



Téma 10

Obecná deformační metoda – analýza prutové soustavy

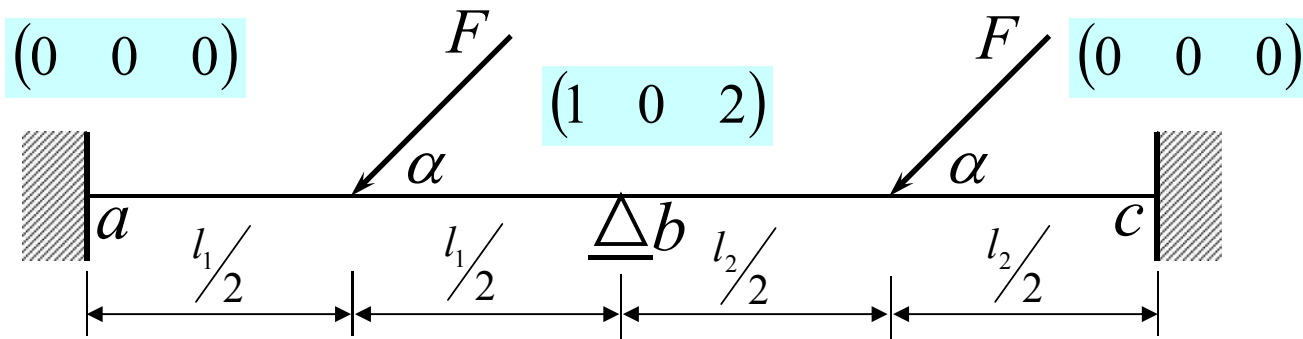
- Analýza prutové soustavy
- Globální matice tuhosti a zatěžovací vektor nosníků
- Řešení soustavy rovnic
- Výpočet koncových sil, reakcí a složek vnitřních sil
- Výpočet deformací prutů



Základní postup u deformační metody

1. Určí se stupeň přetvárné neurčitosti (odpovídá počtu neznámých přetvoření a řešených rovnic)
2. Vypočtou se primární koncové síly každého prutu
3. Sestaví se podmínky rovnováhy v uzlech (koncové síly prutů – sekundární – se vyjádří pomocí parametrů deformace)
4. Řešením rovnic se určí parametry deformace (pootočení, posunutí)
5. Parametry deformace umožňují vypočítat sekundární koncové síly
6. Vypočtou se celkové koncové síly v uzlech jako součet primárních a sekundárních koncových sil a z nich reakce a složky vnitřních sil v jednotlivých prutech
7. Proveďte se kontrola správnosti řešení pomocí tří statických podmínek rovnováhy celku

Řešení nosníku, příklad 1, určení n_p



$$u_a = w_a = \varphi_a = 0$$

$$u_b \neq 0 \quad w_b = 0 \quad \varphi_b \neq 0 \dots l_1 \neq l_2$$

$$u_c = w_c = \varphi_c = 0$$

Přetvárná neurčitost:

$$n_p = 2(u_b, \varphi_b) \dots l_1 \neq l_2$$

Globální vektor parametrů deformace:

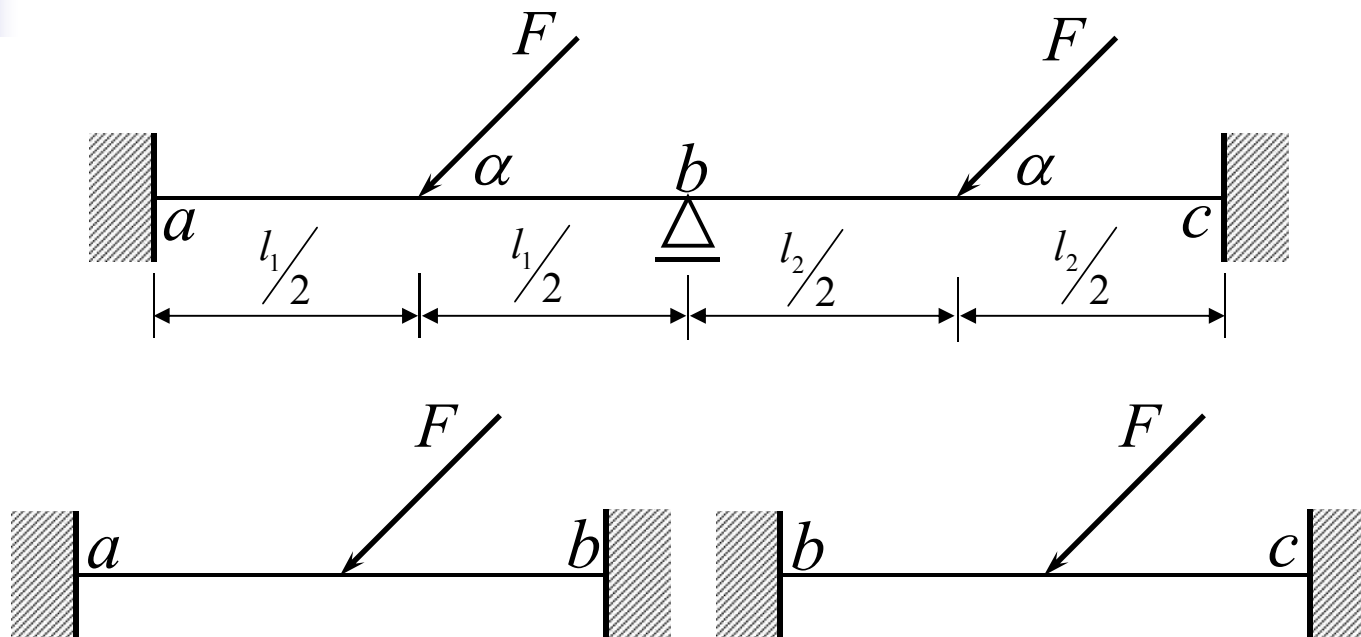
$$r = \begin{Bmatrix} u_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

V místech nenulových kódových čísel sestavujeme odpovídající podmínky rovnováhy

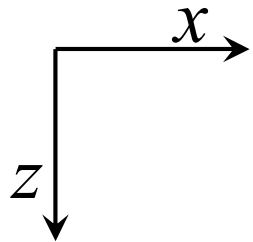
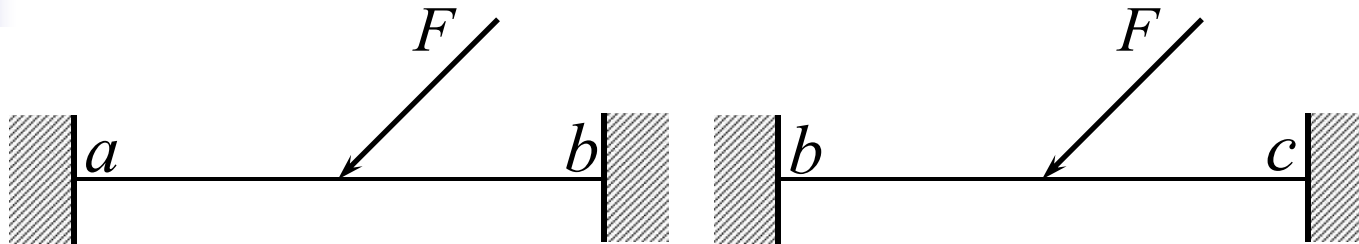
V daném případě: $\sum F_{xb} = 0, \quad \sum M_b = 0$

Lokalizační index (kódové číslo)

Příklad 1, primární stav

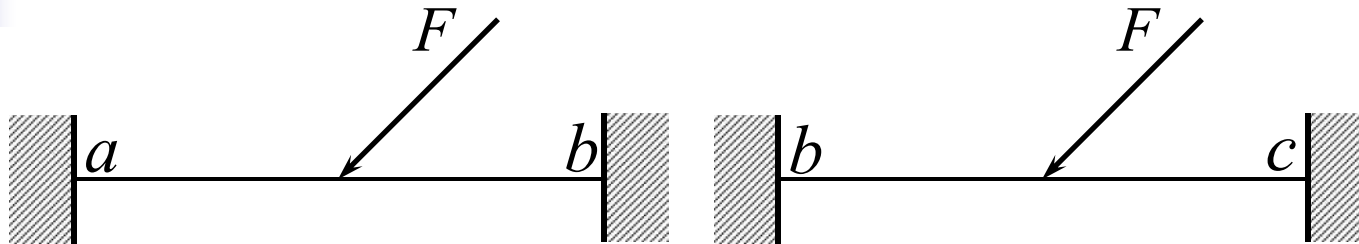


Příklad 1, primární stav pokračování

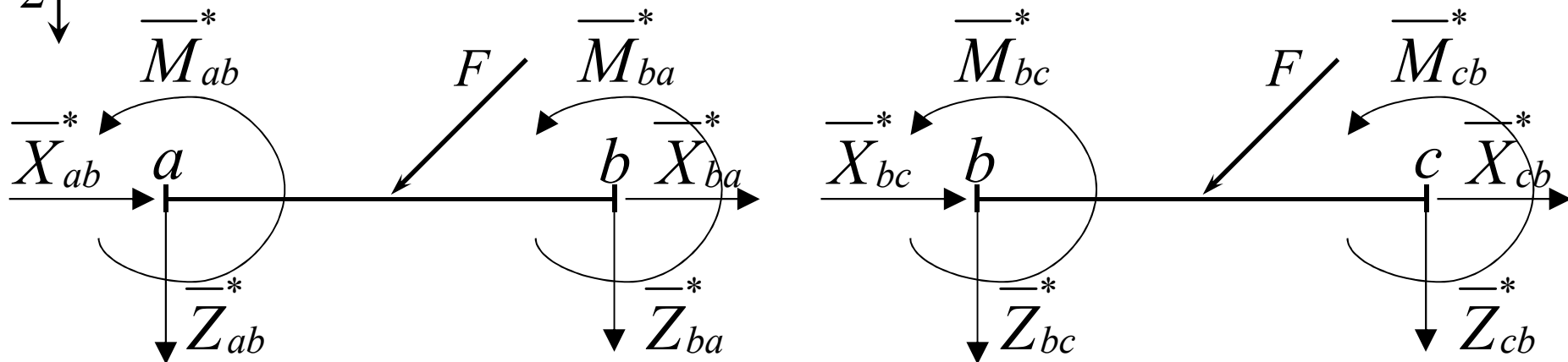


Zvolíme souřadný systém
(pro nosník LSS a GSS stejný)

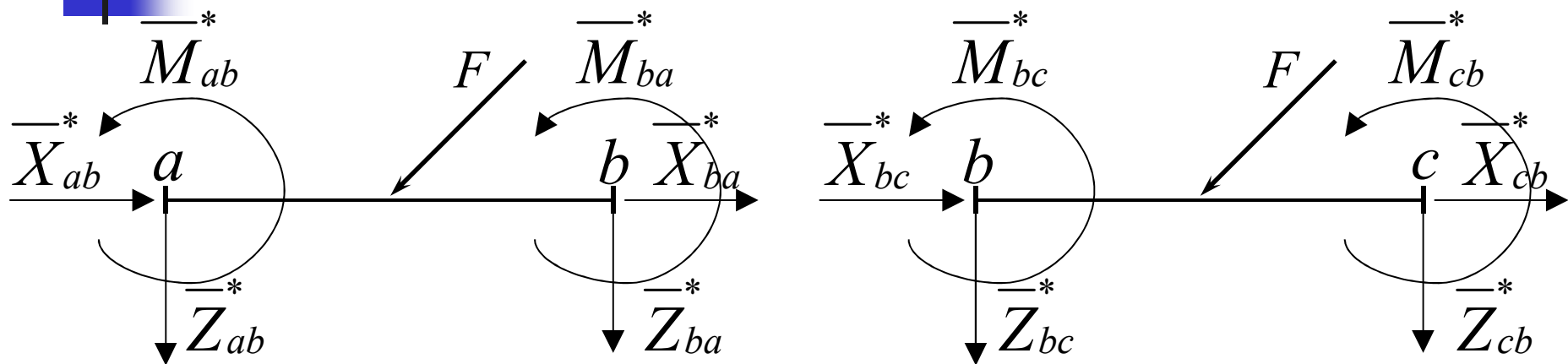
Příklad 1, primární stav pokračování



V rovinné konstrukci 3 složky vnitřních sil,
na každém konci prutu 3 koncové síly



Příklad 1, primární stav pokračování



Primární koncové síly odečteme z tabulky 11.2 [1] nebo řešíme silovou metodou

$$\overline{X}_{ab}^* = \frac{F_x}{2} \quad \overline{X}_{ba}^* = \frac{F_x}{2}$$

$$\overline{Z}_{ab}^* = -\frac{F_z}{2} \quad \overline{Z}_{ba}^* = -\frac{F_z}{2}$$

$$\overline{M}_{ab}^* = \frac{1}{8} F_z l_1 \quad \overline{M}_{ba}^* = -\frac{1}{8} F_z l_1$$

$$\overline{X}_{bc}^* = \frac{F_x}{2} \quad \overline{X}_{cb}^* = \frac{F_x}{2}$$

$$\overline{Z}_{bc}^* = -\frac{F_z}{2} \quad \overline{Z}_{cb}^* = -\frac{F_z}{2}$$

$$\overline{M}_{bc}^* = \frac{1}{8} F_z l_2 \quad \overline{M}_{cb}^* = -\frac{1}{8} F_z l_2$$



Příklad 1, sekundární stav

- Výpočet sekundárních koncových sil lze provést dle vztahů

$$\hat{R}_{ab}^* = k_{ab}^* \cdot r_{ab}^* = k_{ab}^* \cdot \{0 \quad 0 \quad 0 \quad u_b \quad 0 \quad \varphi_b\}^T$$

$$\hat{R}_{bc}^* = k_{bc}^* \cdot r_{bc}^* = k_{bc}^* \cdot \{u_b \quad 0 \quad \varphi_b \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

r_{ab}^*, r_{bc}^* ... lokální vektory parametrů deformace prutů a-b, b-c

k_{ab}^*, k_{bc}^* ... matice tuhosti prutů, lze určit z tab. 11.3 [1]

Globální parametry deformace prutů a-b, b-c

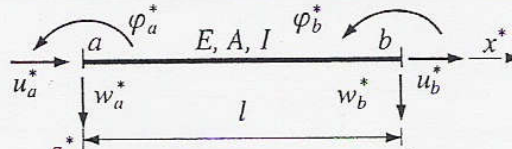
$$r_{ab} = r_{ab}^* = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad u_b \quad 0 \quad \varphi_b\}^T$$

$$r_{bc} = r_{bc}^* = \{u_b \quad 0 \quad \varphi_b \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu [1]

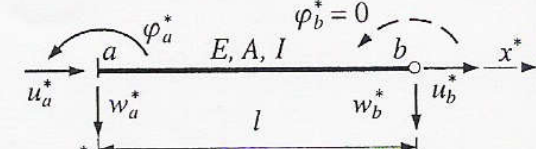
Tabulka 11.3. Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený



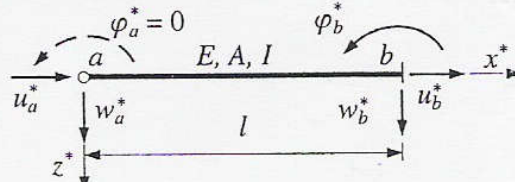
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený



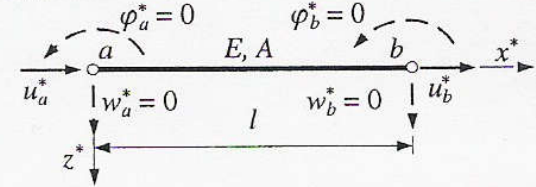
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený



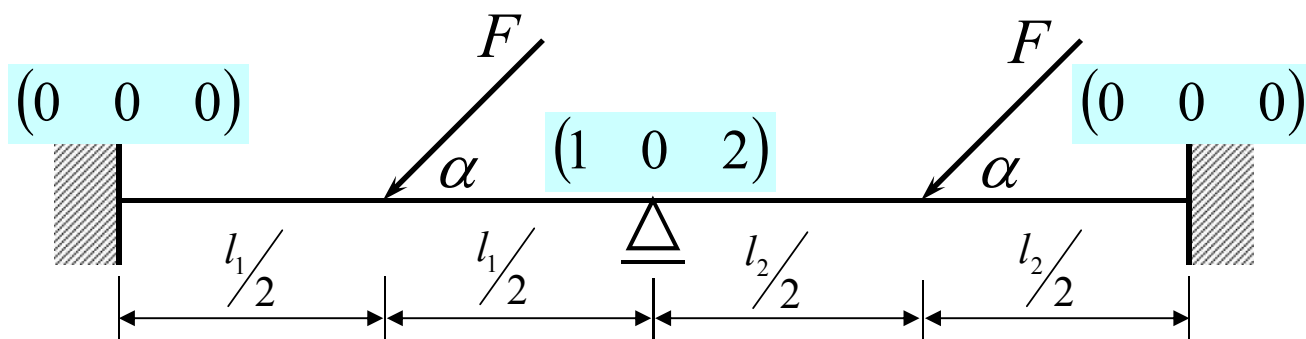
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 1, kódová čísla prutů

Šestice čísel, které jednoznačně přiřazují globální parametry deformace koncům prutu.

Prut a-b ... (0, 0, 0, 1, 0, 2)

Prut b-c ... (1, 0, 2, 0, 0, 0)



Příklad 1, sestavení matice tuhosti

$$K = k_{ab} + k_{bc}$$

$$k_{ab} = \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \end{array}$$

$$k_{bc} = \begin{array}{cccccc|c} \bullet & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \bullet & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{array}$$

$$K = \begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \\ * & * & \mathbf{1} \\ * & * & \mathbf{2} \end{array} + \begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \\ \bullet & \bullet & \mathbf{1} \\ \bullet & \bullet & \mathbf{2} \end{array}$$

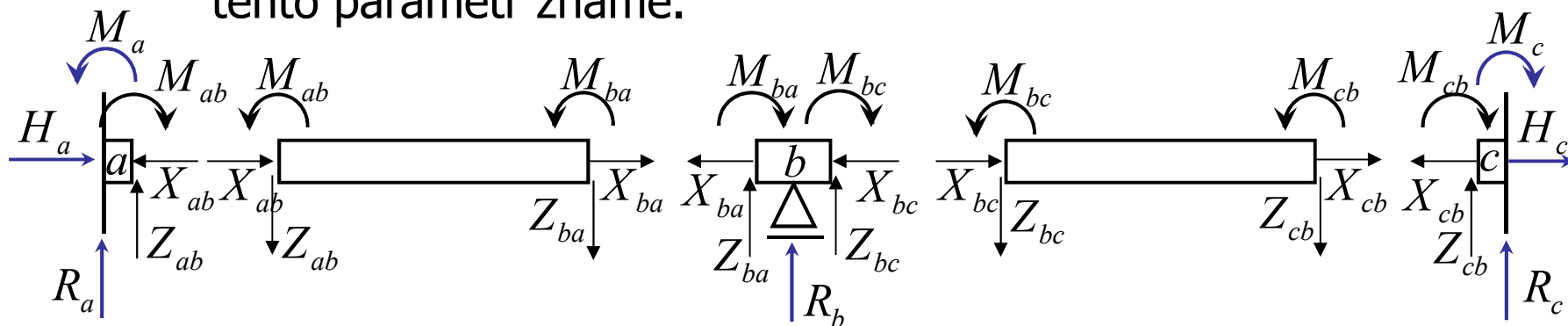
Příklad 1, podmínky rovnováhy

- Ve styčnicku b musí být splněny 3 podmínky rovnováhy:
- Pro výpočet u_b a φ_b potřebujeme podmínky 1) a 3).
- Podmínku 2) nevyužijeme, neboť $w_b=0$, tento parametr známe.

$$1) \sum F_{xb} = 0$$

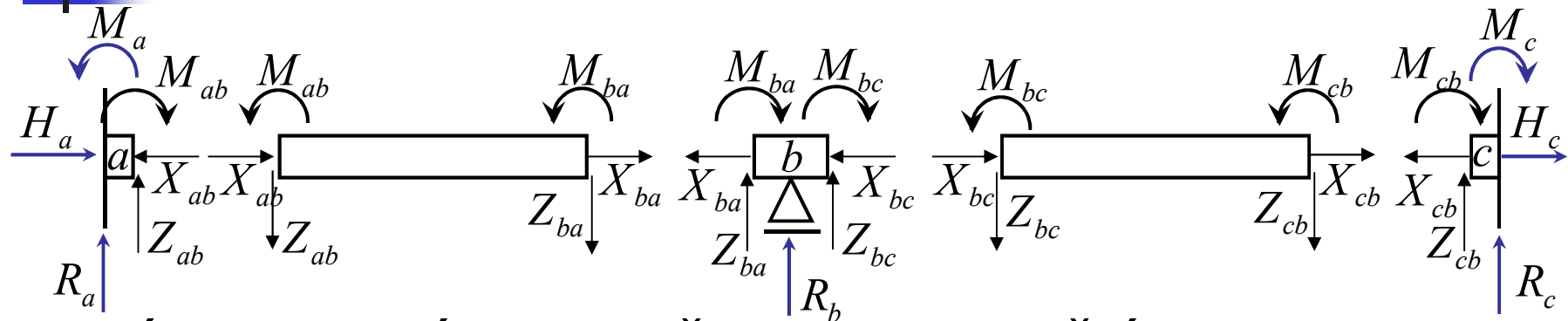
$$2) \sum F_{zb} = 0$$

$$3) \sum M_b = 0$$



Podmínky rovnováhy sestavujeme tam, kde jsou kódová čísla nenulová. V našem případě k.č. 1 odpovídá $\sum F_{xb}$ a k.č. 2 odpovídá $\sum M_b$.

Příklad 1, podmínky rovnováhy ($n_p=2$)



Podmínka rovnováhy ve směru osy x ve styčnicku b:

$$\sum F_{xb} = 0 \dots -X_{ba} - X_{bc} = 0$$

Primární koncové síly $\overline{X}_{ba} = \frac{F_x}{2}$ a $\overline{X}_{bc} = \frac{F_x}{2}$ nezajistí rovnováhu.

Musí zde působit **sekundární koncové síly**, které jsou funkcí přetvoření konců prutů.

$$X_{ab} = \overline{X}_{ab} + \hat{X}_{ab}$$

$$X_{ba} = \overline{X}_{ba} + \hat{X}_{ba}$$



Příklad 1, výpočet parametru deformace u_b

Po dosazení do podmínky rovnováhy v ose x:

$$-X_{ba} - X_{bc} = 0$$

$$-\bar{X}_{ba} - \hat{X}_{ba} - \bar{X}_{bc} - \hat{X}_{bc} = 0$$

$$-\frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l_1} u_b - \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l_2} u_b = 0$$

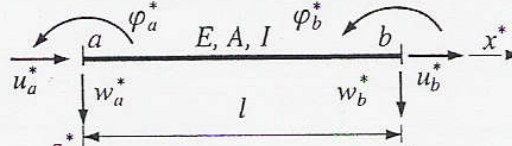
$$-u_b \left(\frac{EA}{l_1} + \frac{EA}{l_2} \right) = F_x \Rightarrow u_b = -\frac{F_x l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)}$$

Parametr deformace u_b využijeme pro výpočet koncových sil působících ve směru osy x.

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu [1]

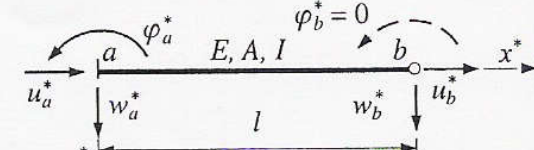
Tabulka 11.3. Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený



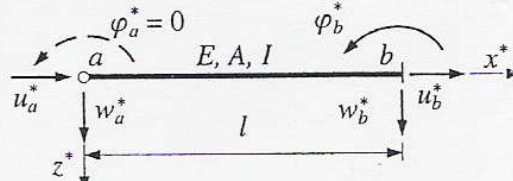
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený



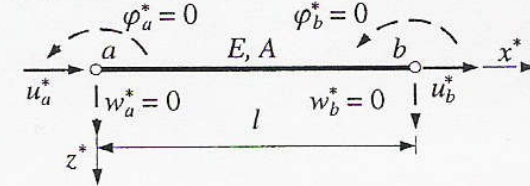
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 1, výpočet parametru deformace φ_b

- Z momentové podmínky pro styčník b vyplývá:

$$-M_{ba} - M_{bc} = 0$$

$$-\overline{M}_{ba} - \hat{M}_{ba} - \overline{M}_{bc} - \hat{M}_{bc} = 0$$

$$\overline{M}_{ba} = -\frac{Fl_{z1}}{8} \quad \overline{M}_{bc} = \frac{Fl_{z2}}{8} \quad \hat{M}_{ba} = 4\frac{EI}{l_1}\varphi_b \quad \hat{M}_{bc} = 4\frac{EI}{l_2}\varphi_b$$

$$-\frac{Fl_{z1}}{8} + \frac{Fl_{z2}}{8} + 4\frac{EI}{l_1}\varphi_b + 4\frac{EI}{l_2}\varphi_b = 0 \Rightarrow \varphi_b = F_z \frac{l_1^2 l_2 - l_1 l_2^2}{32EJ(l_1 + l_2)}$$

Parametr deformace φ_b využijeme pro výpočet:

- a) sekundárních koncových momentů
- b) sekundárních koncových sil ve směru osy z.



Příklad 1, výpočet koncových sil a reakcí ve směru osy x

Koncové síly

$$X_{ab} = \bar{X}_{ab} + \hat{X}_{ab} = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l_1} u_b = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l_1} \left(-\frac{F_x l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)} \right) = F_x \frac{l_1 + 3l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

$$X_{ba} = \bar{X}_{ba} + \hat{X}_{ba} = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l_1} u_b = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l_1} \left(-\frac{F_x l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)} \right) = F_x \frac{l_1 - l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

$$X_{bc} = \bar{X}_{bc} + \hat{X}_{bc} = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l_2} u_b = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l_2} \left(-\frac{F_x l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)} \right) = -F_x \frac{l_1 - l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

$$X_{cb} = \bar{X}_{cb} + \hat{X}_{cb} = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l_2} u_b = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l_2} \left(-\frac{F_x l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)} \right) = F_x \frac{3l_1 + l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

Reakce

$$H_a - X_{ab} = 0 \Rightarrow H_a = X_{ab} = F_x \frac{l_1 + 3l_2}{2(l_1 + l_2)} (\rightarrow)$$

$$H_c - X_{cb} = 0 \Rightarrow H_c = X_{cb} = F_x \frac{3l_1 + l_2}{2(l_1 + l_2)} (\rightarrow)$$

Příklad 1, výpočet koncových momentů

- Koncové momenty

$$M_{ab} = \overline{M}_{ab} + \hat{M}_{ab} = \frac{Fl_{z1}}{8} + \frac{2EJ}{l_1} \varphi_b = \frac{Fl_{z1}}{8} + \frac{2EJ}{l_1} \left(\frac{F_z(l_1^2 l_2 - ll_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = F_z \frac{2l_1^2 + 3ll_2 - l_2^2}{16(l_1 + l_2)}$$

$$M_{ba} = \overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = -\frac{Fl_{z1}}{8} + \frac{4EJ}{l_1} \varphi_b = -\frac{Fl_{z1}}{8} + \frac{4EJ}{l_1} \left(\frac{F_z(l_1^2 l_2 - ll_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = F_z \frac{-l_1^2 - l_2^2}{8(l_1 + l_2)}$$

$$M_{bc} = \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = \frac{Fl_{z2}}{8} + \frac{4EJ}{l_2} \varphi_b = \frac{Fl_{z2}}{8} + \frac{4EJ}{l_2} \left(\frac{F_z(l_1^2 l_2 - ll_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = F_z \frac{l_1^2 + l_2^2}{8(l_1 + l_2)}$$

$$M_{cb} = \overline{M}_{cb} + \hat{M}_{cb} = -\frac{Fl_{z2}}{8} + \frac{2EJ}{l_2} \varphi_b = -\frac{Fl_{z2}}{8} + \frac{2EJ}{l_2} \left(\frac{F_z(l_1^2 l_2 - ll_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = F_z \frac{l_1^2 - 3ll_2 - 2l_2^2}{16(l_1 + l_2)}$$

Příklad 1, výpočet koncových sil ve směru osy z.

Koncové síly

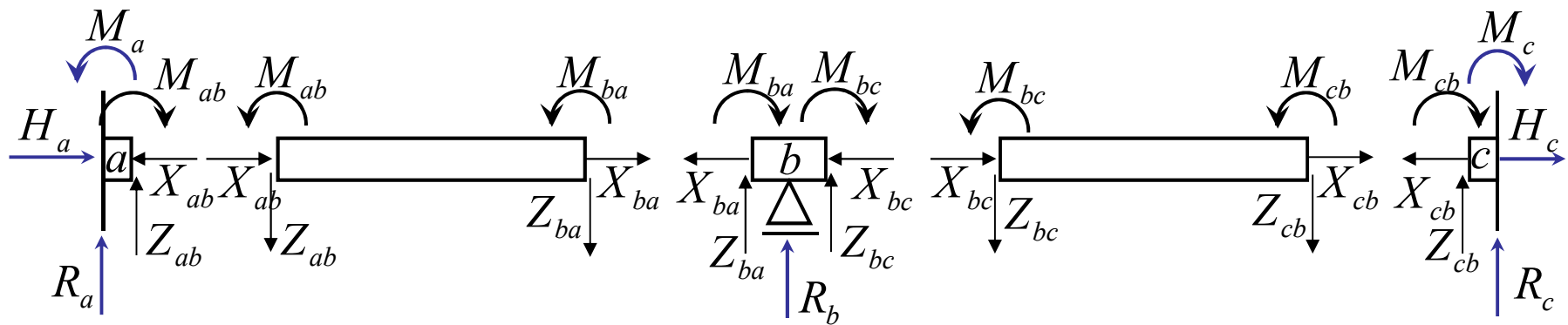
$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} + \hat{Z}_{ab} = -\frac{F_z}{2} - \frac{6EJ}{l_1^2} \varphi_b = -\frac{F_z}{2} - \frac{6EJ}{l_1^2} \left(\frac{F_z (l_1^2 l_2 - l_1 l_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = -F_z \frac{8l_1^2 + 11l_1 l_2 - 3l_2^2}{16l_1(l_1 + l_2)}$$

$$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \hat{Z}_{ba} = -\frac{F_z}{2} + \frac{6EJ}{l_1^2} \varphi_b = -\frac{F_z}{2} + \frac{6EJ}{l_1^2} \left(\frac{F_z (l_1^2 l_2 - l_1 l_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = -F_z \frac{8l_1^2 + 5l_1 l_2 + 3l_2^2}{16l_1(l_1 + l_2)}$$

$$Z_{bc} = \bar{Z}_{bc} + \hat{Z}_{bc} = -\frac{F_z}{2} - \frac{6EJ}{l_2^2} \varphi_b = -\frac{F_z}{2} - \frac{6EJ}{l_2^2} \left(\frac{F_z (l_1^2 l_2 - l_1 l_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = -F_z \frac{3l_1^2 + 5l_1 l_2 + 8l_2^2}{16l_2(l_1 + l_2)}$$

$$Z_{cb} = \bar{Z}_{cb} + \hat{Z}_{cb} = -\frac{F_z}{2} + \frac{6EJ}{l_2^2} \varphi_b = -\frac{F_z}{2} + \frac{6EJ}{l_2^2} \left(\frac{F_z (l_1^2 l_2 - l_1 l_2^2)}{32EJ(l_1 + l_2)} \right) = -F_z \frac{-3l_1^2 + 11l_1 l_2 + 8l_2^2}{16l_2(l_1 + l_2)}$$

Příklad 1, výpočet reakcí ve styčnicku *a*



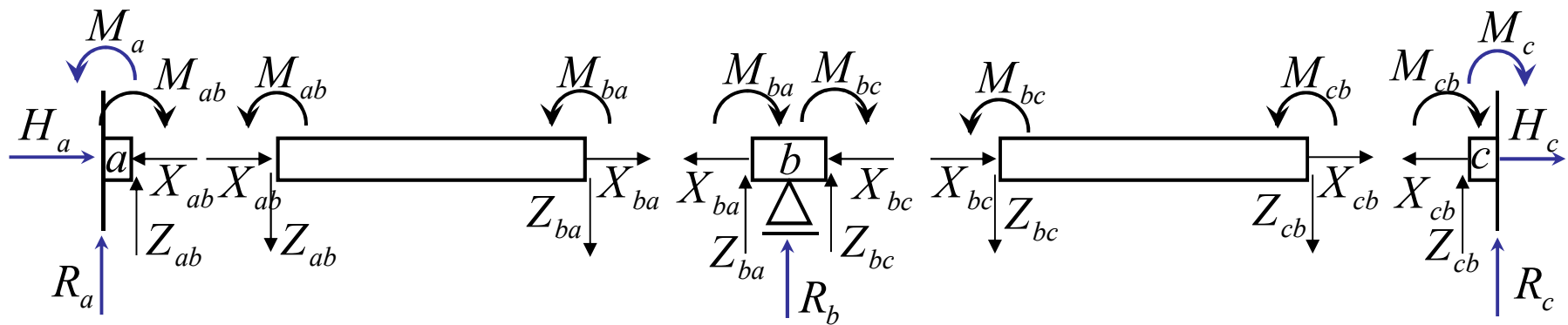
Ve styčnicku *a* platí:

$$H_a - X_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_a = X_{ab} = F_x \frac{l_1 + 3l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

$$-R_a - Z_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = -Z_{ab} = F_z \frac{8l_1^2 + 11l_1l_2 - 3l_2^2}{16l_1(l_1 + l_2)}$$

$$M_a - M_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_a = M_{ab} = F_z \frac{2l_1^2 + 3l_1l_2 - l_2^2}{16(l_1 + l_2)}$$

Příklad 1, výpočet reakcí ve styčnicku b



Ve styčnicku b platí:

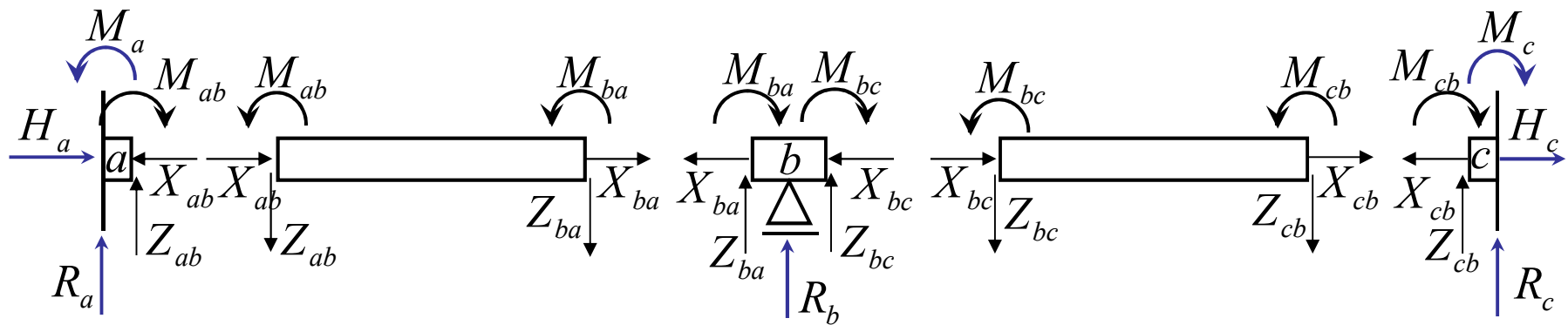
$$H_b - X_{ba} - X_{bc} = 0 \Rightarrow H_b = X_{ba} + X_{bc} = F_x \frac{l_1 - l_2}{2(l_1 + l_2)} - F_x \frac{l_1 - l_2}{2(l_1 + l_2)} = 0$$

$$-Z_{ba} - R_b - Z_{bc} = 0 \Rightarrow R_b = -Z_{ba} - Z_{bc}$$

$$R_b = F_z \frac{8l_1^2 + 5ll_2 + 3l_2^2}{16l_1(l_1 + l_2)} + F_z \frac{3l_1^2 + 5ll_2 + 8l_2^2}{16l_2(l_1 + l_2)} = F_z \frac{3l_1^3 + 13l_1^2l_2 + 13ll_2^2 + 3l_2^3}{16ll_2(l_1 + l_2)}$$

$$M_b - M_{ba} - M_{bc} = 0 \Rightarrow M_b = M_{ba} + M_{bc} = F_z \frac{-l_1^2 - l_2^2}{8(l_1 + l_2)} + F_x \frac{l_1^2 + l_2^2}{8(l_1 + l_2)} = 0$$

Příklad 1, výpočet reakcí ve styčnicku c



Ve styčnicku c platí:

$$H_c - X_{cb} = 0 \Rightarrow H_c = X_{cb} = F_x \frac{3l_1 + 3l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

$$-R_c - Z_{cb} = 0 \Rightarrow R_c = -Z_{cb} = F_z \frac{-3l_1^2 + 11l_1 l_2 + 8l_2^2}{16(l_1 + l_2)}$$

$$-M_c - M_{cb} = 0 \Rightarrow M_c = -\overline{M}_{cb} = F_z \frac{-l_1^2 + 3l_1 l_2 + 2l_2^2}{16(l_1 + l_2)}$$

Architektonické a konstrukční řešení



Capital Gate Tower, Abu Dhabi,
foto: <http://www.ctbuh.org/>

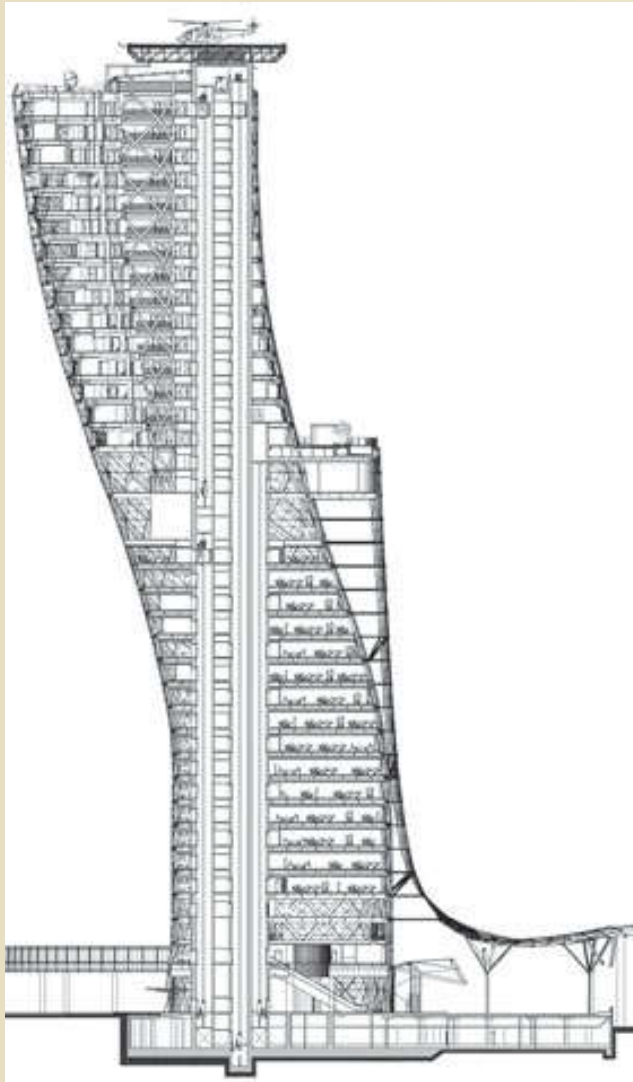
Řešení

- Dokončení: 2011
- Výška: 165 m (540 ft)
- Počet pater: 36
- Hotel / Kanceláře

Parametry

- Náklon 18°
- ŽB předpjaté jádro
- Ocelové nosníky
- Obvodový plášť – ocelové diafragma
- Založení: piloty (20-30 m)

Architektonické a konstrukční řešení



Kriteria

- firmitas – ANO;
 - Naklonění vyvolané vlastní tíhou převislé části vyrovnáno opačným náklonem jádra.
 - Vliv přetvoření fasády na deformaci výplní řešen pomocí diafragmata.
 - Stabilita proti překlopení zajištěna rozšířením suterénu založeným na pilotách.
- utilitas – ANO;
- venustas – ANO.

Capital Gate Tower, Abu Dhabi,
foto: <http://www.ctbuh.org/>

Architektonické a konstrukční řešení



Kriteria

- firmitas – ANO;
 - Naklonění vyvolané vlastní tíhou převislé části vyrovnáno opačným náklonem jádra.
 - Vliv přetvoření fasády na deformaci výplní řešen pomocí diafragmata.
 - Stabilita proti překlopení zajištěna rozšířením suterénu založeným na pilotách.
- utilitas – ANO;
- venustas – ANO.

Capital Gate Tower, Abu Dhabi,
foto: <http://www.ctbuh.org/>

Architektonické a konstrukční řešení

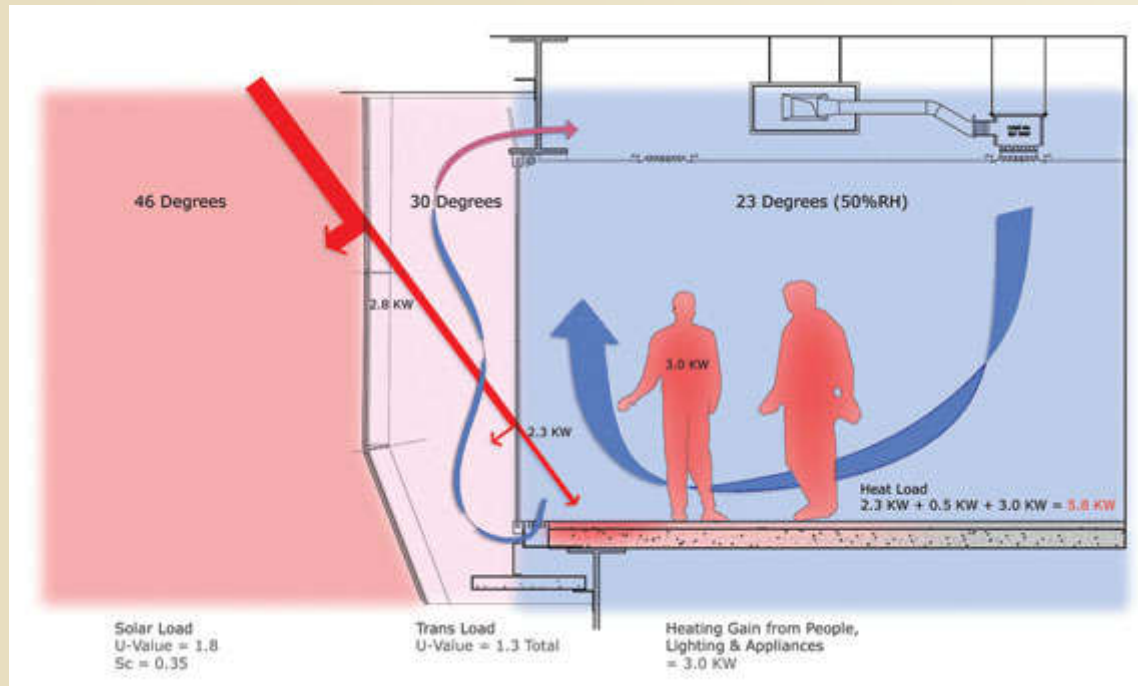
Kriteria

firmitas – ANO;

utilitas – ANO;

- Teplota v interieru regulována formou dvojté fasády.

venustas – ANO.



Capital Gate Tower, Abu Dhabi,
foto: <http://www.ctbuh.org/>

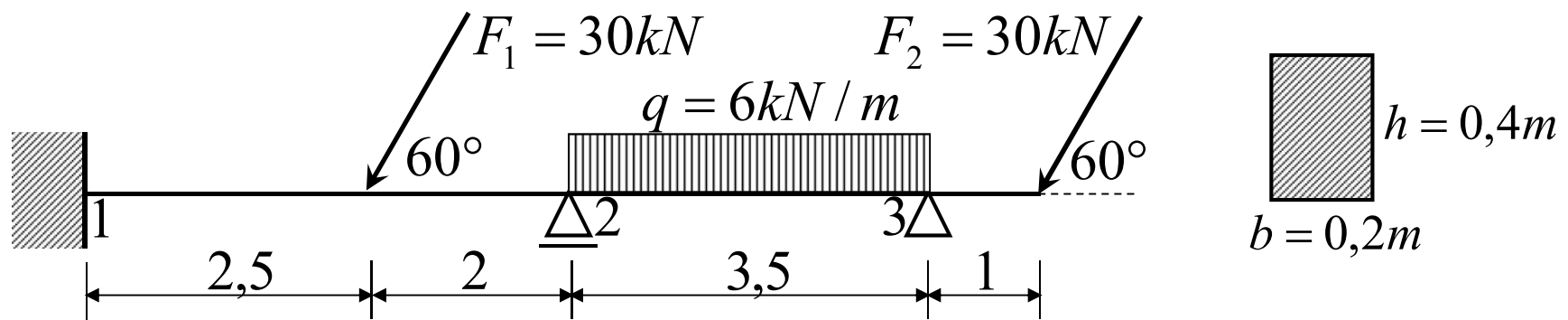


Analýza prutové soustavy

- Sestavení výpočetního modelu a určení stupně přetvárné neurčitosti
- Analýza všech prutů tvořících soustavu v lokální prutové soustavě (určení vektorů primárních koncových sil a matice tuhosti každého prutu)
- Transformace lokálních objektů každého prutu do globálního souřadného systému,
 - u nosníků tato transformace odpadá
- Sestavení soustavy n_p rovnic (vektoru parametrů deformace, matice tuhosti konstrukce a zatěžovacího vektoru)

Příklad 2 - zadání

Určete reakce a průběhy vnitřních sil na tomto spojitém nosníku:



Průřezové charakteristiky:

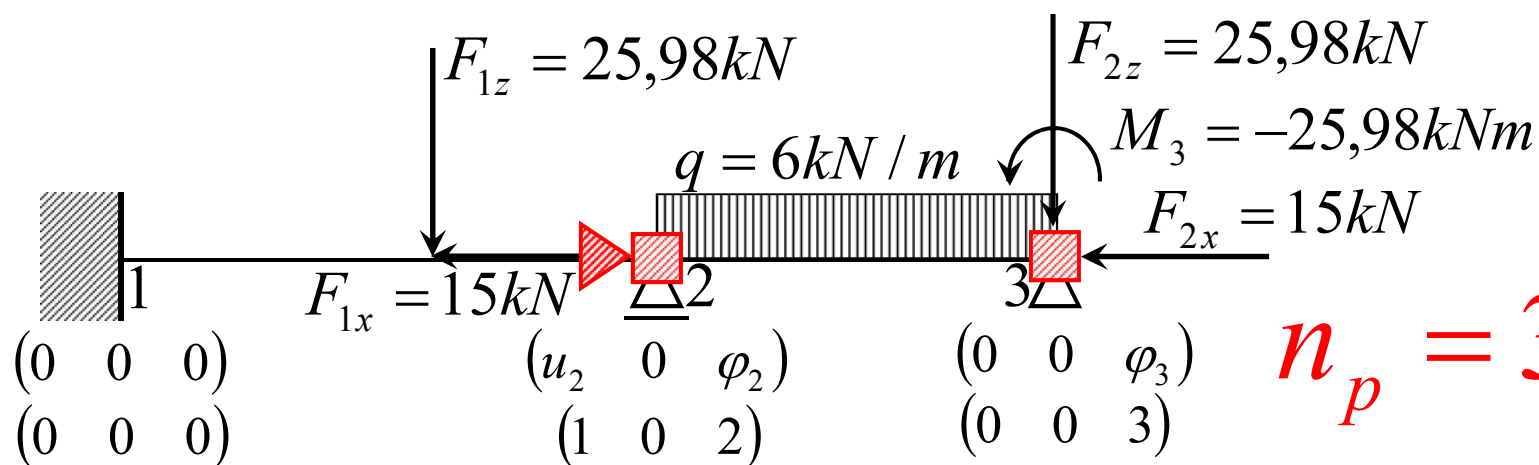
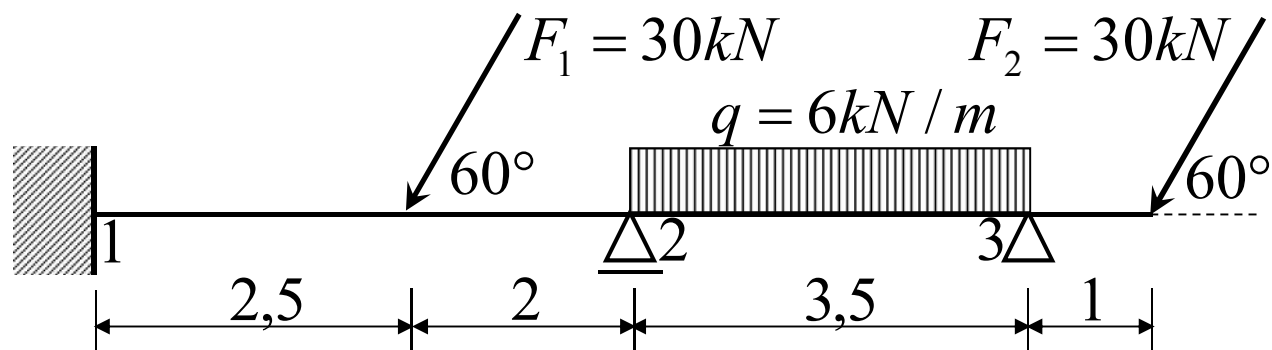
$$A = b \cdot h = 0,08\text{m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 1,067 \cdot 10^{-3} \text{m}^4$$

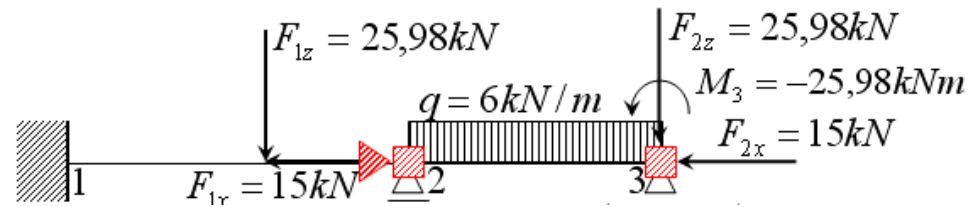
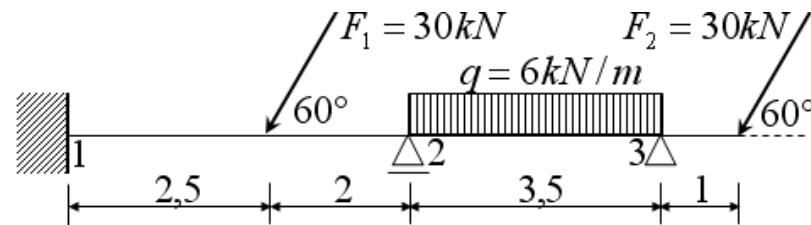
Modul pružnosti:

$$E = 27\text{GPa} = 27 \cdot 10^6 \text{kPa}$$

Příklad 2 – výpočtový model

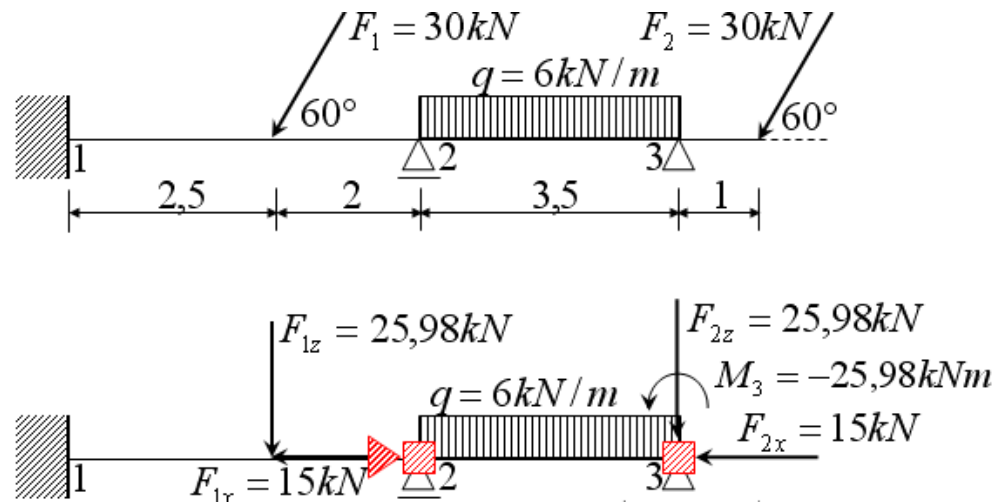


Výpočet primárních koncových sil, prut 1



$$\bar{R}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{12} \\ \bar{Z}_{12} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{X}_{21} \\ \bar{Z}_{21} \\ \bar{M}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b^2 (l + 2a) / l^3 \\ F_z a b^2 / l^2 \\ -F_x a / l \\ -F_z a^2 (l + 2b) / l^3 \\ -F_z a^2 b / l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \cdot 2 / 4,5 \\ -25,98 \cdot 2^2 (4,5 + 2 \cdot 2,5) / 4,5^3 \\ 25,98 \cdot 2,5 \cdot 2^2 / 4,5^2 \\ 15 \cdot 2 / 4,5 \\ -25,98 \cdot 2,5^2 (4,5 + 2 \cdot 2) / 4,5^3 \\ -25,98 \cdot 2,5^2 \cdot 2 / 4,5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,667 \\ -10,834 \\ 12,830 \\ 8,333 \\ -15,146 \\ -16,037 \end{bmatrix}$$

Výpočet primárních koncových sil, prut 2

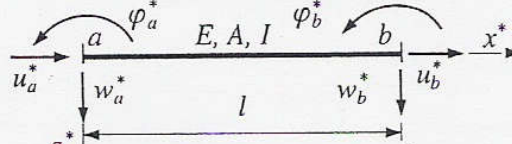


$$\bar{R}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Z}_{23} & -ql/2 & -6 \cdot 3,5/2 & -10,5 \\ \bar{M}_{23} & ql^2/12 & 6 \cdot 3,5^2/12 & 6,125 \\ \bar{X}_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Z}_{32} & -ql/2 & -6 \cdot 3,5/2 & -10,5 \\ \bar{M}_{32} & -ql^2/12 & -6 \cdot 3,5^2/12 & -6,125 \end{bmatrix}$$

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu [1]

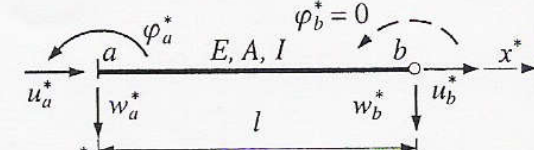
Tabulka 11.3. Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený



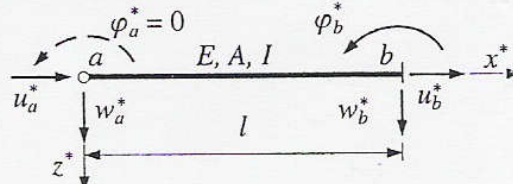
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený



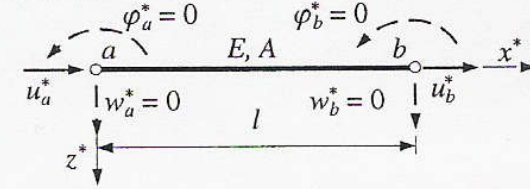
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



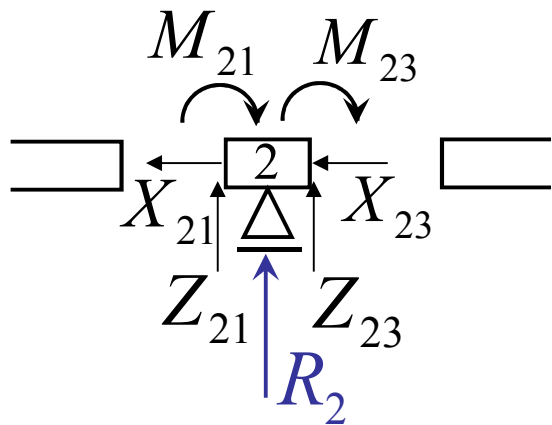
výpočet sekundárních koncových sil, prut (a-b)

$$\hat{R}_{ab} = k_{ab} \cdot r_{ab}$$

$$\hat{R}_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{ab} \\ \hat{Z}_{ab} \\ \hat{M}_{ab} \\ \hat{X}_{ba} \\ \hat{Z}_{ba} \\ \hat{M}_{ba} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{pmatrix}$$

Rovnovážné podmínky

Styčnick (uzel) 2



$$-X_{21} - X_{23} = 0$$

$$-\bar{X}_{21} - \bar{X}_{23} - \hat{X}_{21} - \hat{X}_{23} = 0$$

$$\hat{X}_{21} + \hat{X}_{23} = -\bar{X}_{21} - \bar{X}_{23}$$

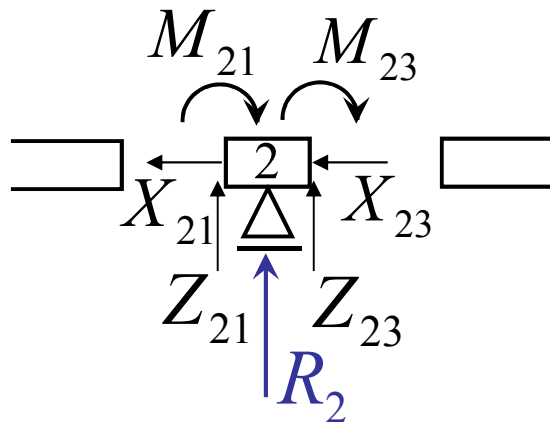
$$\frac{EA}{l_1} u_2 + \frac{EA}{l_2} u_2 = -8,333$$

$$\left(\frac{27000000 \cdot 0,08}{4,5} + \frac{27000000 \cdot 0,08}{3,5} \right) \cdot u_2 = -8,333$$

$$1097143 \cdot u_2 = -8,333$$

Rovnovážné podmínky

Styčnick (uzel) 2



$$-M_{21} - M_{23} = 0$$

$$-\overline{M}_{21} - \overline{M}_{23} - \hat{M}_{21} - \hat{M}_{23} = 0$$

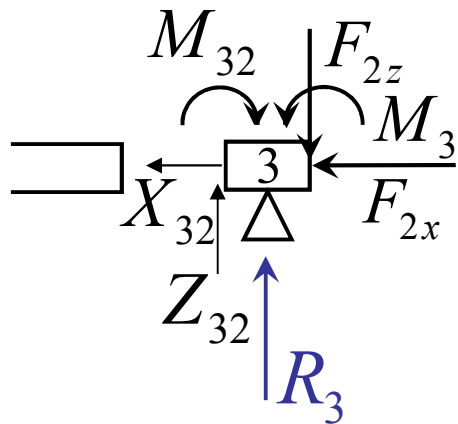
$$\hat{M}_{21} + \hat{M}_{23} = -\overline{M}_{21} - \overline{M}_{23}$$

$$\frac{4EI}{l_1} \varphi_2 + \frac{4EI}{l_2} \varphi_2 + \frac{2EI}{l_2} \varphi_3 = -(-16,037 + 6,125)$$

$$58511\varphi_2 + 16456\varphi_3 = 9,912$$

Rovnovážné podmínky

Styčnick (uzel) 3



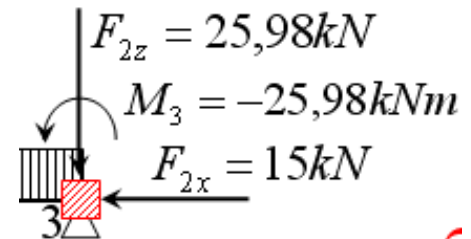
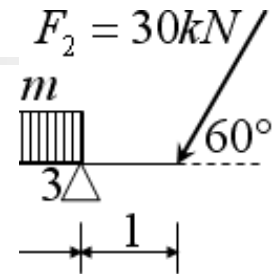
$$-M_{32} + M_3 = 0$$

$$-\overline{M}_{32} - \hat{M}_{32} + M_3 = 0$$

$$\hat{M}_{32} = M_3 - \overline{M}_{32}$$

$$\frac{2EI}{l_2} \varphi_2 + \frac{4EI}{l_2} \varphi_3 = -25,98 - (-6,125)$$

$$16456\varphi_2 + 32912\varphi_3 = -19,855$$





Rovnovážné podmínky

Pro výpočet u_2 , φ_2 a φ_3 máme 3 rovnice:

$$1097143 \cdot u_2 + 0 \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 = -8,333$$

$$0 \cdot u_2 + 58511 \cdot \varphi_2 + 16456 \cdot \varphi_3 = 9,912$$

$$0 \cdot u_2 + 16456 \cdot \varphi_2 + 32912 \cdot \varphi_3 = -19,855$$

Obecně lze zapsat: $K \cdot r = F$

K ... matice tuhosti konstrukce

r ... vektor parametrů deformace

F ... zatěžovací vektor $F = S - \bar{R}$

S ... globální vektor uzlového zatížení

\bar{R} ... primární vektor prutové soustavy

Příklad 2 – výpočet matice tuhosti K a matice zatěžovacího vektoru F

$$K = \begin{vmatrix} EA\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 4EI\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) & \frac{2EI}{l_2} \\ 0 & \frac{2EI}{l_2} & \frac{4EI}{l_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1097143 & 0 & 0 \\ 0 & 58511 & 16456 \\ 0 & 16456 & 32912 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{21} + \bar{X}_{23} \\ \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} \\ \bar{M}_{32} \end{Bmatrix}$$

$$F = S - \bar{R} = \begin{Bmatrix} -\bar{X}_{21} - \bar{X}_{23} \\ -\bar{M}_{21} - \bar{M}_{23} \\ M_3 - \bar{M}_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,333 - 0 \\ 16,037 - 6,125 \\ -25,98 + 6,125 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,333 \\ 9,912 \\ -19,855 \end{Bmatrix}$$



Příklad 2 – řešení soustavy rovnic

$$Kr = F$$

$$\begin{vmatrix} 1097143 & 0 & 0 \\ 0 & 58511 & 16456 \\ 0 & 16456 & 32912 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8,333 \\ 9,912 \\ -19,855 \end{vmatrix}$$

Řešením je $r = K^{-1}F$, kde K^{-1} je inverzní matice K .

V našem případě

$$r = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,000007595 \\ 0,0002394561 \\ -0,000800552 \end{Bmatrix}$$



Příklad 2, výpočet sekundárních koncových sil, prut 1(1-2)

$$\hat{X}_{12} = -\frac{EA}{l_{12}} u_2 = -\frac{27000000 \cdot 0,08}{4,5} (-0,000007595) = 3,6458$$

$$\hat{Z}_{12} = -\frac{6EJ}{l_{12}^2} \varphi_2 = -\frac{6 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{4,5^2} 0,000394561 = -3,3667$$

$$\hat{M}_{12} = \frac{2EJ}{l_{12}} \varphi_2 = \frac{2 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{4,5} 0,000394561 = 5,0501$$

$$\hat{X}_{21} = \frac{EA}{l_{12}} u_2 = \frac{27000000 \cdot 0,08}{4,5} (-0,000007595) = -3,6458$$

$$\hat{Z}_{21} = \frac{6EJ}{l_{12}^2} \varphi_2 = \frac{6 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{4,5^2} 0,000394561 = 3,3667$$

$$\hat{M}_{21} = \frac{4EJ}{l_{12}} \varphi_2 = \frac{4 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{4,5} 0,000394561 = 10,1001$$

Příklad 2,
výpočet sekundárních koncových sil, prut 1(1-2)

$$\hat{R}_{12} = k_{12} \cdot r_{12}$$

$$\hat{R}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{12} \\ \hat{Z}_{12} \\ \hat{M}_{12} \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Z}_{12} \\ \hat{M}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & -\frac{4EI}{l_{12}} & 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} \\ -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} & 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Příklad 2, výpočet sekundárních koncových sil, prut 1(1-2)

$$\hat{R}_{12} = k_{12} \cdot r_{12}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{12} \\ \hat{Z}_{12} \\ \hat{M}_{12} \\ \hat{X}_{12} \\ \hat{Z}_{12} \\ \hat{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} & 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} \\ -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} & 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,000007595 \\ 0 \\ 0,000394561 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,646 \\ -3,367 \\ 5,050 \\ -3,646 \\ 3,367 \\ 10,100 \end{pmatrix}$$



Příklad 2, výpočet sekundárních koncových sil, prut 2(2-3)

$$\hat{X}_{23} = \frac{EA}{l_2} u_2 = \frac{27000000 \cdot 0,08}{3,5} (-0,000007595) = -4,6875$$

$$\hat{Z}_{23} = -\frac{6EJ}{l_2^2} (\varphi_2 + \varphi_3) = -\frac{6 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{3,5^2} (0,000394561 - 0,000800552) = 5,7266$$

$$\hat{M}_{23} = \frac{2EJ}{l_2} (2\varphi_2 + \varphi_3) = \frac{2 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{3,5} (2 \cdot 0,000394561 - 0,000800552) = -0,1881$$

$$\hat{X}_{32} = -\frac{EA}{l_2} u_2 = -\frac{27000000 \cdot 0,08}{3,5} (-0,000007595) = 4,6875$$

$$\hat{Z}_{32} = \frac{6EJ}{l_2^2} (\varphi_2 + \varphi_3) = \frac{6 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{3,5^2} (0,000394561 - 0,000800552) = -5,7266$$

$$\hat{M}_{32} = \frac{2EJ}{l_2} (\varphi_2 + 2\varphi_3) = \frac{2 \cdot 27000000 \cdot 0,001067}{3,5} (0,000394561 - 2 \cdot 0,000800552) = -19,8550$$

Příklad 2,
výpočet sekundárních koncových sil, prut 2(2-3)

$$\hat{R}_{12} = k_{12} \cdot r_{12}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{23} \\ \hat{Z}_{23} \\ \hat{M}_{23} \\ \hat{X}_{32} \\ \hat{Z}_{32} \\ \hat{M}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} & 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} \\ -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} & 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,000007595 \\ 0 \\ 0,000394561 \\ 0 \\ 0 \\ -0,000800552 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,6875 \\ 5,7266 \\ -0,1881 \\ 4,6875 \\ -5,7266 \\ -19,8550 \end{pmatrix}$$



Příklad 2, prut 1 (1-2) výpočet celkových koncových sil

$$X_{12} = \bar{X}_{12} + \hat{X}_{12} = 6,6667 - 3,6458 = 10,3125 \text{ kN}$$

$$Z_{12} = \bar{Z}_{12} + \hat{Z}_{12} = -10,8339 - 3,3667 = -14,2006 \text{ kN}$$

$$M_{12} = \bar{M}_{12} + \hat{M}_{12} = 12,8296 + 5,0501 = 17,8797 \text{ kNm}$$

$$X_{21} = \bar{X}_{21} + \hat{X}_{12} = -3,6458 + 8,3333 = 4,6875 \text{ kN}$$

$$Z_{21} = \bar{Z}_{21} + \hat{Z}_{21} = -15,1461 + 3,3667 = -11,7794 \text{ kN}$$

$$M_{21} = \bar{M}_{21} + \hat{M}_{21} = -16,0370 + 10,1001 = -5,9369 \text{ kNm}$$

$$R_{12} = \bar{R}_{12} + \hat{R}_{12}$$



Příklad 2, prut 2(2-3), výpočet celkových koncových sil

$$X_{23} = \bar{X}_{23} + \hat{X}_{23} = 0 - 4,6875 = -4,6875 \text{ kN}$$

$$Z_{23} = \bar{Z}_{23} + \hat{Z}_{23} = -10,5 + 5,7266 = -4,7734 \text{ kN}$$

$$M_{23} = \bar{M}_{23} + \hat{M}_{23} = 6,1250 - 0,1881 = 5,9369 \text{ kNm}$$

$$X_{32} = \bar{X}_{32} + \hat{X}_{32} = 0 + 4,6875 = 4,6875 \text{ kN}$$

$$Z_{32} = \bar{Z}_{32} + \hat{Z}_{32} = -10,5 - 5,7266 = -16,2266 \text{ kN}$$

$$M_{32} = \bar{M}_{32} + \hat{M}_{32} = -6,125 - 19,8550 = -25,98 \text{ kNm}$$

$$R_{23} = \bar{R}_{23} + \hat{R}_{23}$$

Příklad 2, výpočet reakcí

■ Styčnick 1:

$$H_1 - X_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = X_{12} = 10,313 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$-R_1 - Z_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = -Z_{12} = 14,201 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_1 - M_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = M_{12} = 17,880 \text{ kNm}(\text{doleva})$$

■ Styčnick 2:

$$H_2 - X_{21} - X_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_2 = X_{21} + X_{23} = 4,688 - 4,688 = 0 \text{ kN}$$

$$-R_2 - Z_{21} - Z_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = -Z_{21} - Z_{23} = 11,779 + 4,773 = 16,553 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_2 - M_{21} - M_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = -M_{21} - M_{23} = 5,937 - 5,937 = 0 \text{ kNm}$$

■ Styčnick 3:

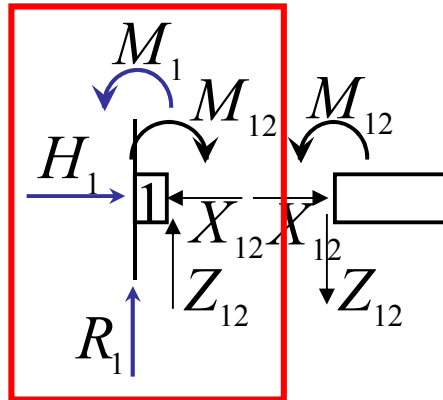
$$H_3 - X_{32} - F_{x3} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_3 = X_{32} + F_{x3} = 4,687 + 15 = 19,687 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$-R_3 - Z_{32} + F_{z3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = -Z_{32} + F_{z3} = 16,227 + 25,98 = 42,207 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_3 - M_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_3 = M_{32} = -25,987 \text{ kNm} (\text{poznámka : nejedná se o reakci})$$

Příklad 2, výpočet reakcí ve styčnicku 1

- Styčnick (uzel)
1:



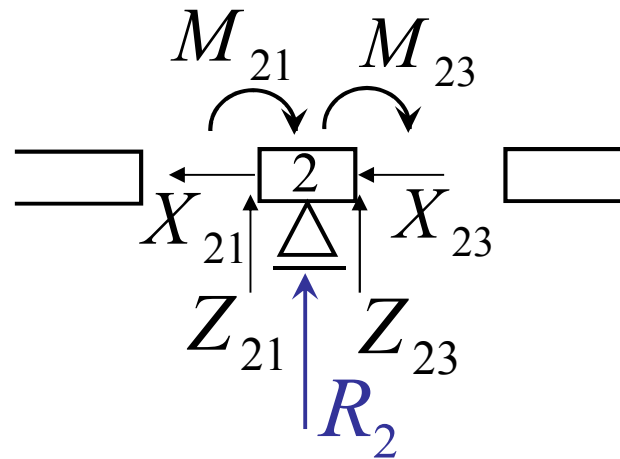
$$H_1 - X_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = X_{12} = 10,313 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$-R_1 - Z_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = -Z_{12} = 14,201 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_1 - M_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = M_{12} = 17,880 \text{ kNm}(\text{doleva})$$

Výpočet reakcí ve styčnicku 2

Styčnick (uzel) 2



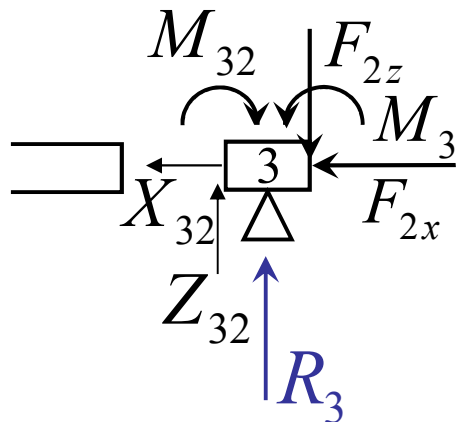
$$H_2 - X_{21} - X_{23} = 0 \Rightarrow H_2 = X_{21} + X_{23} = 4,688 - 4,688 = 0$$

$$-R_2 - Z_{21} - Z_{23} = 0 \Rightarrow R_2 = -Z_{21} - Z_{23} = 11,779 + 4,773 = 16,553 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_2 - M_{21} - M_{23} = 0 \Rightarrow M_2 = -M_{21} - M_{23} = 5,937 - 5,937 = 0$$

Výpočet reakcí ve styčnicku 3

Styčnick (uzel) 3

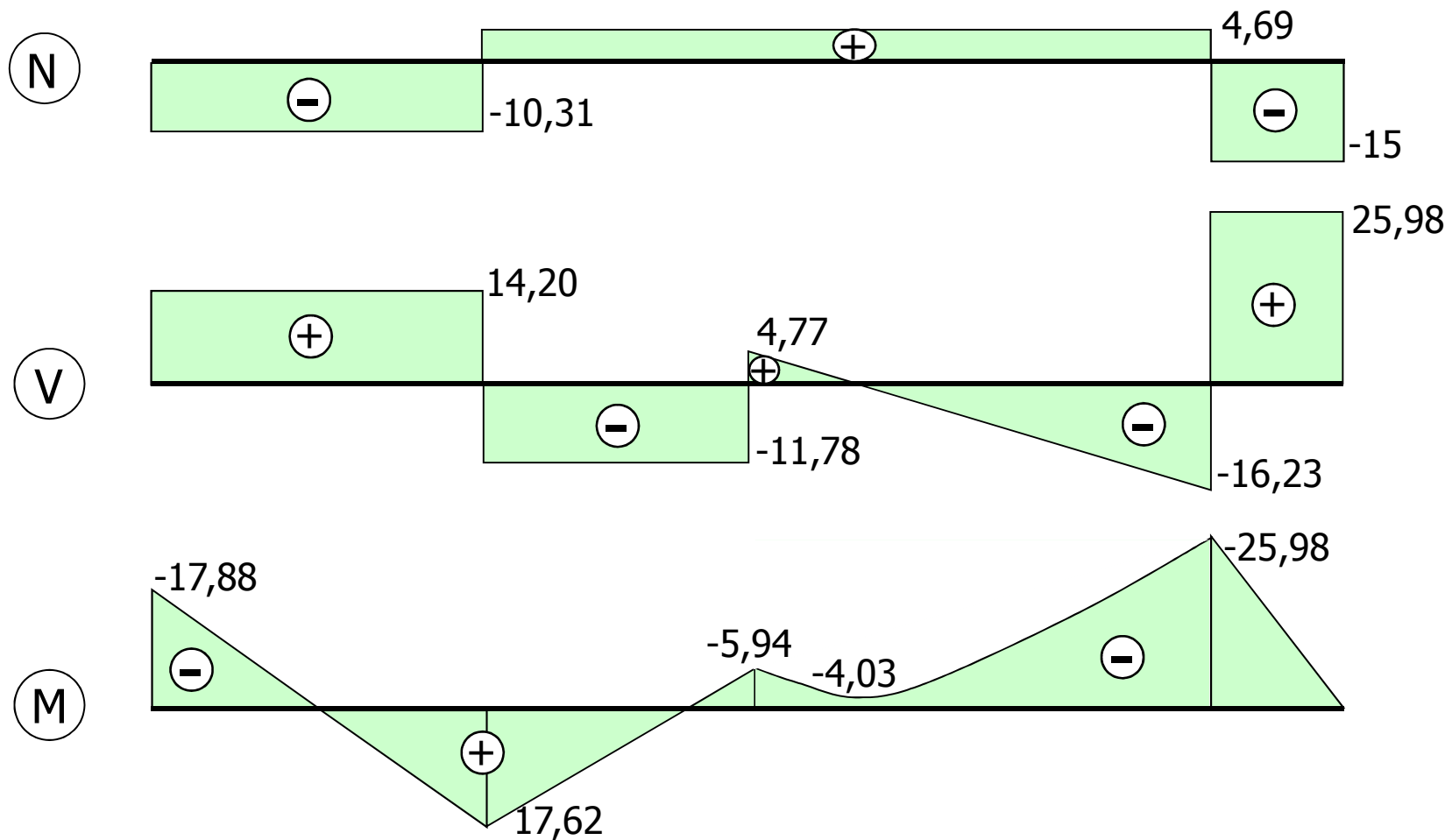


$$H_3 - X_{32} - F_{x3} = 0 \Rightarrow H_3 = X_{32} + F_{x3}, 687 + 15 = 19,687kN(\rightarrow)$$

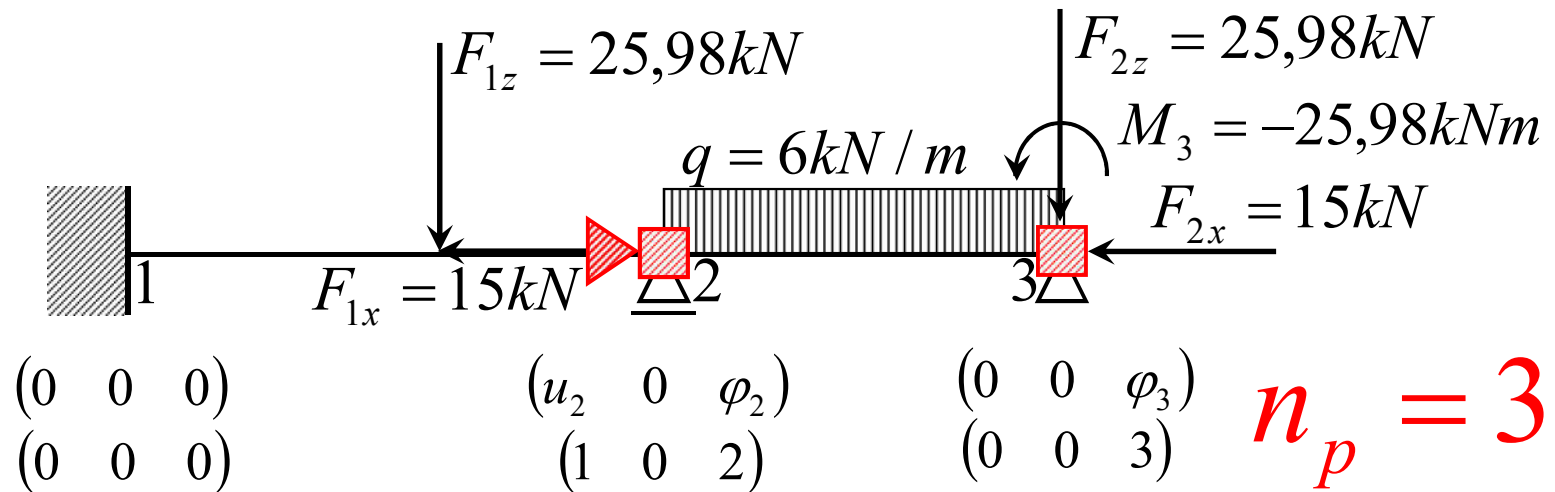
$$-R_2 - Z_{32} + F_{z3} = 0 \Rightarrow R_2 = -Z_{32} + F_{z3} = 16,227 + 25,98 = 42,207kN(\uparrow)$$

$$M_3 - M_{32} = 0 \Rightarrow M_3 = M_{32} = -25,987kNm$$

Příklad 2 – průběhy vnitřních sil

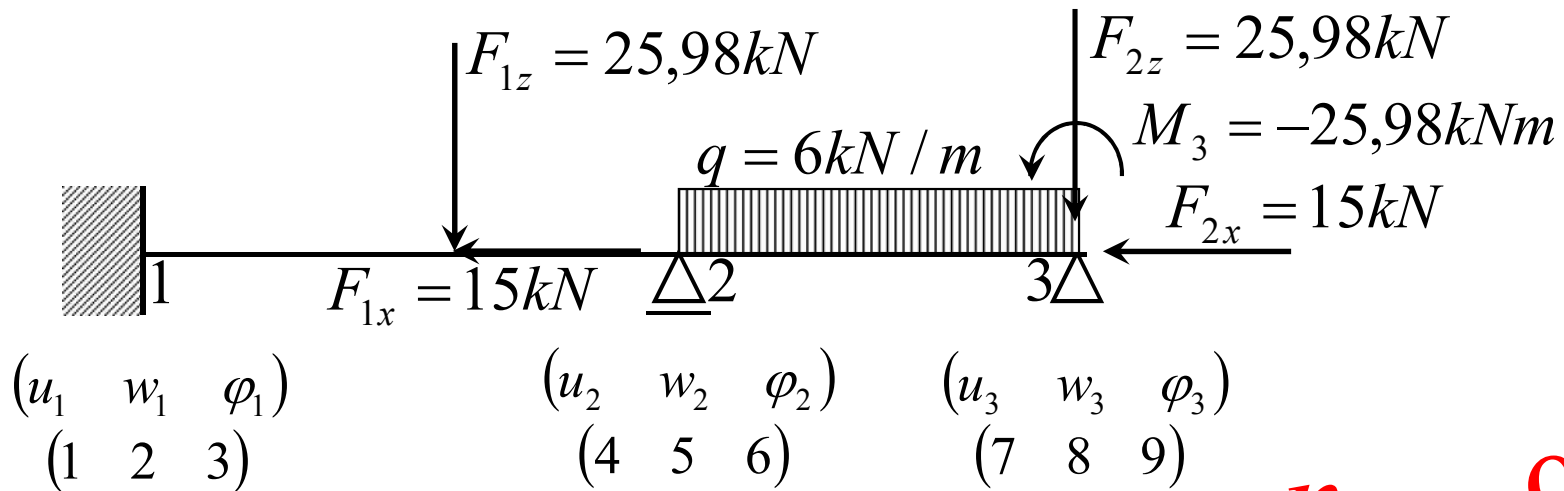


Příklad 2 – výpočtový model 1



oba pruty připojeny oboustranně monoliticky

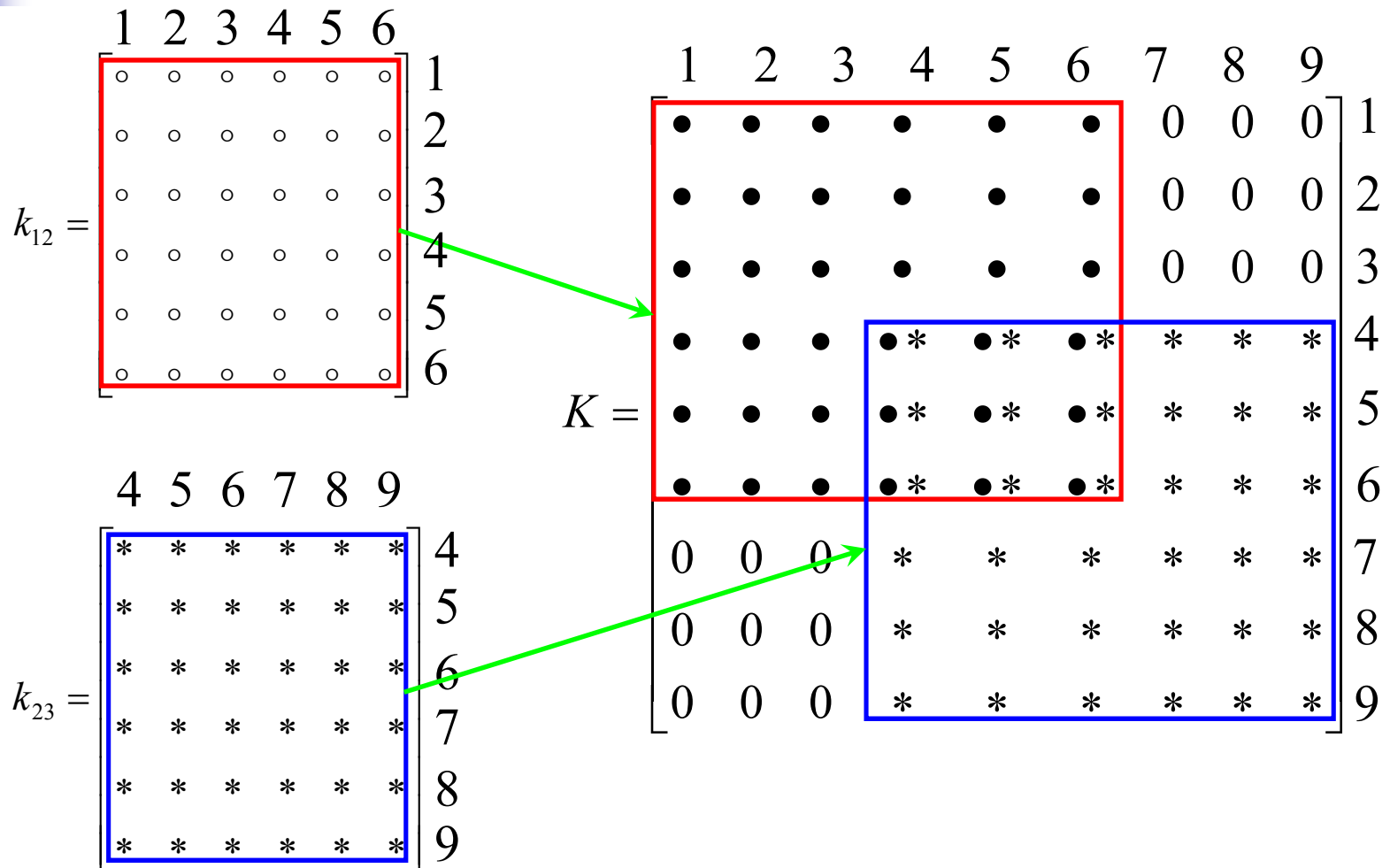
Příklad 2 – výpočtový model 2



$$n_p = 9$$

oba pruty připojeny oboustranně monoliticky

Příklad 2 – výpočtový model 2, sestavení matice tuhosti



Příklad 2 – výpočtový model 2, úprava matice tuhosti nosníku, zavedení okrajových podmínek

$$u_1(1) = 0$$

$$w_1(2) = 0$$

$$\varphi_1(3) = 0$$

$$u_2(4) \neq 0$$

$$w_2(5) = 0$$

$$\varphi_2(6) \neq 0$$

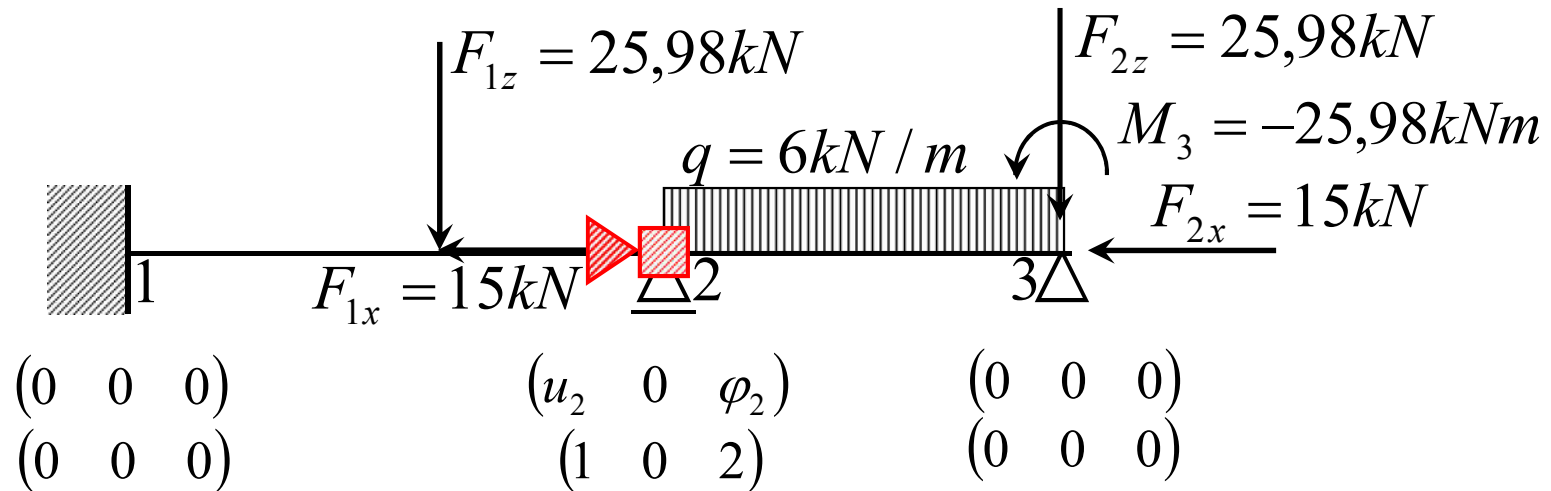
$$u_3(7) = 0$$

$$w_3(8) = 0$$

$$\varphi_3(9) \neq 0$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet * & 0 & \bullet * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet * & 0 & \bullet * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Příklad 2 – výpočtový model 3



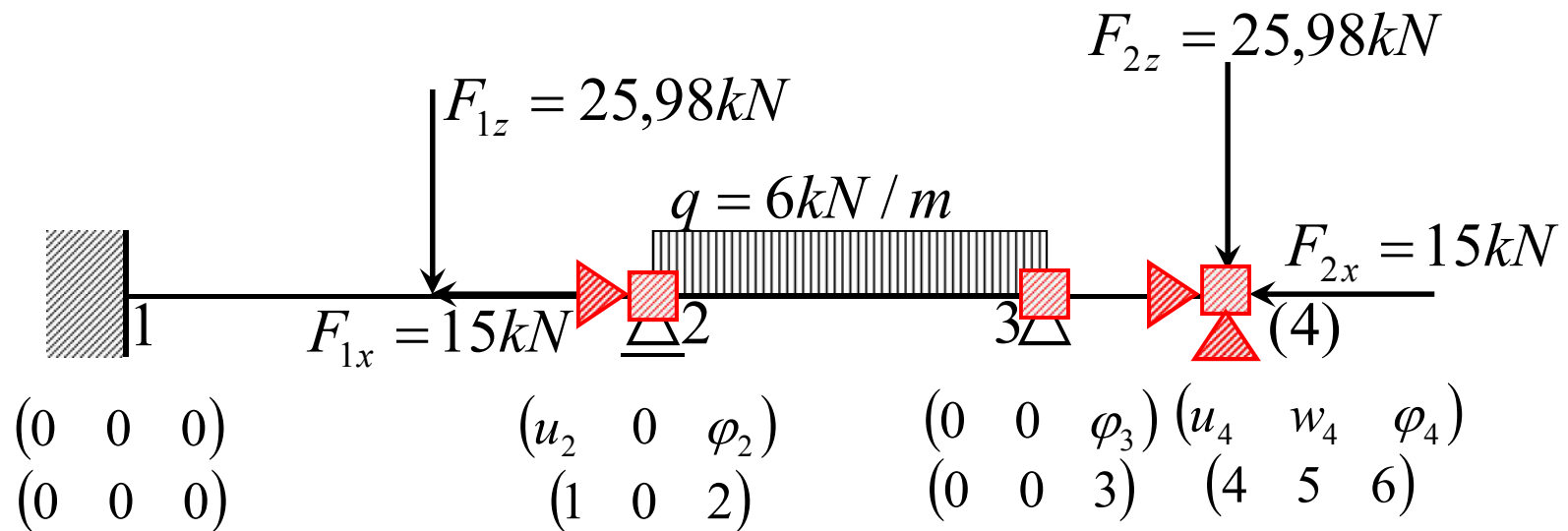
$$n_p = 2$$



prut 1 ... oboustranně monoliticky připojený

prut 2 ... pravostranně kloubově připojený

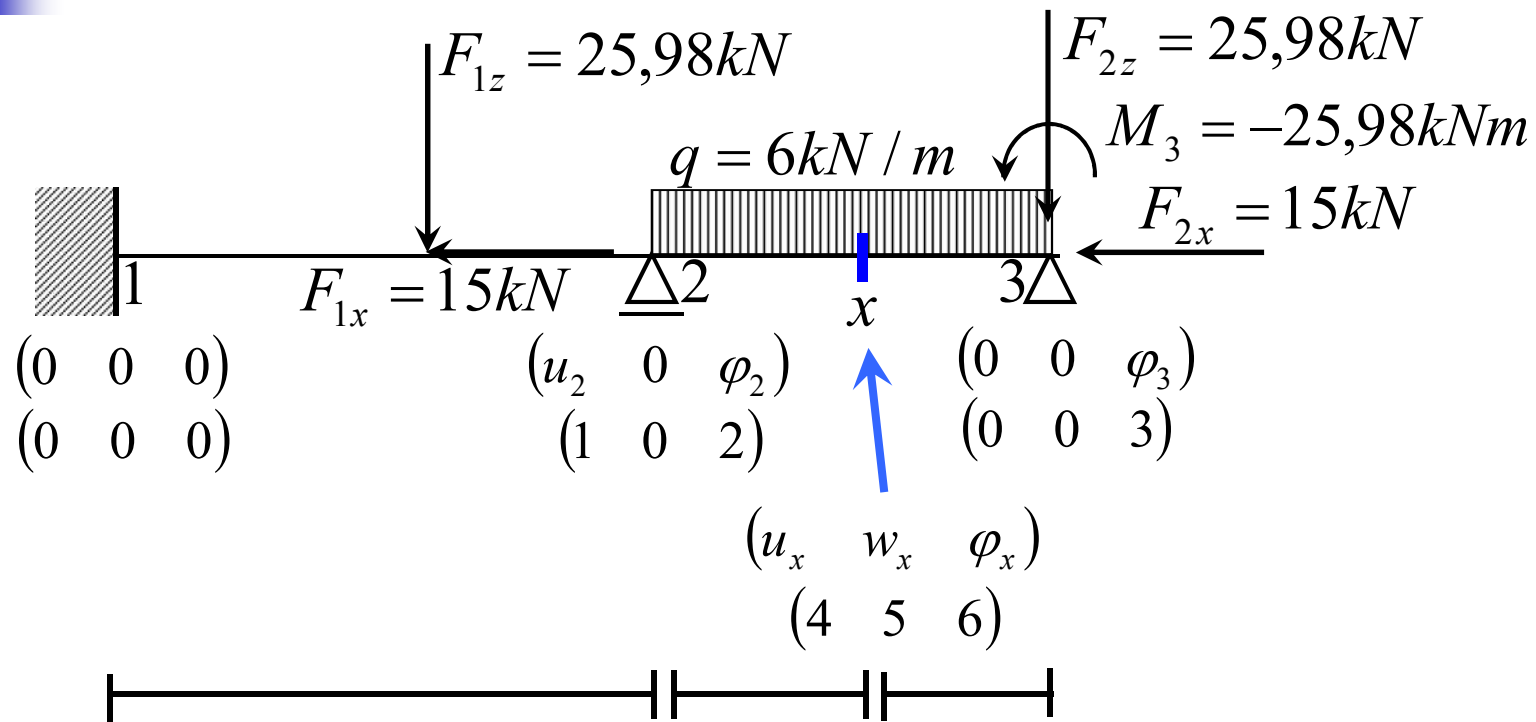
Příklad 2 – výpočtový model 4



$$n_p = 6$$

všechny pruty připojeny oboustranně monoliticky

Výpočet deformací prutu



V místě hledaných deformací vloží styčník, úloha bude obsahovat o jeden prut více.

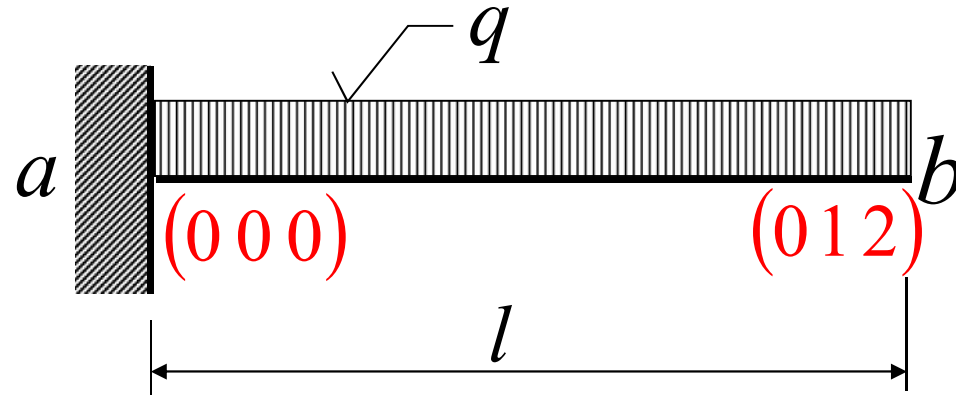
Testovací příklad 2

- Sestavte s využitím ODM rovnovážné rovnice pro výpočet přetvoření konce prutu b (viz obr.), případně je vypočtete, je-li zadáno:

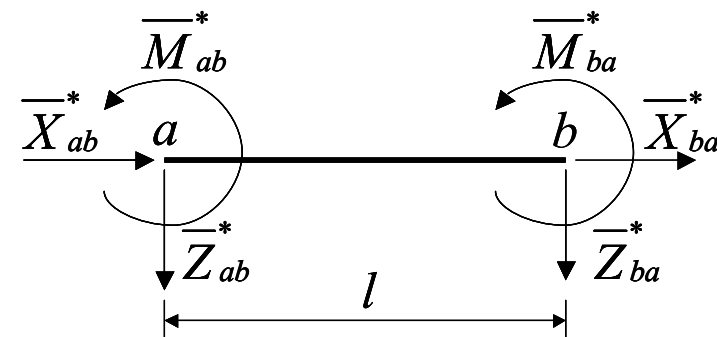
$$EI = 2 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

$$l = 4 \text{ m}$$

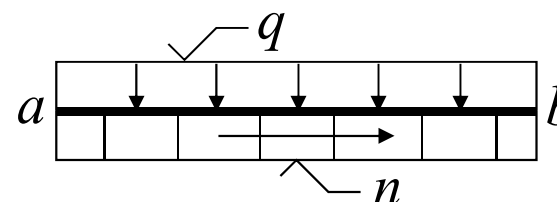
$$q = 2 \text{ kN/m}$$



Primární vektory koncových sil
prutu konstantního a
neměnného průřezu



a) Plné spojité zatížení



	Připojení prutu			
$\overline{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{ab}^* \\ \overline{Z}_{ab}^* \\ \overline{M}_{ab}^* \\ \overline{X}_{ba}^* \\ \overline{Z}_{ba}^* \\ \overline{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -5ql/8 \\ ql^2/8 \\ -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -5ql/8 \\ -ql^2/8 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$



Výpočet sekundárních koncových sil, prut (a-b)

$$\hat{R}_{ab} = k_{ab} \cdot r_{ab}$$

$$\hat{R}_{ab} = \begin{matrix} \hat{X}_{ab} \\ \hat{Z}_{ab} \\ \hat{M}_{ab} \\ \hat{X}_{ba} \\ \hat{Z}_{ba} \\ \hat{M}_{ba} \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{matrix}$$



Použitá literatura

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J., Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Učebnice, druhé vydání. VUTIUM, Brno 2004.

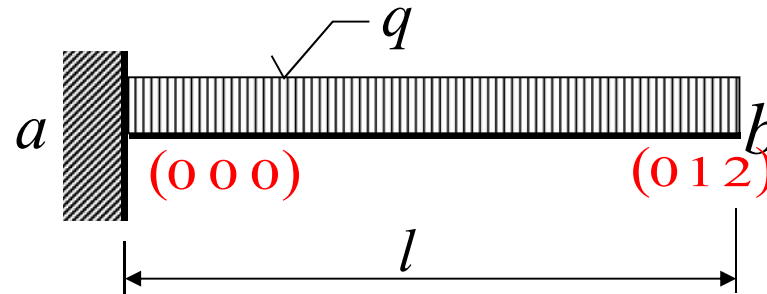
Testovací příklad 2

- Sestavte s využitím ODM rovnovážné rovnice pro výpočet přetvoření konce prutu b (viz obr.), případně je vypočtete, je-li zadáno:

$$EI = 2 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

$$l = 4 \text{ m}$$

$$q = 2 \text{ kN/m}$$



$$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \hat{Z}_{ba} = 0 \Rightarrow \hat{Z}_{ba} = -\bar{Z}_{ba} = \frac{ql}{2}$$

$$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = 0 \Rightarrow \hat{M}_{ba} = -\bar{M}_{ba} = \frac{ql^2}{12}$$

$$\frac{12EI}{l^3} w_b + \frac{6EI}{l^2} \varphi_b = \frac{ql}{2}$$

$$\frac{6EI}{l^2} w_b + \frac{4EI}{l} \varphi_b = \frac{ql^2}{12}$$

$$375w_b + 750\varphi_b = 4$$

$$750w_b + 2000\varphi_b = \frac{8}{3}$$

$$w_b = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\varphi_b = -1,06 \cdot 10^{-2}$$