29,85 \\ 21,94 \\ -21,65 \\ -11,91 \\ -9,55 \end{Bmatrix}$$

Lokální

$$R_{12}^* = T_{12}R_{12}$$

$$R_{12}^* = \begin{Bmatrix} X_{12}^* \\ Z_{12}^* \\ M_{12}^* \\ X_{21}^* \\ Z_{21}^* \\ M_{21}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9578 & 0,2873 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2873 & 0,9578 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9578 & 0,2873 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2873 & 0,9578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{12} \\ Z_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Z_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29,31 \\ -22,37 \\ 21,94 \\ -17,31 \\ -17,63 \\ -9,55 \end{Bmatrix}$$

Příklad 3, výpočet koncových sil prutu 2 (2 - 3) v GSS a v LSS

Globální

$$R_{23} = \overline{R}_{23} + k_{23}r_{23}$$

$$R_{23} = \begin{Bmatrix} X_{23} \\ Z_{23} \\ M_{23} \\ X_{32} \\ Z_{32} \\ M_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{21} \\ \overline{Z}_{21} \\ \overline{M}_{21} \\ \overline{X}_{32} \\ \overline{Z}_{32} \\ \overline{M}_{32} \end{Bmatrix} + k_{23} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \\ 0 \\ -10 \\ -5 \end{Bmatrix} + k_{23} \begin{Bmatrix} -1,3 \cdot 10^{-5} \\ 9,76 \cdot 10^{-5} \\ 1,35 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 1,21 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \\ 0 \\ -10 \\ -5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 21,65 \\ 25,91 \\ 4,55 \\ -21,65 \\ -25,91 \\ 4,33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21,65 \\ 15,91 \\ 9,55 \\ -21,65 \\ -35,91 \\ -0,675 \end{Bmatrix}$$

Lokální

$$R_{23}^* = T_{23}R_{23}$$

$$R_{23}^* = \begin{Bmatrix} X_{23}^* \\ Z_{23}^* \\ M_{23}^* \\ X_{32}^* \\ Z_{32}^* \\ M_{32}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{12} \\ Z_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Z_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25,72 \\ -7,77 \\ 9,55 \\ -41,72 \\ -4,23 \\ -0,675 \end{Bmatrix}$$

ODM, příklad 3, řešení kosoúhlého rámu v Excelu, část 1

Prut č.1 (1-2)	I	A	J	E	c	s	x_1	x_2	z_1	z_2
	5.220153	0.15	0.003125	20000000	0.957826	-0.28735	0	5	0	-1.5

Lokální matice tuhosti

kód. číslo	0	0	0	1	2	3
0	574695.8	0	0	-574696	0	0
0	0	5272.438	-13761.5	0	-5272.44	-13761.5
0	0	-13761.5	47891.31	0	13761.47	23945.66
1	-574696	0	0	574695.8	0	0
2	0	-5272.44	13761.47	0	5272.438	13761.47
3	0	-13761.5	23945.66	0	13761.47	47891.31

Transformační matice T_{ab}

kód. číslo	0	0	0	1	2	3
0	0.957826	-0.28735	0	0	0	0
0	0.287348	0.957826	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0.957826	-0.28735	0
2	0	0	0	0.287348	0.957826	0
3	0	0	0	0	0	1

Transformační matice transponovaná $T_{ab}^T = T_{ab}^{-1}$

kód. číslo	0	0	0	1	2	3
0	0.957826	0.287348	0	0	0	0
0	-0.28735	0.957826	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0.957826	0.287348	0
2	0	0	0	-0.28735	0.957826	0
3	0	0	0	0	0	1

Primární vektory koncových sil

n_1	-2.29878	
n_2	-2.29878	
q_1	7.66261	
q_2	7.66261	
F_{1^a}	0	0
a_{1^a}	0	0
b_{1^a}	0	0
F_{2^a}	0	0
a_{2^a}	0	0
b_{2^a}	0	0
M	0	0
a_{1^b}	0	0
b_{2^b}	0	0

0	6
0	-20
0	17.40051
1	6
2	-20
3	-17.4005

ODM, příklad 3, řešení kosoúhlého rámu v Excelu, část 2

Prut č.1 (1-2)

Neúplná globální matice tuhosti

kód. číslo	0	0	0	1	2	3
0	550458.7	1515.024	-3954.329	-550458.7	-1515.02	-3954.33
0	-165138	5050.08	-13181.1	165137.6	-5050.08	-13181.1
0	0	-13761.5	47891.31	0	13761.47	23945.66
1	-550459	-1515.02	3954.329	550458.7	1515.024	3954.329
2	165137.6	-5050.08	13181.1	-165137.6	5050.08	13181.1
3	0	-13761.5	23945.66	0	13761.47	47891.31

Globální matice tuhosti

kód. číslo	0	0	0	1	2	3
0	527679.2	-156722	-3954.329	-527679.2	156722	-3954.33
0	-156722	52289.04	-13181.1	156722	-52289	-13181.1
0	-3954.33	-13181.1	47891.31	3954.329	13181.1	23945.66
1	-527679	156722	3954.329	527679.2	-156722	3954.329
2	156722	-52289	13181.1	-156722	52289.04	13181.1
3	-3954.33	-13181.1	23945.66	3954.329	13181.1	47891.31

	Glob.VPKS		Glob. VSKS	Glob. VKS	Lok. VKS
	$R_{1,2}$	$r_{1,2}$	$k_{1,2}^*r_{1,2}$	$R_{1,2}$	R^*_{12}
0	8.88E-16	0	21.64909	21.64909	29.31457
0	-20.8806	0	-8.97342	-29.854	-22.3742
0	17.40051	0	4.542774	21.94329	21.94329
1	8.88E-16	-1.3E-05	-21.6491	-21.6491	-17.3146
2	-20.8806	9.76E-05	8.973424	-11.9072	-17.6258
3	-17.4005	0.000138	7.850704	-9.54981	-9.54981

ODM, příklad 3, řešení kosoúhlého rámu v Excelu, část 3

Prut č.2 (2-3)	I	A	J	E	c	s	x_2	x_3	z_2	z_3
	5	0.12	0.0016	20000000	0.6	0.8	5	8	-1.5	2.5

Lokální matice tuhosti

kód. číslo	1	2	3	0	0	4
1	480000	0	0	-480000	0	0
2	0	3072	-7680	0	-3072	-7680
3	0	-7680	25600	0	7680	12800
0	-480000	0	0	480000	0	0
0	0	-3072	7680	0	3072	7680
4	0	-7680	12800	0	7680	25600

Transformační matice T_{ab}

kód. číslo	1	2	3	0	0	4
1	0.6	0.8	0	0	0	0
2	-0.8	0.6	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0.6	0.8	0
0	0	0	0	-0.8	0.6	0
4	0	0	0	0	0	1

Transformační matice transponovaná $T_{ab}^T = T_{ab}^{-1}$

kód. číslo	1	2	3	0	0	4
1	0.6	-0.8	0	0	0	0
2	0.8	0.6	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0.6	-0.8	0
0	0	0	0	0.8	0.6	0
4	0	0	0	0	0	1

Primární vektory koncových sil

n_1	3.2
n_2	3.2
q_1	2.4
q_2	2.4
F_{1a}	0
a_{1a}	0
b_{1a}	0
F_{2a}	0
a_{2a}	0
b_{2a}	0
M	0
a_{1b}	0
b_{1b}	0

1	-8
2	-6
3	5
0	-8
0	-6
4	-5

ODM, příklad 3, řešení kosoúhlého rámu v Excelu, část 4

Prut č.2 (2-3)

Neúplná globální matice tuhosti

kód. číslo	1	2	3	0	0	4
1	288000	-2457.6	6144	-288000	2457.6	6144
2	384000	1843.2	-4608	-384000	-1843.2	-4608
3	0	-7680	25600	0	7680	12800
0	-288000	2457.6	-6144	288000	-2457.6	-6144
0	-384000	-1843.2	4608	384000	1843.2	4608
4	0	-7680	12800	0	7680	25600

Globální matice tuhosti

kód. číslo	1	2	3	0	0	4
1	174766.1	228925.4	6144	-174766	-228925	6144
2	228925.4	308305.9	-4608	-228925	-308306	-4608
3	6144	-4608	25600	-6144	4608	12800
0	-174766	-228925	-6144	174766.1	228925.4	-6144
0	-228925	-308306	4608	228925.4	308305.9	4608
4	6144	-4608	12800	-6144	4608	25600

Glob. VPKS Glob. VSKS Glob. VKS Lok. VKS Uzlové zat.

	$R_{2,3}$	$r_{2,3}$	$k_{2,3} \cdot r_{2,3}$	$R_{2,3}$	$R'_{2,3}$	S
1	0	-1.3E-05	21.64909	21.64909	25.71521	0
2	-10	9.76E-05	25.90719	15.90719	-7.77496	4
3	5	0.000138	4.549807	9.549807	9.549807	0
0	0	0	-21.6491	-21.6491	-41.7152	0
0	-10	0	-25.9072	-35.9072	-4.22504	3
4	-5	0.000121	4.325	-0.675	-0.675	-0.675

Matice tuhosti konstrukce K

	1	2	3	4
1	702445.2	72203.42	10098.33	6144
2	72203.42	360595	8573.096	-4608
3	10098.33	8573.096	73491.31	12800
4	6144	-4608	12800	25600

Zař. vektor

	$F=S-R$
1	-8.9E-16
2	34.88061
3	12.40051
4	4.325

-8.9E-16
34.88061
12.40051

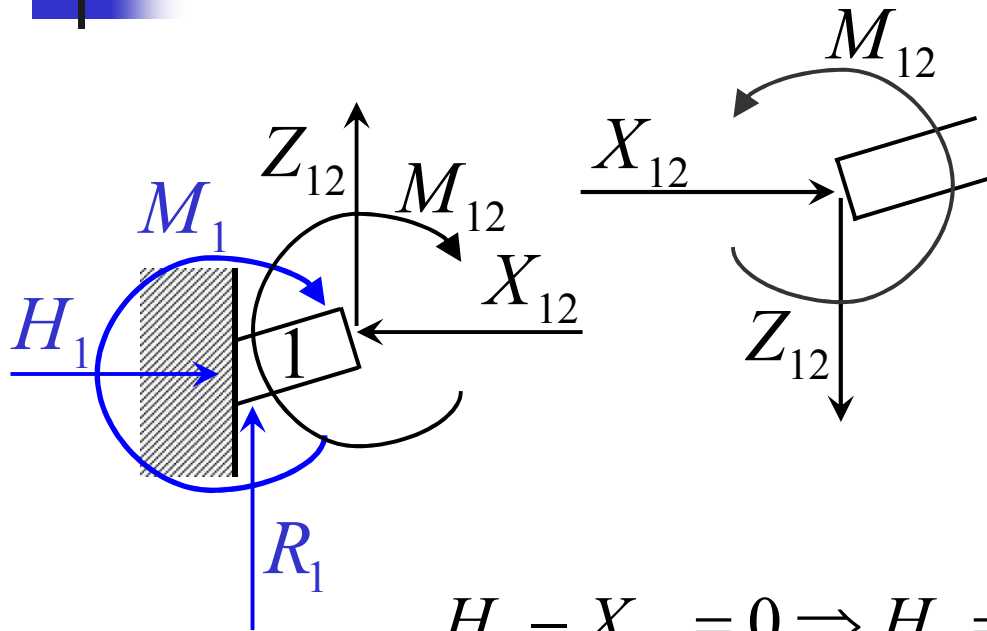
Inverovaná matice konstrukce K^{-1}

	1	2	3	4
1	1.46E-06	-2.9E-07	-1.1E-07	-3.5E-07
2	-2.9E-07	2.85E-06	-4.3E-07	8E-07
3	-1.1E-07	-4.3E-07	1.5E-05	-7.5E-06
4	-3.5E-07	8E-07	-7.5E-06	4.31E-05

Param. defor.

1	-1.3E-05
2	9.76E-05
3	0.000138
4	0.000121

Příklad 3, podmínky rovnováhy a reakce ve styčnicku 1

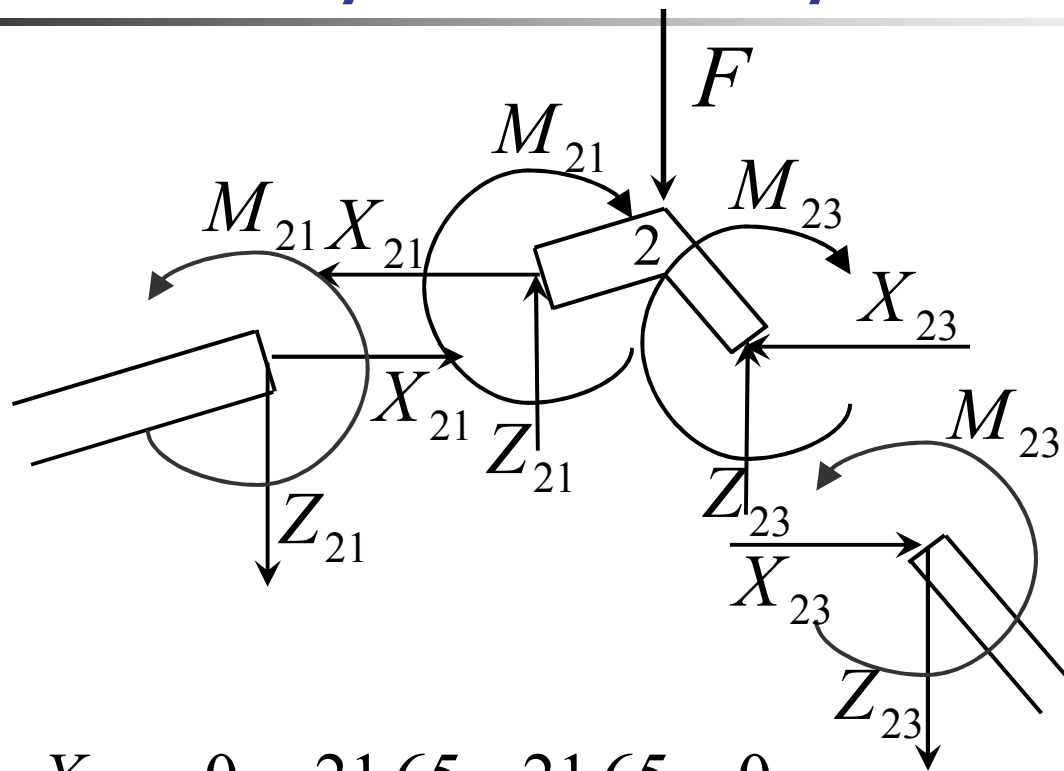


$$H_1 - X_{12} = 0 \Rightarrow H_1 = X_{12} = 21,65 \text{ kN}$$

$$-R_1 - Z_{12} = 0 \Rightarrow R_1 = -Z_{12} = 29,85 \text{ kN}$$

$$-M_1 - M_{12} = 0 \Rightarrow M_1 = -M_{12} = -21,94 \text{ kNm}$$

Příklad 3, podmínky rovnováhy ve styčnicku 2



$$-X_{21} - X_{23} = 0 \dots 21,65 - 21,65 = 0$$

$$F - Z_{23} - Z_{21} = 0 \dots 4 + 11,91 - 15,91 = 0$$

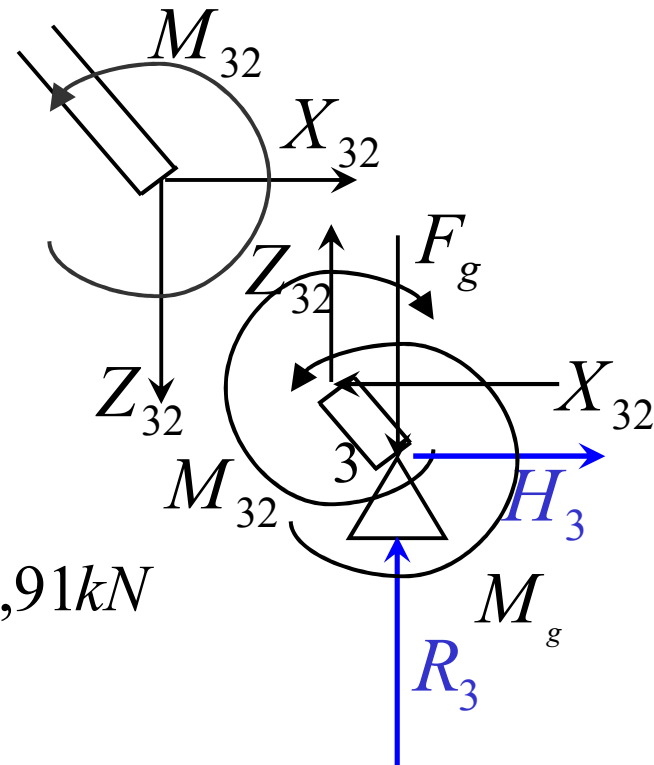
$$-M_{21} - M_{23} = 0 \dots 9,55 - 9,55 = 0$$

Příklad 3, podmínky rovnováhy a reakce ve styčnicku 3

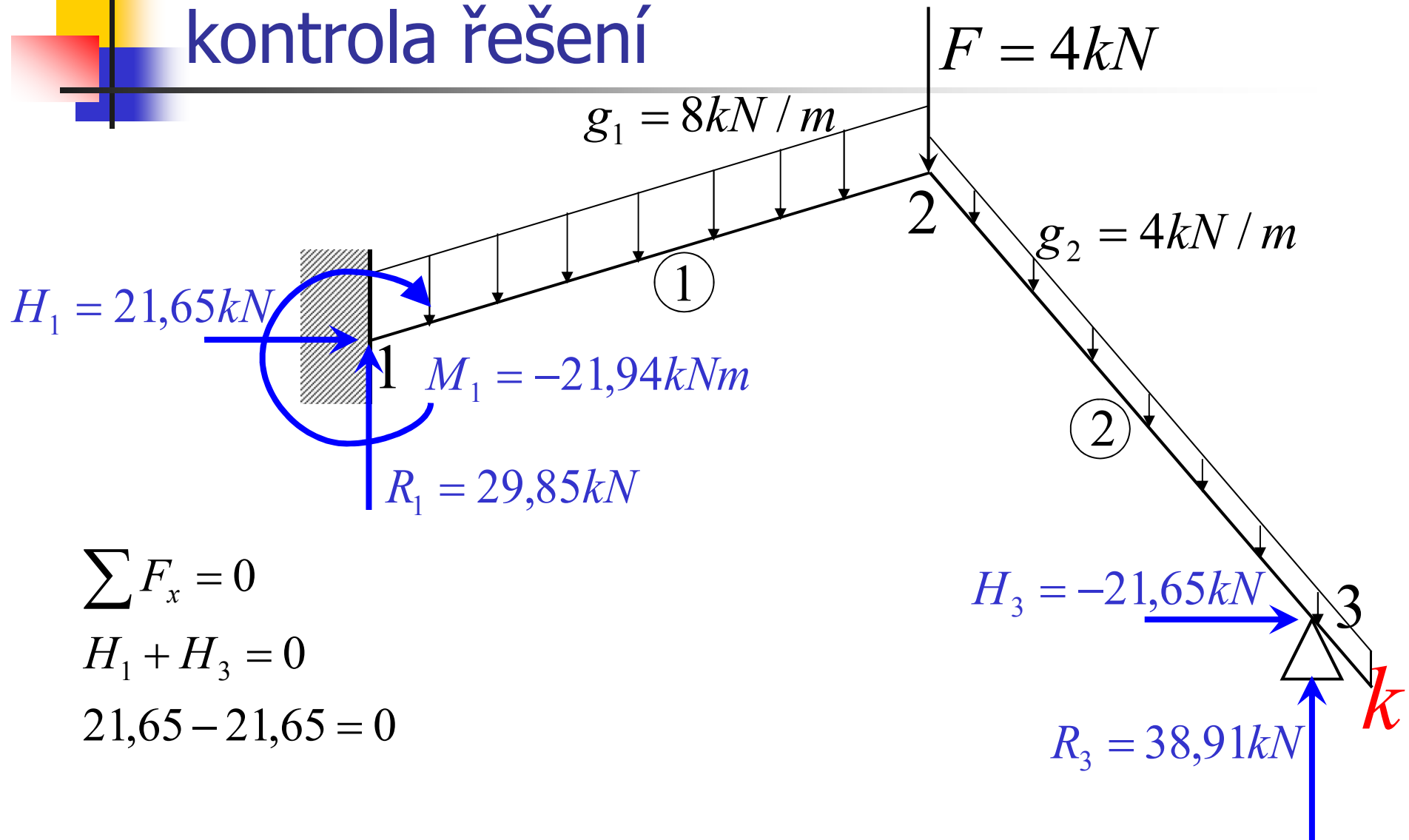
$$H_3 - X_{32} = 0 \Rightarrow H_3 = X_{32} = -21,65 \text{ kN}$$

$$-R_3 - Z_{32} + F_g = 0 \Rightarrow R_3 = -Z_{32} + F_g = 38,91 \text{ kN}$$

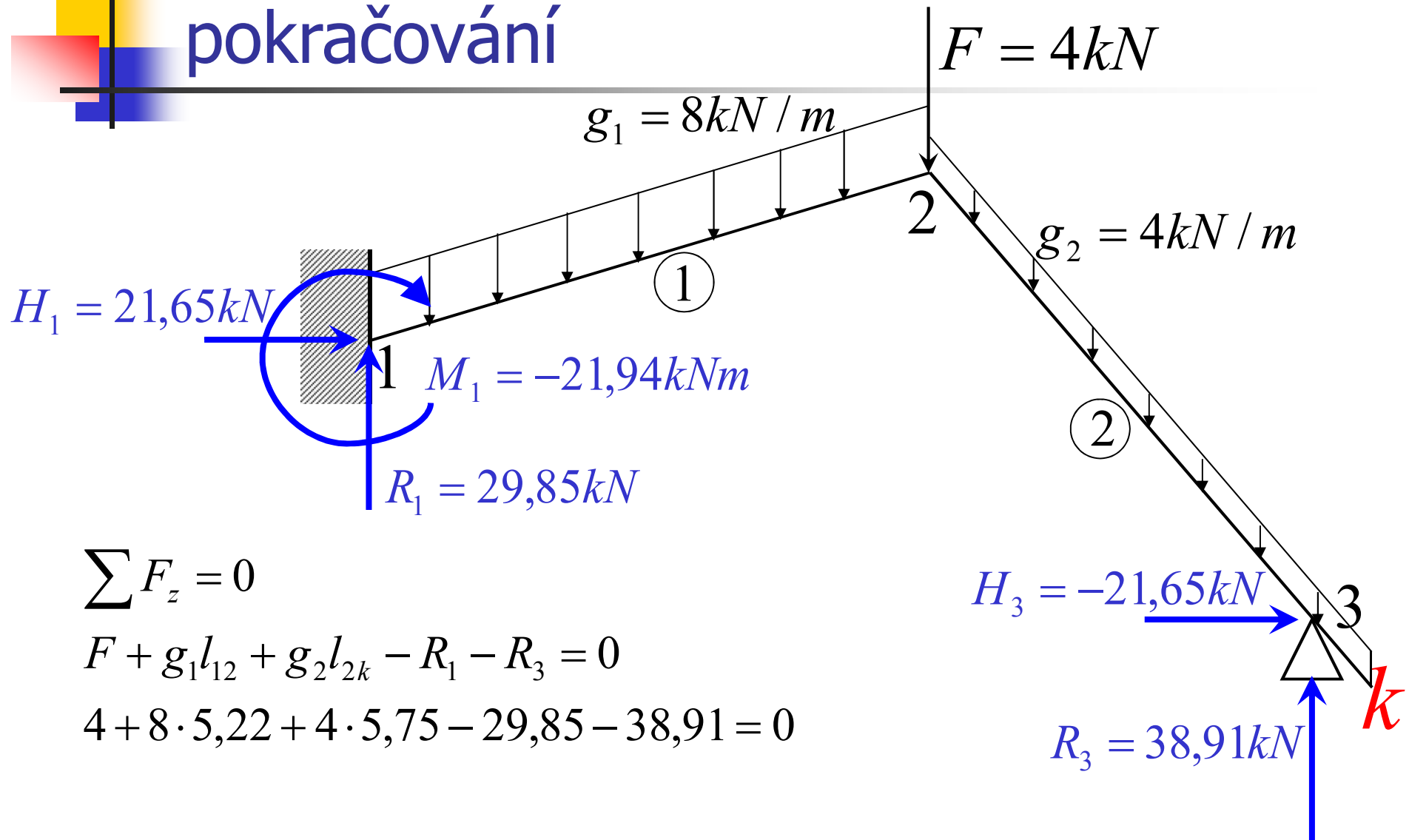
$$-M_{32} + M_g = 0 \dots 0,675 - 0,675 = 0$$



Příklad 3, kontrola řešení



Příklad 3, kontrola řešení pokračování

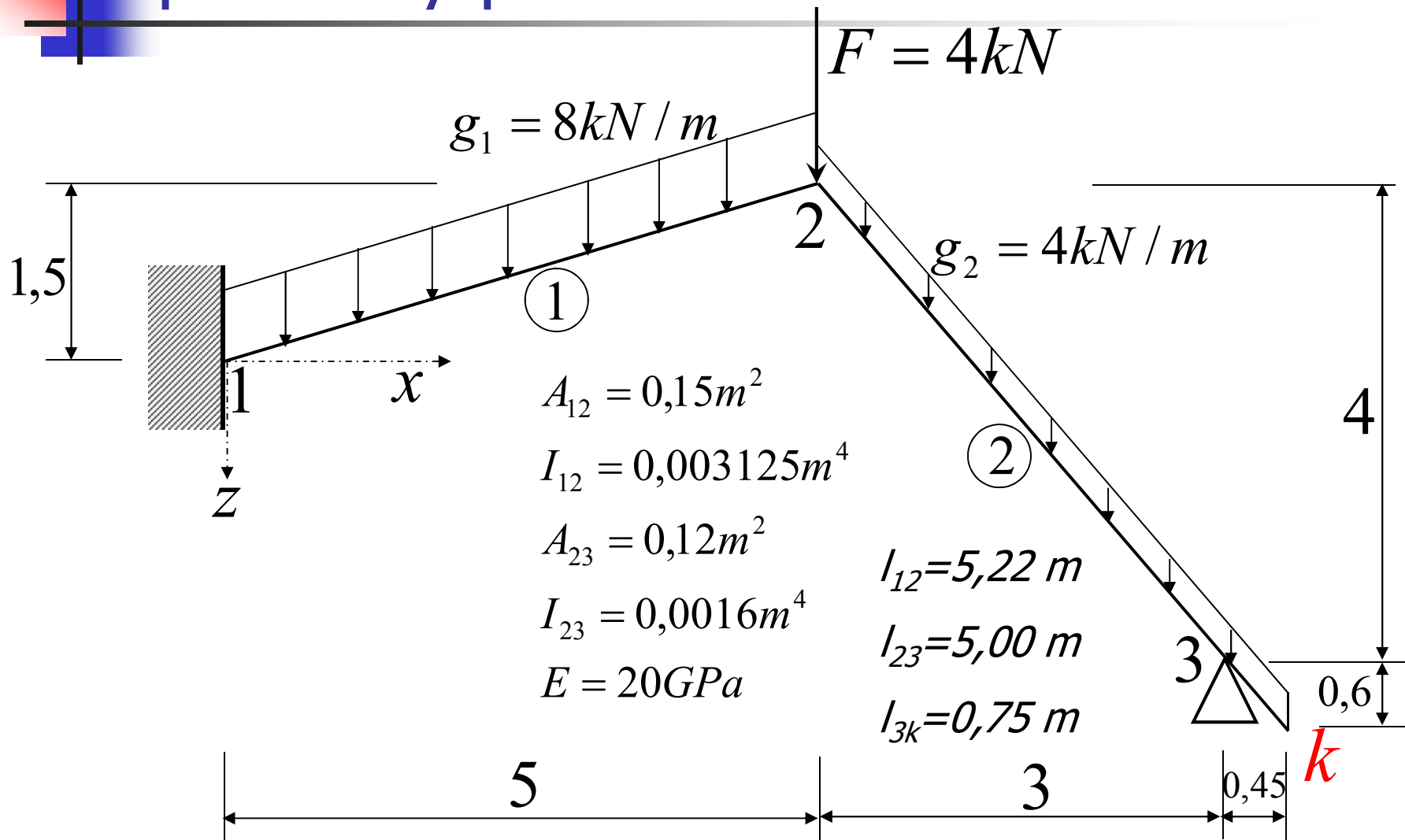


$$\sum F_z = 0$$

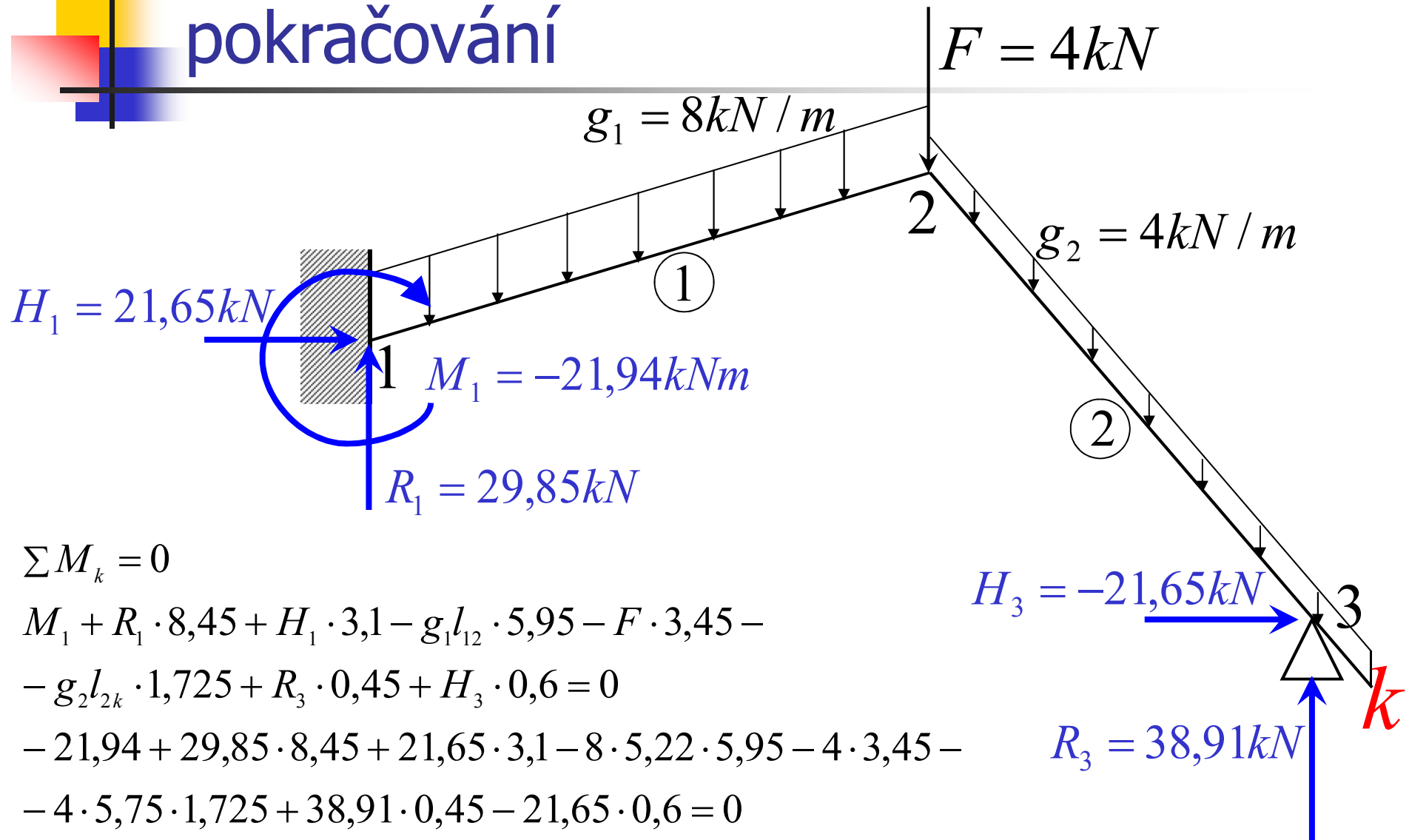
$$F + g_1 l_{12} + g_2 l_{2k} - R_1 - R_3 = 0$$

$$4 + 8 \cdot 5,22 + 4 \cdot 5,75 - 29,85 - 38,91 = 0$$

Příklad 3 – kosoúhlý rám, podklady pro kontrolu



Příklad 3, kontrola řešení pokračování



$$\sum M_k = 0$$

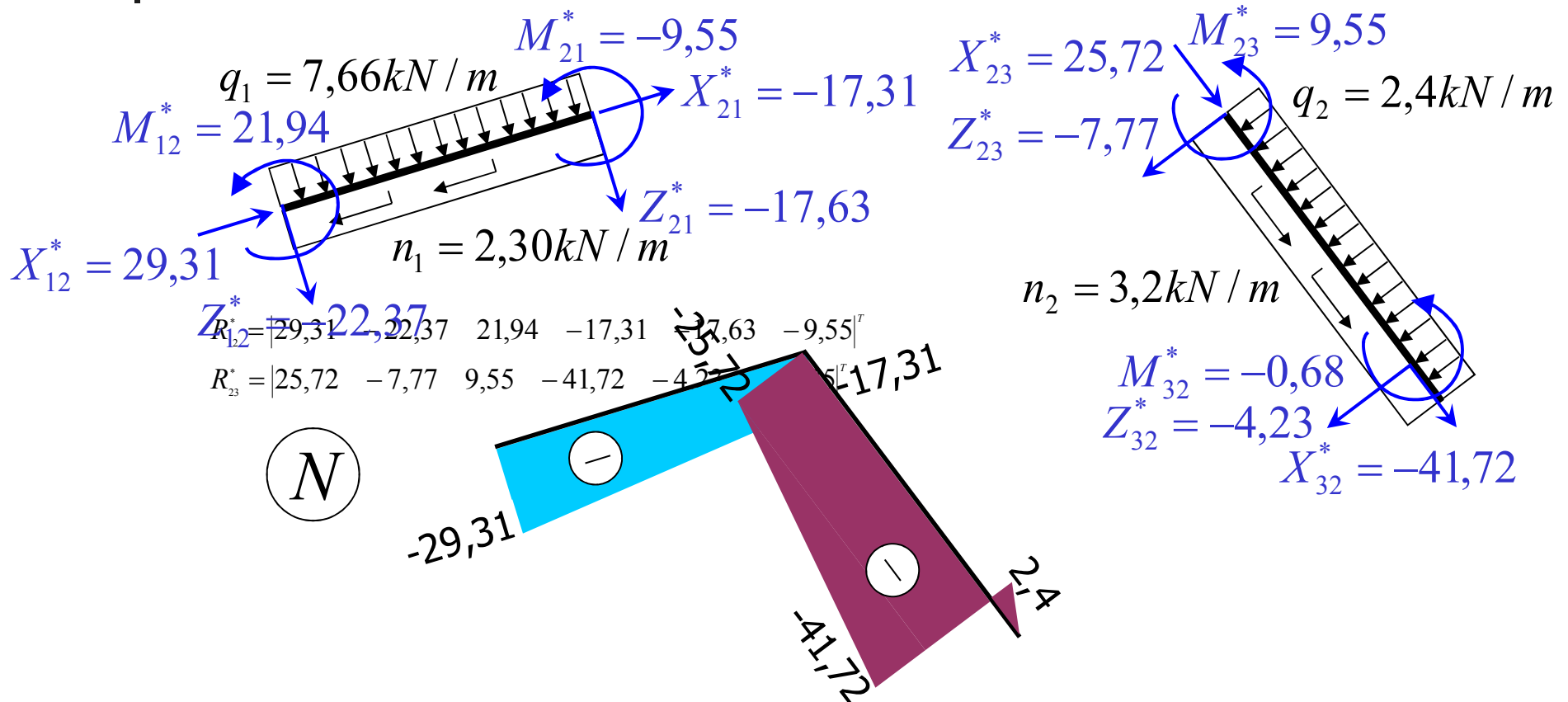
$$M_1 + R_1 \cdot 8,45 + H_1 \cdot 3,1 - g_1 l_{12} \cdot 5,95 - F \cdot 3,45 -$$

$$- g_2 l_{2k} \cdot 1,725 + R_3 \cdot 0,45 + H_3 \cdot 0,6 = 0$$

$$- 21,94 + 29,85 \cdot 8,45 + 21,65 \cdot 3,1 - 8 \cdot 5,22 \cdot 5,95 - 4 \cdot 3,45 -$$

$$- 4 \cdot 5,75 \cdot 1,725 + 38,91 \cdot 0,45 - 21,65 \cdot 0,6 = 0$$

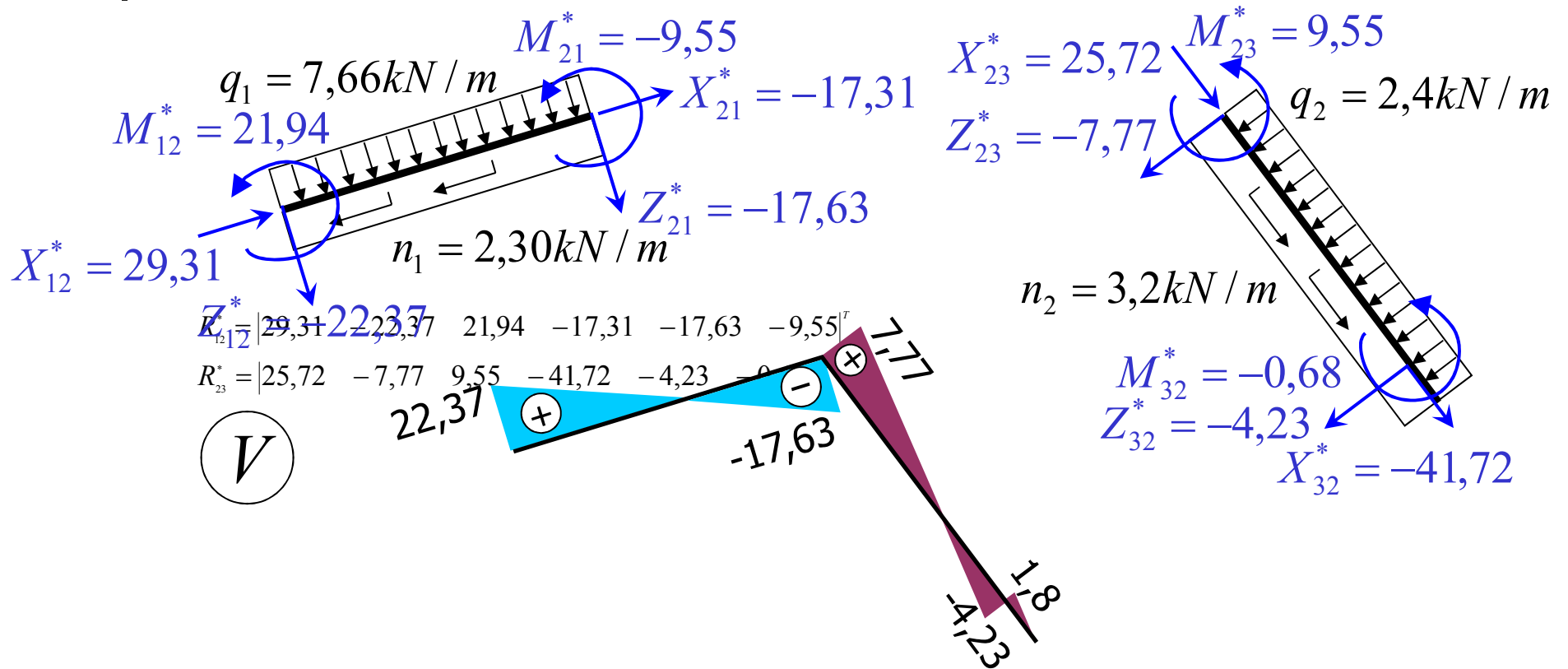
Příklad 3 – vnitřní síly - N



$$R_{12}^* = \begin{bmatrix} 29,31 & -22,37 & 21,94 & -17,31 & -17,63 & -9,55 \end{bmatrix}^T$$

$$R_{23}^* = \begin{bmatrix} 25,72 & -7,77 & 9,55 & -41,72 & -4,23 & -0,675 \end{bmatrix}^T$$

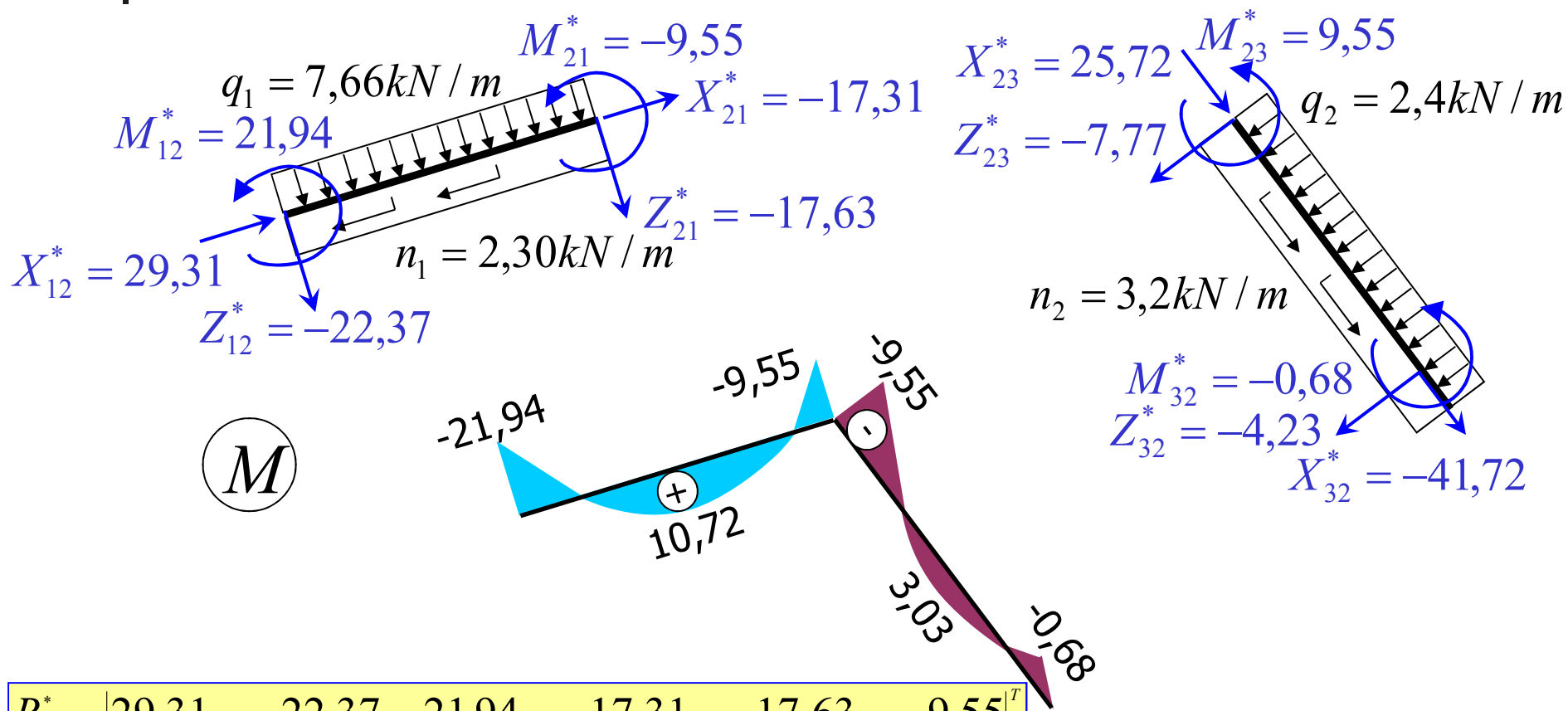
Příklad 3 – vnitřní síly - V



$$R_{12}^* = \begin{bmatrix} 29,31 & -22,37 & 21,94 & -17,31 & -17,63 & -9,55 \end{bmatrix}^T$$

$$R_{23}^* = \begin{bmatrix} 25,72 & -7,77 & 9,55 & -41,72 & -4,23 & -0,675 \end{bmatrix}^T$$

Příklad 3 – vnitřní síly - M

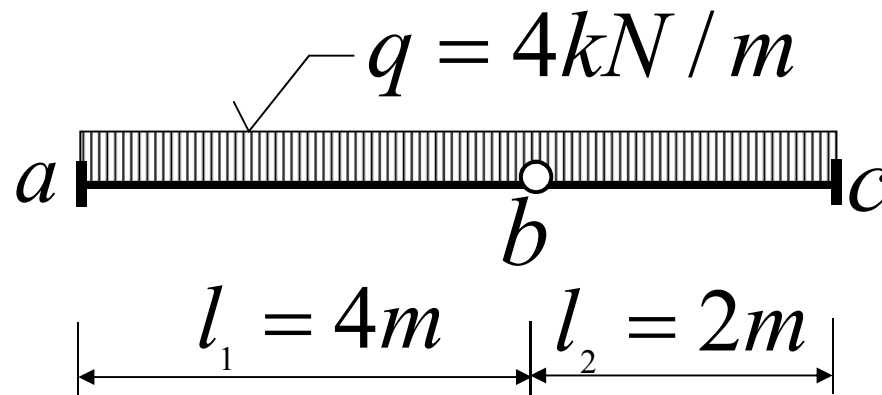


$$R_{12}^* = \begin{vmatrix} 29,31 & -22,37 & 21,94 & -17,31 & -17,63 & -9,55 \end{vmatrix}^T$$

$$R_{23}^* = \begin{vmatrix} 25,72 & -7,77 & 9,55 & -41,72 & -4,23 & -0,675 \end{vmatrix}^T$$

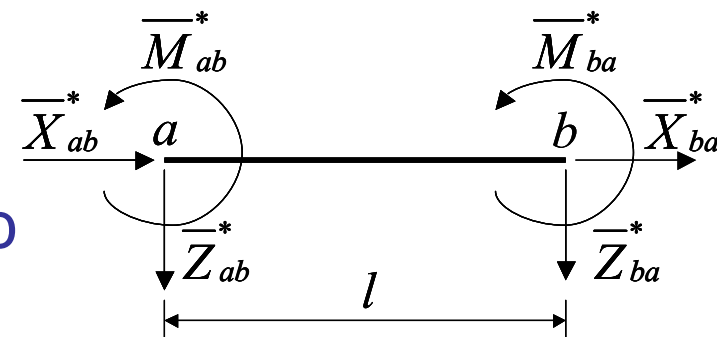
Testovací příklad 3

- Stanovte s využitím ODM svislý posun kloubu w_b .

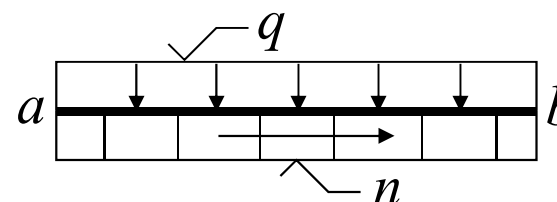


$$EI = 2 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

Primární vektory koncových sil prutu konstantního a neměnného průřezu



a) Plné spojité zatížení

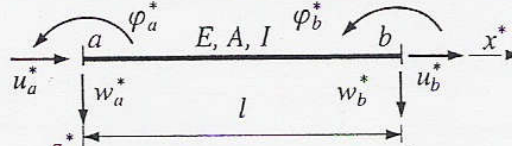


	Připojení prutu			
$\overline{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{ab}^* \\ \overline{Z}_{ab}^* \\ \overline{M}_{ab}^* \\ \overline{X}_{ba}^* \\ \overline{Z}_{ba}^* \\ \overline{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -5ql/8 \\ ql^2/8 \\ -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -5ql/8 \\ -ql^2/8 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu [1]

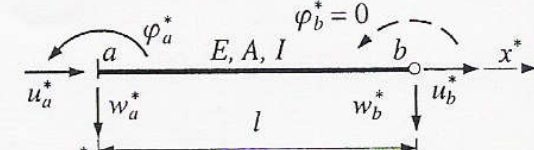
Tabulka 11.3. Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený



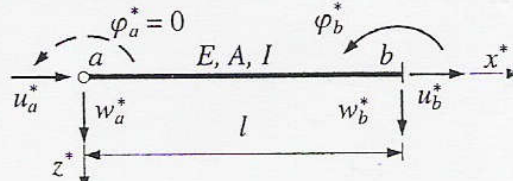
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený



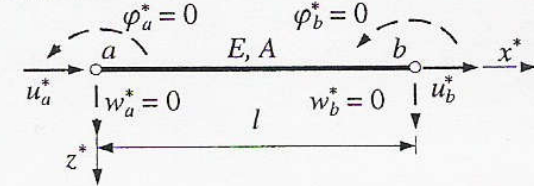
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený

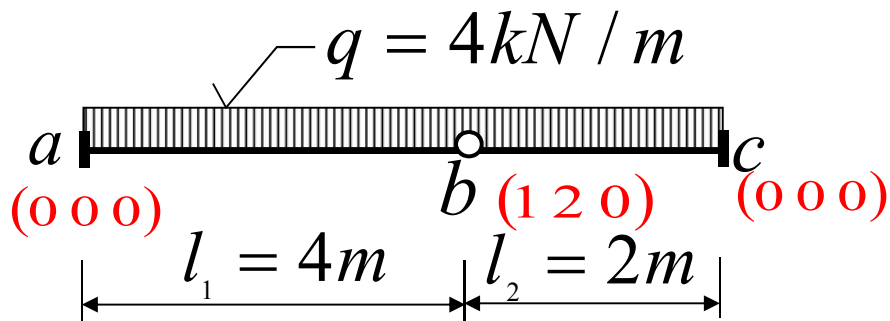


$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Použitá literatura

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J., Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Učebnice, druhé vydání. VUTIUM, Brno 2004.



$$\bar{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5ql/8 \\ ql^2/8 \\ 0 \\ -3ql/8 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 8 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\bar{R}_{bc}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3ql/8 \\ ql^2/8 \\ 0 \\ -5ql/8 \\ -ql^2/8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

$$k_{bc}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$K \cdot r = F \quad (F = S - \bar{R})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{4} + \frac{EA}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{4^3} + \frac{3EI}{2^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{3EI}{64} + \frac{3EI}{8} \right) \cdot w_b = -(-9)$$

$$w_b = \frac{576}{27EI} = 0,01066 \text{ m}$$