

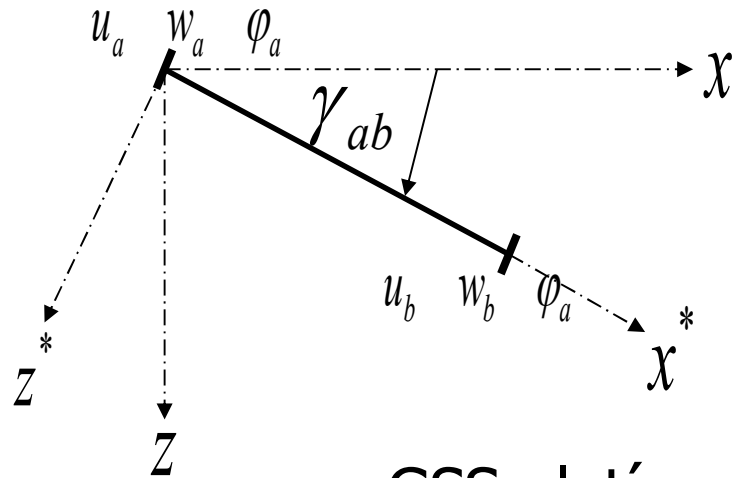


Téma 09

Obecná deformační metoda – analýza přímého prutu

- Lokální a globální souřadnicová soustava
- Primární (zatěžovací) vektor prutů různě uložených
- Lokální matice tuhosti prutů různě uložených
- Výpočet koncových sil

Analýza prutu, souřadné systémy



x, z .. globální souřadný systém GSS
 x^*, z^* lokální souřadný systém LSS

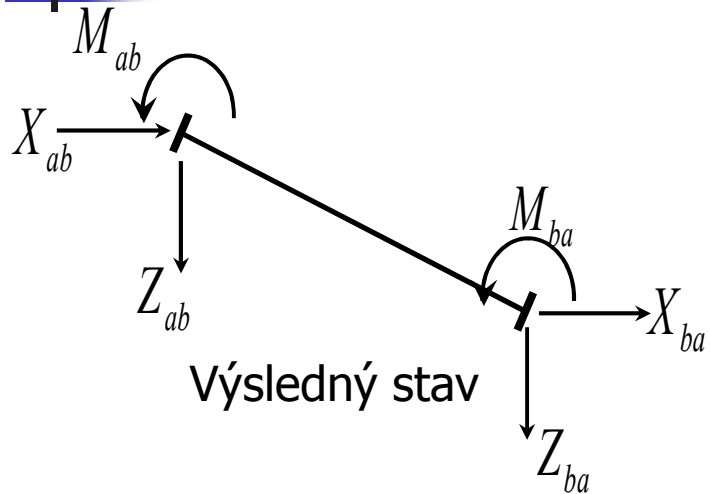
GSS platí pro celou konstrukci

LSS platí pro jeden prut

Pro $\gamma_{ab} = 0$ souřadné systémy totožné

Směr otáčení γ_{ab} pravotočivý !

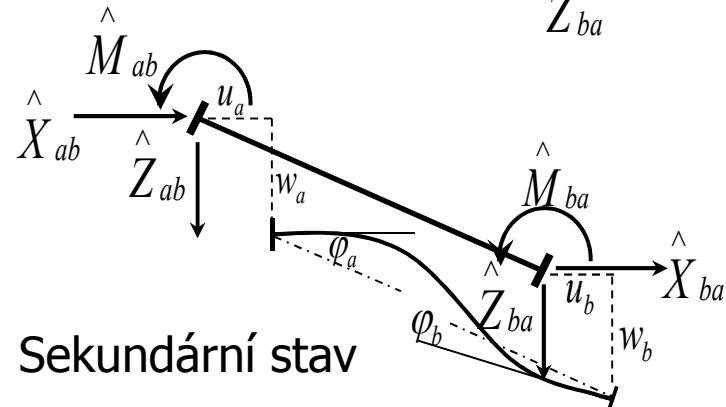
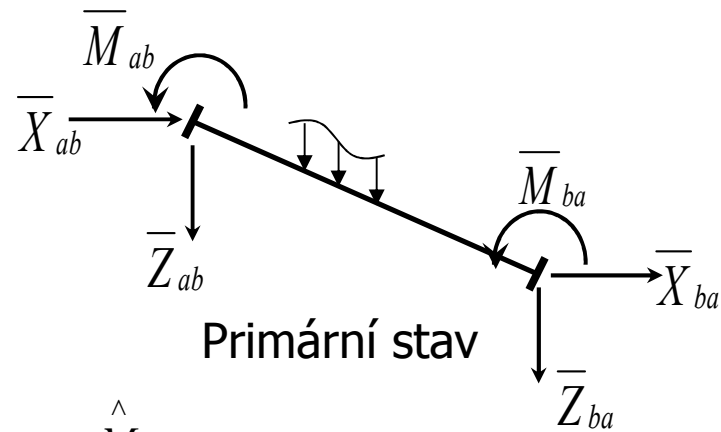
Analýza prutu, koncové síly prutu



$$X_{ab} = \bar{X}_{ab} + \hat{X}_{ab} \quad X_{ba} = \bar{X}_{ba} + \hat{X}_{ba}$$

$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} + \hat{Z}_{ab} \quad Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \hat{Z}_{ba}$$

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \hat{M}_{ab} \quad M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba}$$





Primární stav

Pro různá zatížení (silová) prutu odvodíme primární koncové síly v lokálním souřadném systému.

Primární koncové síly jsou důsledkem zatížení prutu po jeho upnutí, sestavujeme je do sloupcového vektoru
Globální primární vektor prutu a-b v GSS

$$\bar{R}_{ab} = \left\{ \bar{X}_{ab} \quad \bar{Z}_{ab} \quad \bar{M}_{ab} \quad \bar{X}_{ba} \quad \bar{Z}_{ba} \quad \bar{M}_{ba} \right\}^T$$

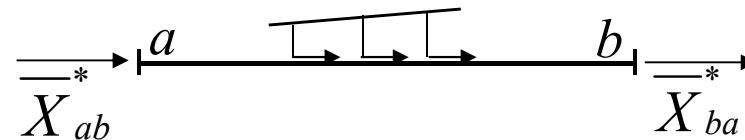
Lokální primární vektor prutu a-b v LSS

$$\bar{R}_{ab}^* = \left\{ \bar{X}_{ab}^* \quad \bar{Z}_{ab}^* \quad \bar{M}_{ab}^* \quad \bar{X}_{ba}^* \quad \bar{Z}_{ba}^* \quad \bar{M}_{ba}^* \right\}^T$$

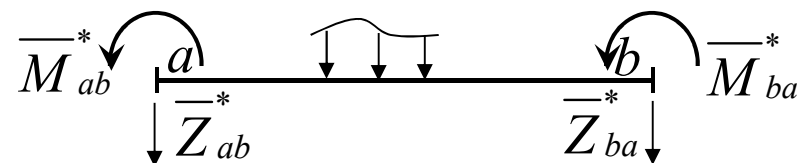
Primární stav

Zatížení prutu lze rozdělit na:

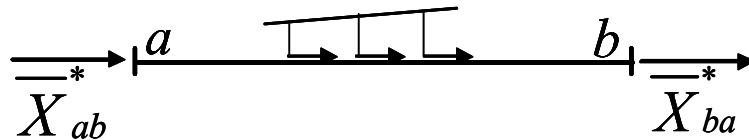
a) zatížení působící v ose prutu (osové zatížení) – vznikají koncové síly \overline{X}_{ab}^* , \overline{X}_{ba}^*



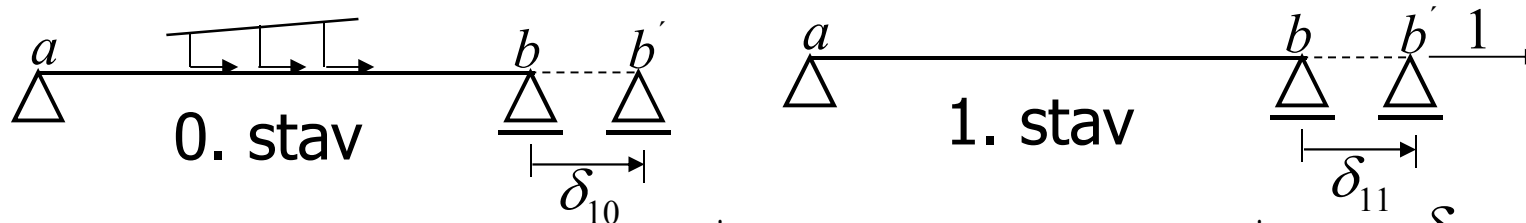
b) zatížení působící kolmo na osu prutu (příčné zatížení) – vznikají koncové síly \overline{Z}_{ab}^* , \overline{Z}_{ba}^* , \overline{M}_{ab}^* , \overline{M}_{ba}^*



Primární stav, osově zatížení



Zatížení v ose prutu řešíme silovou metodou



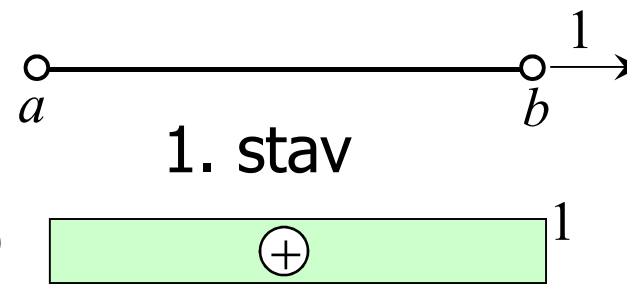
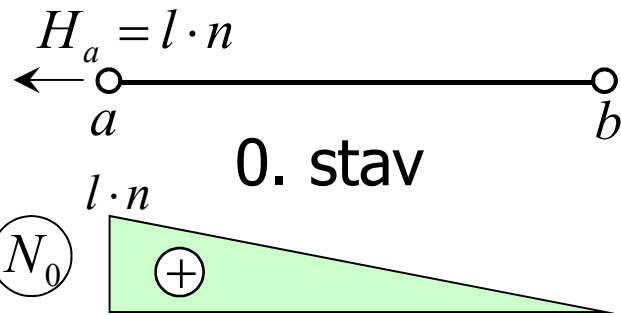
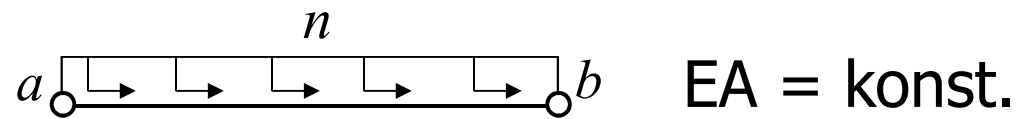
Deformační podmínka $\overline{X}_{ba}^* \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0 \Rightarrow \overline{X}_{ba}^* = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$

R ... výslednice osového zatížení

$$\overline{X}_{ab}^* + \overline{X}_{ba}^* + R = 0 \Rightarrow \overline{X}_{ab}^* = -R - \overline{X}_{ba}^* = -R + \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Poznámka: platí pro všechny typy uložení prutu bránící posunutí ve směru osy x

Primární stav, osově zatížení, příklad 1



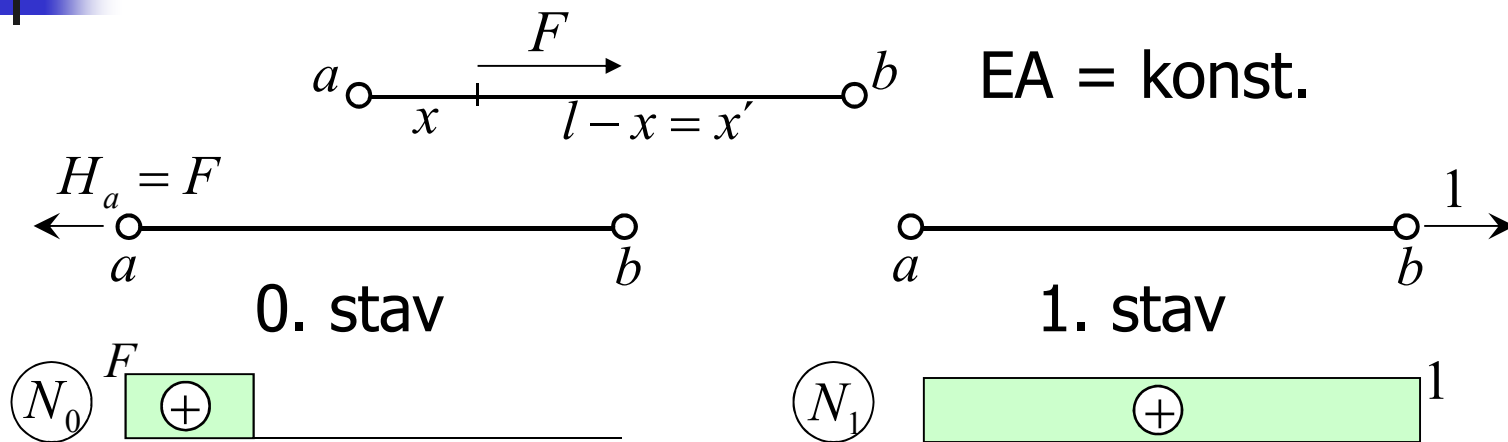
$$\delta_{10} = \frac{1}{EA} \frac{l \cdot n \cdot l}{2} \cdot 1 = \frac{nl^2}{2EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \bar{X}_{ba}^* = 0 \Rightarrow \bar{X}_{ba}^* = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{nl^2 \cdot EA}{2EA \cdot l} = -\frac{nl}{2}$$

$$\bar{X}_{ab}^* = -R - \bar{X}_{ba}^* = -nl + \frac{nl}{2} = -\frac{nl}{2}$$

Primární stav, osově zatížení, příklad 2

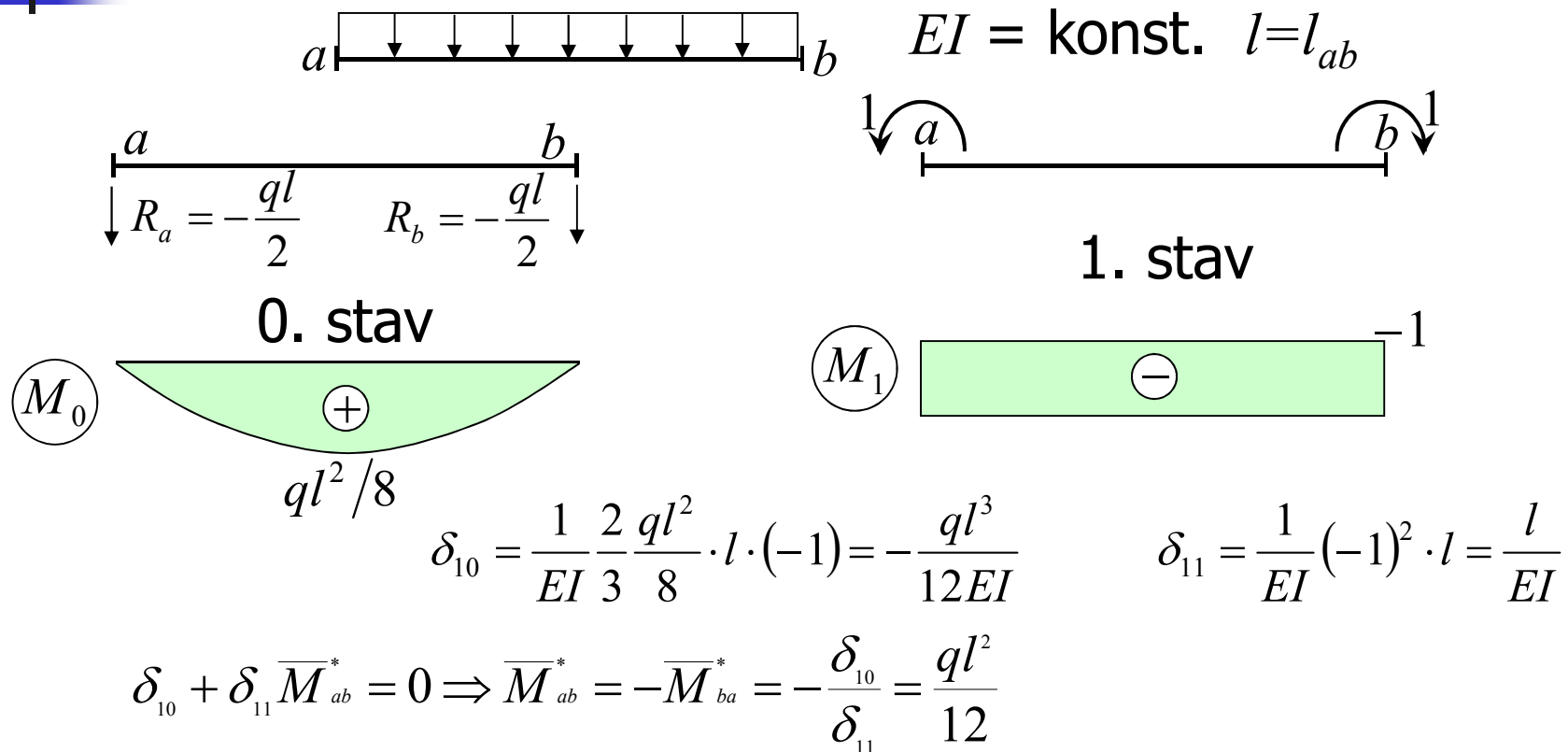


$$\delta_{10} = \frac{Fx}{EA} \quad \delta_{11} = \frac{l}{EA}$$

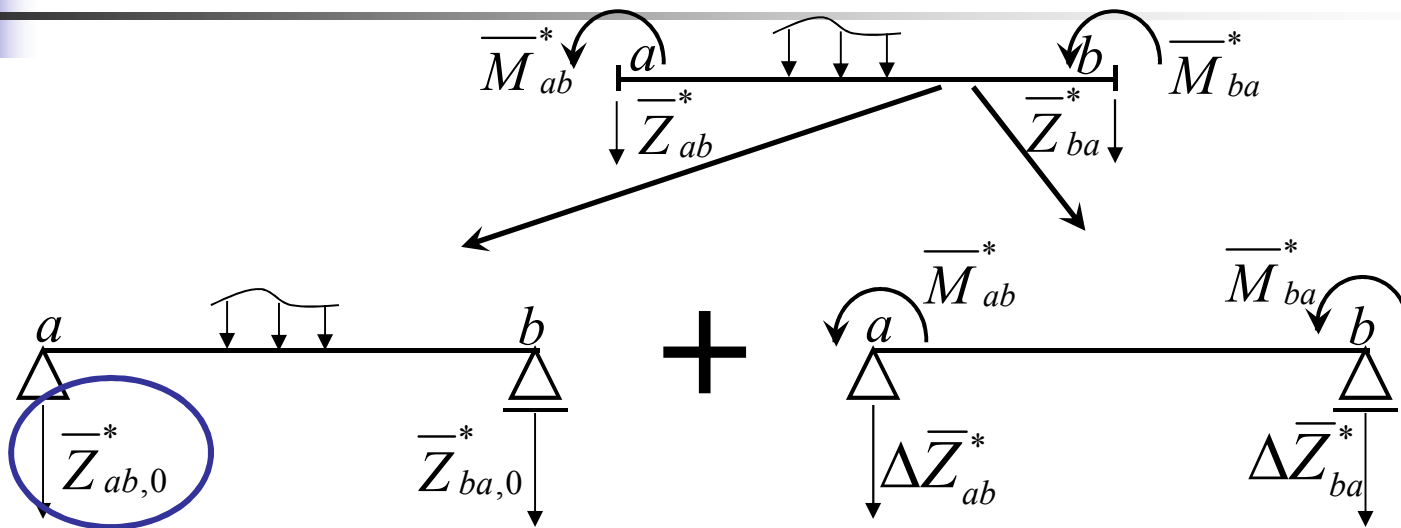
$$\overline{X}_{ba}^* = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -F \frac{x}{l}$$

$$\overline{X}_{ab}^* = -R - \overline{X}_{ba}^* = -F + \frac{Fx}{l} = -F \frac{x'}{l}$$

Primární stav, příčné zatížení, oboustranně monoliticky připojený prut, příklad 3



Primární stav, příčné zatížení, oboustranně monoliticky připojený prut



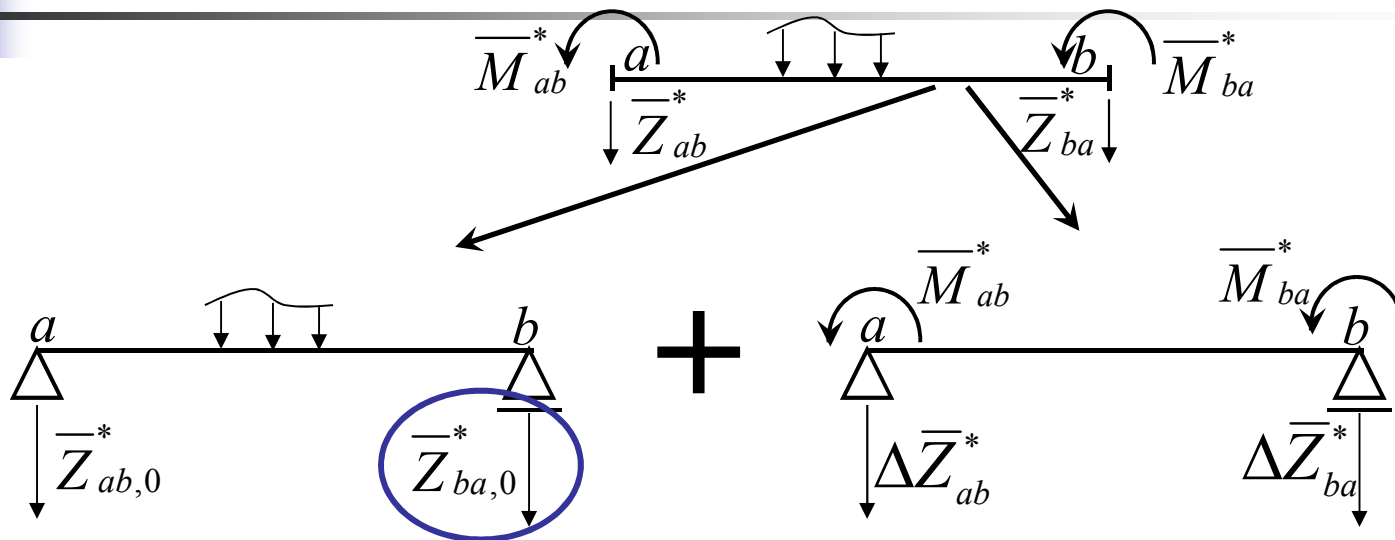
$$\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* + \Delta\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* - \Delta\bar{M}$$

$$\Delta\bar{Z}_{ab}^* \cdot l_{ab} + \bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^* = 0$$

$$\Delta\bar{Z}_{ab}^* = -\frac{\bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = -\Delta\bar{M}$$

$$\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* - \frac{\bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = \bar{Z}_{ab,0}^* - \Delta\bar{M}$$

Primární stav, příčné zatížení, oboustranně monoliticky připojený prut



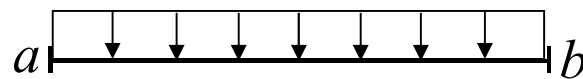
$$\bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \bar{\Delta Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta \bar{M}$$

$$-\Delta \bar{Z}_{ba}^* \cdot l_{ab} + \bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^* = 0$$

$$\Delta \bar{Z}_{ba}^* = \frac{\bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = \Delta \bar{M}$$

$$\bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \frac{\bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta \bar{M}$$

Primární stav, příčné zatížení, oboustranně monoliticky připojený prut, příklad 3

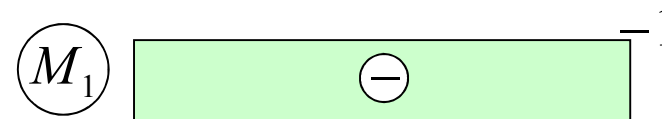
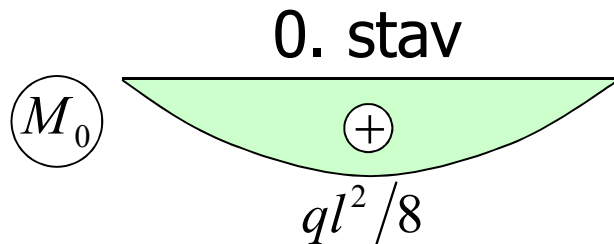


$$EI = \text{konst.} \quad l = l_{ab}$$

$$R_a = -\frac{ql}{2} \quad R_b = -\frac{ql}{2}$$



1. stav



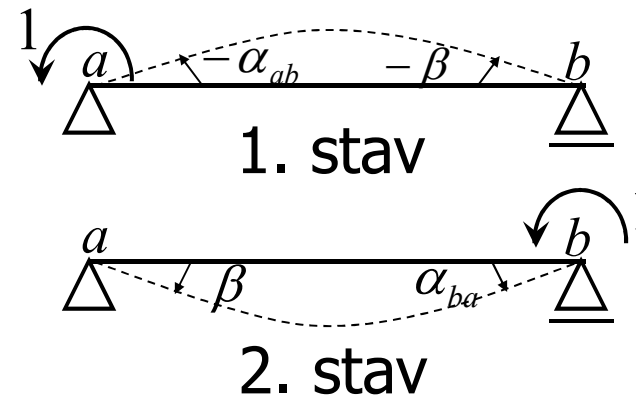
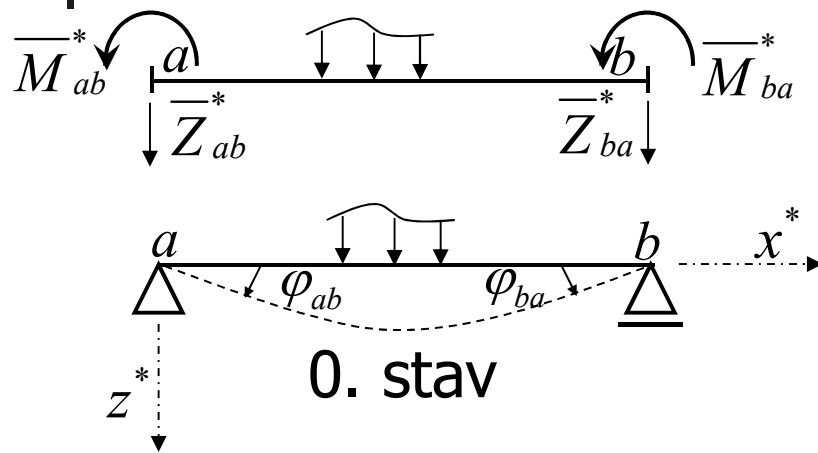
$$\overline{M}_{ab}^* = -\overline{M}_{ba}^* = \frac{ql^2}{12}$$

$$\Delta \overline{M} = \frac{\overline{M}_{ab}^* + \overline{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = 0$$

$$\overline{Z}_{ab}^* = \overline{Z}_{ab,0}^* + \Delta \overline{Z}_{ab}^* = \overline{Z}_{ab,0}^* - \Delta \overline{M} = -\frac{ql}{2}$$

$$\overline{Z}_{ba}^* = \overline{Z}_{ba,0}^* + \Delta \overline{Z}_{ba}^* = \overline{Z}_{ba,0}^* + \Delta \overline{M} = -\frac{ql}{2}$$

Primární stav, příčné zatížení, oboustranně monoliticky připojený prut



Deformační podmínky

$$-\overline{M}_{ab}^* \cdot \alpha_{ab} + \overline{M}_{ba}^* \cdot \beta + \varphi_{ab} = 0$$

$$-\overline{M}_{ab}^* \cdot \beta + \overline{M}_{ba}^* \cdot \alpha_{ba} + \varphi_{ba} = 0$$

Řešení

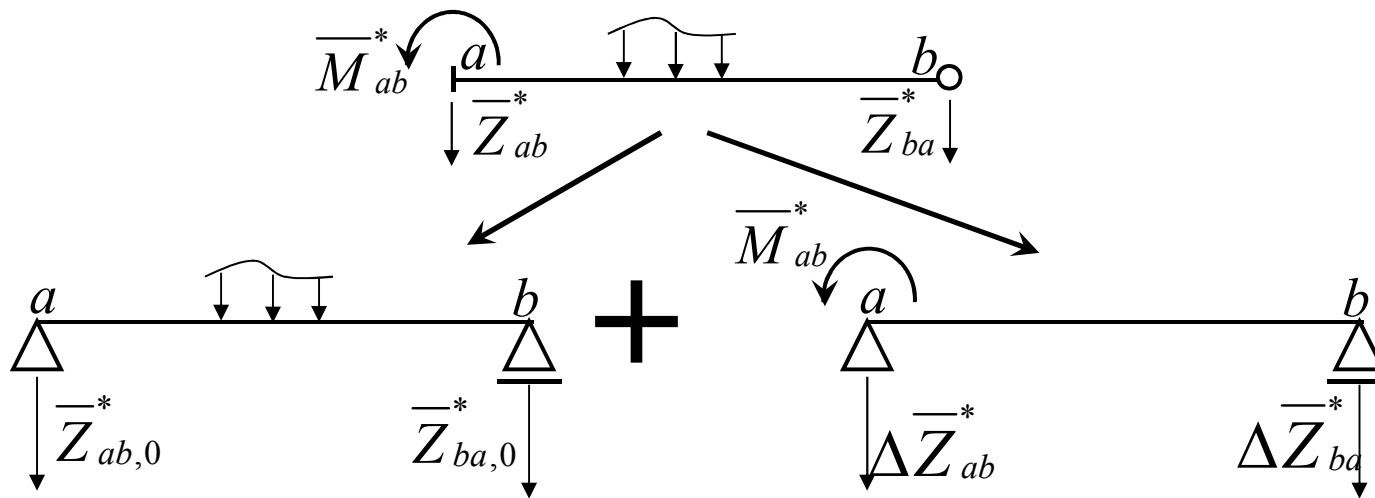
$$\overline{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab} \alpha_{ba} - \varphi_{ba} \beta}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2}$$

$$\overline{M}_{ba}^* = \frac{\varphi_{ab} \beta - \varphi_{ba} \alpha_{ab}}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2}$$

$$|\alpha_{ab}| = \alpha_{ba} = \frac{l}{3EI}$$

$$\beta = \frac{l}{6EI}$$

Primární stav, příčné zatížení, pravostranně kloubově uložený prut



$$Z_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* + \Delta \bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* - \Delta \bar{M}$$

$$\Delta \bar{Z}_{ab}^* \cdot l_{ab} + \bar{M}_{ab}^* = 0$$

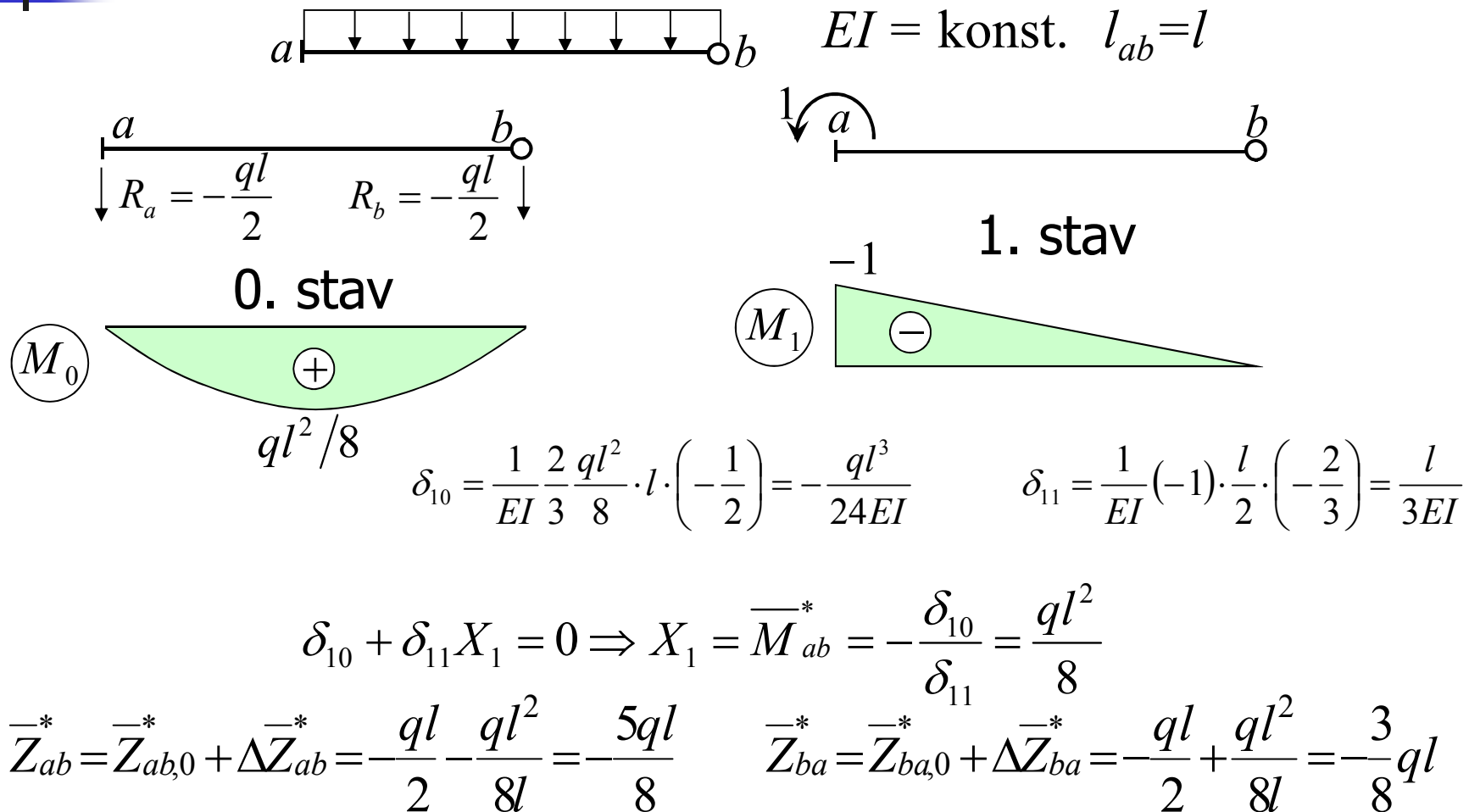
$$\Delta \bar{Z}_{ab}^* = -\frac{\bar{M}_{ab}^*}{l_{ab}} = -\Delta \bar{M}$$

$$Z_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta \bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta \bar{M}$$

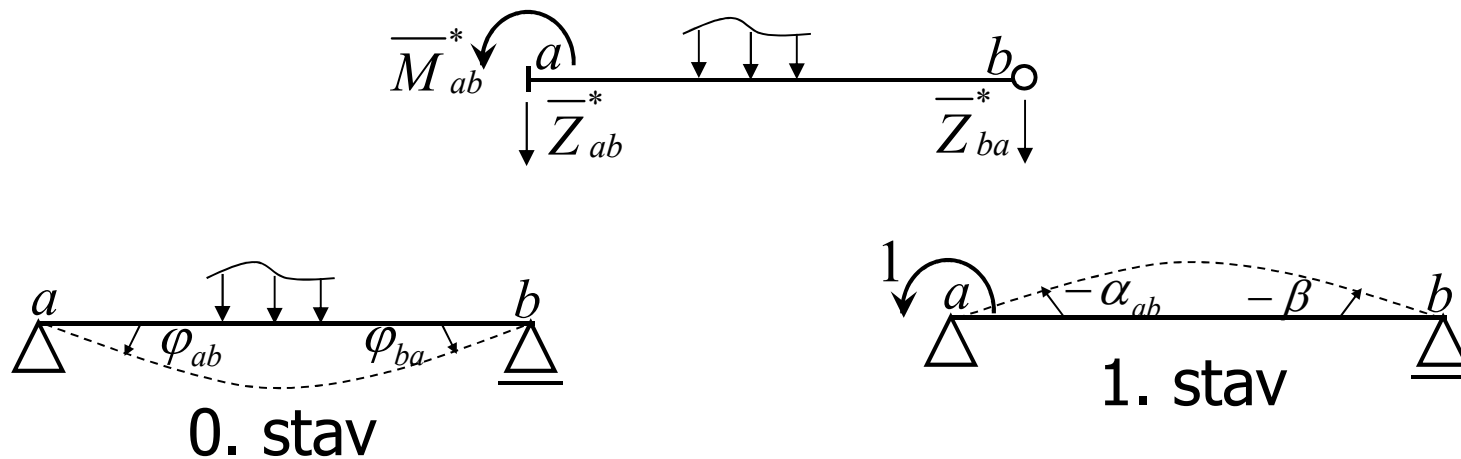
$$-\Delta \bar{Z}_{ba}^* \cdot l_{ab} + \bar{M}_{ab}^* = 0$$

$$\Delta \bar{Z}_{ba}^* = \frac{\bar{M}_{ab}^*}{l_{ab}} = \Delta \bar{M}$$

Primární stav, příčné zatížení, pravostr.kloub. připojený prut, příklad 4

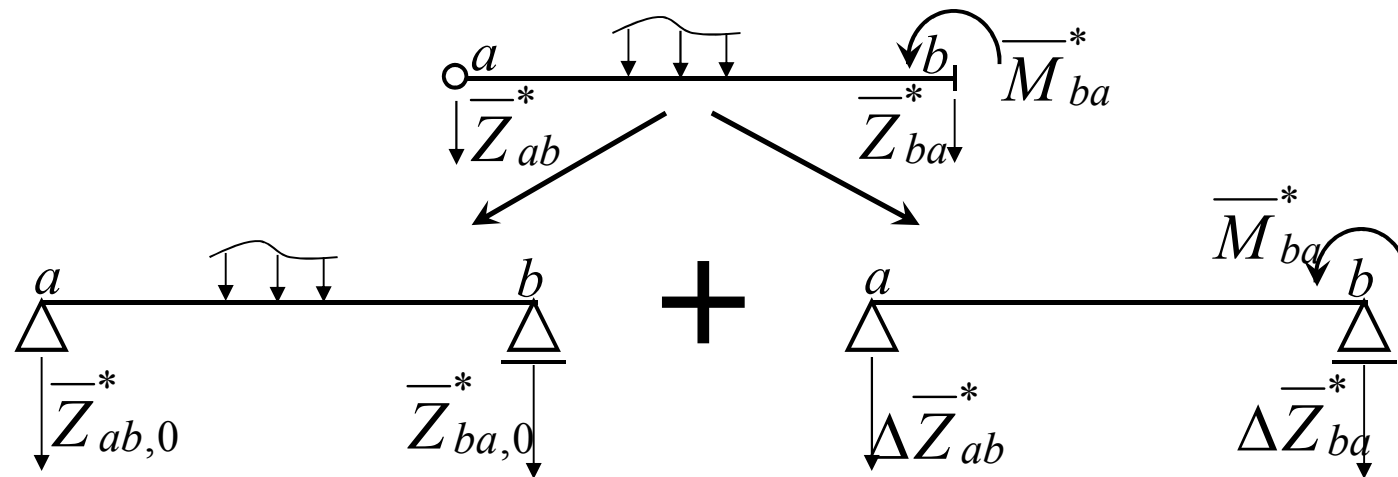


Primární stav, příčné zatížení, pravostranně kloubově uložený prut



$$-\overline{M}_{ab}^* \alpha_{ab} + \varphi_{ab} = 0 \Rightarrow \overline{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}}$$

Primární stav, příčné zatížení, levostranně kloubově připojený prut



$$\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* + \Delta \bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* - \Delta \bar{M}$$

$$\Delta \bar{Z}_{ab}^* \cdot l_{ab} + \bar{M}_{ba}^* = 0$$

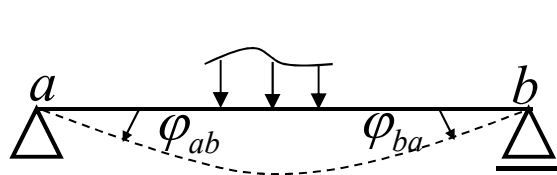
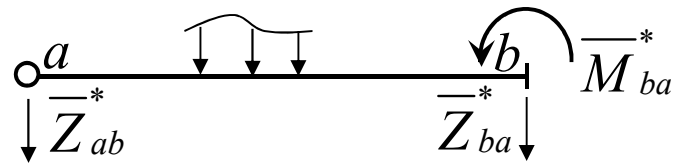
$$\Delta \bar{Z}_{ab}^* = -\frac{\bar{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = -\Delta \bar{M}$$

$$\bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta Z_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta \bar{M}$$

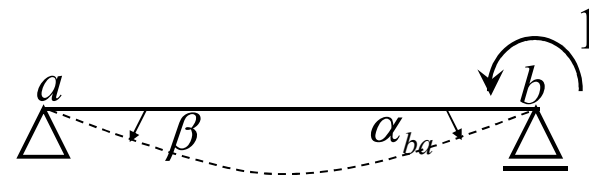
$$-\Delta Z_{ba}^* \cdot l_{ab} + \bar{M}_{ba}^* = 0$$

$$\Delta Z_{ba}^* = \frac{\bar{M}_{ba}^*}{l_{ab}} = \Delta \bar{M}$$

Primární stav, příčné zatížení, levostranně kloubově připojený prut



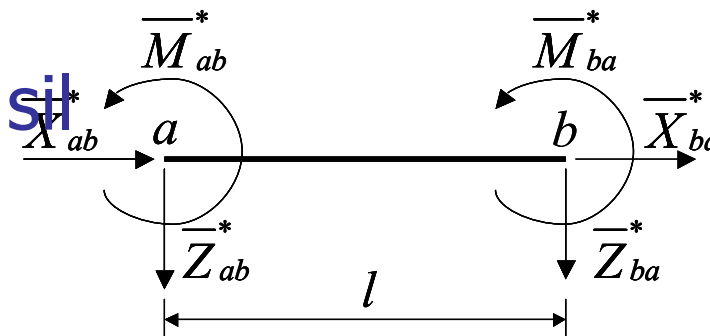
0. stav



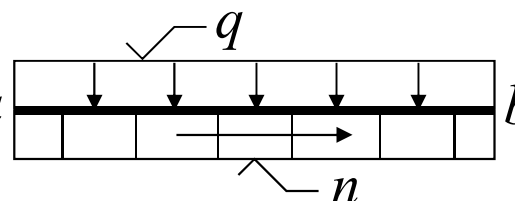
1. stav

$$\overline{M}_{ba}^* \alpha_{ba} + \varphi_{ba} = 0 \Rightarrow \overline{M}_{ba}^* = -\frac{\varphi_{ba}}{\alpha_{ba}}$$

Primární vektory koncových sil prutu konstantního a neměnného průřezu

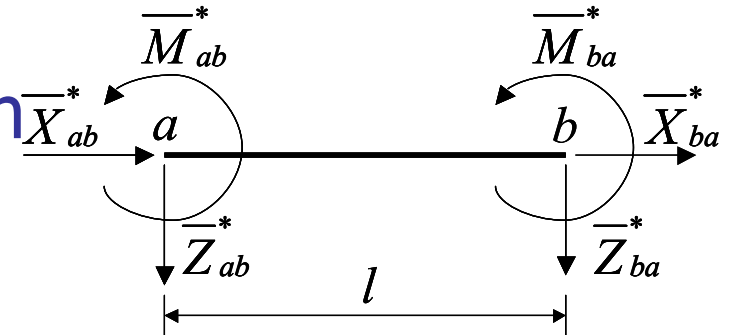


- a) Plné spojité zatížení

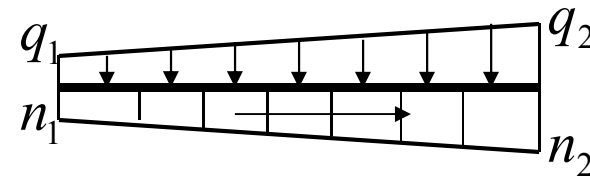


		Připojení prutu			
$\bar{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$	\bar{X}_{ab}^*	$-nl/2$	$-nl/2$	$-nl/2$	$-nl/2$
	\bar{Z}_{ab}^*	$-ql/2$	$-5ql/8$	$-3ql/8$	$-ql/2$
	\bar{M}_{ab}^*	$ql^2/12$	$ql^2/8$	0	0
	\bar{X}_{ba}^*	$-nl/2$	$-nl/2$	$-nl/2$	$-nl/2$
	\bar{Z}_{ba}^*	$-ql/2$	$-3ql/8$	$-5ql/8$	$-ql/2$
	\bar{M}_{ba}^*	$-ql^2/12$	0	$-ql^2/8$	0

Primární vektory koncových sil prutu konstantního a neměnného průřezu



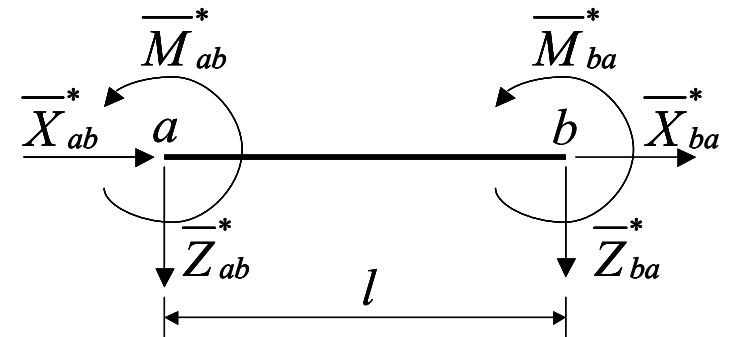
b) Plné lichoběžníkové zatížení



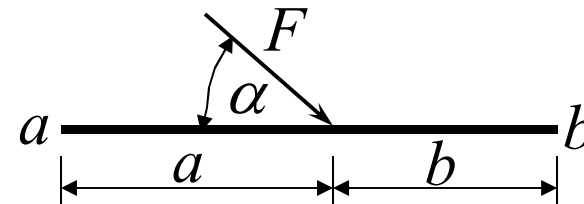
Připojení prutu				
	$\begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l/6 \\ -(7q_1 + 3q_2)l/20 \\ (3q_1 + 2q_2)l^2/60 \\ -(n_1 + 2n_2)l/6 \\ -(3q_1 + 7q_2)l/20 \\ -(2q_1 + 3q_2)l^2/60 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l/6 \\ -(16q_1 + 9q_2)l/40 \\ (8q_1 + 7q_2)l^2/120 \\ -(n_1 + 2n_2)l/6 \\ -(4q_1 + 11q_2)l/40 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l/6 \\ -(11q_1 + 4q_2)l/40 \\ 0 \\ -(n_1 + 2n_2)l/6 \\ -(9q_1 + 16q_2)l/40 \\ -(7q_1 + 8q_2)l^2/120 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -(2n_1 + n_2)l/6 \\ -(2q_1 + q_2)l/6 \\ 0 \\ -(n_1 + 2n_2)l/6 \\ -(q_1 + 2q_2)l/6 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\bar{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$$

Primární vektory koncových sil prutu konstantního a neměnného průřezu

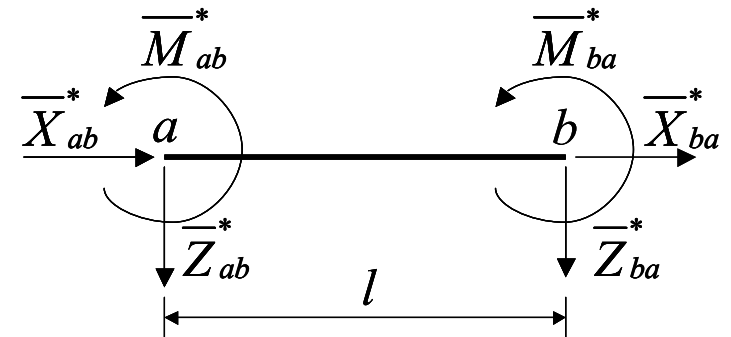


c) Osamělá síla

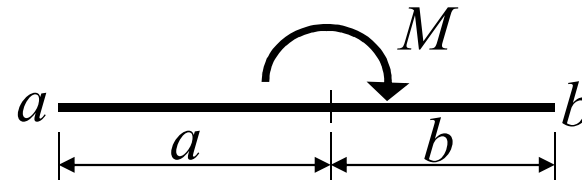


	Připojení prutu			
$\overline{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{ab}^* \\ \overline{Z}_{ab}^* \\ \overline{M}_{ab}^* \\ \overline{X}_{ba}^* \\ \overline{Z}_{ba}^* \\ \overline{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b^2 (l + 2a) / l^3 \\ F_z a b^2 / l^2 \\ -F_x a / l \\ -F_z a^2 (l + 2b) / l^3 \\ -F_z a^2 b / l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b^2 (3l - b) / (2l^3) \\ 0 \\ -F_x a / l \\ -F_z a (3l^2 - a^2) / (2l^3) \\ -F_z a b (l + b) / (2l^2) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b (3l^2 - b^2) / (2l^3) \\ F_z a b (l + b) / (2l^2) \\ -F_x a / l \\ -F_z a^2 (3l - a) / (2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b / l \\ -F_z b / l \\ 0 \\ -F_x a / l \\ -F_z a / l \\ 0 \end{Bmatrix}$

Primární vektory koncových sil prutu konstantního a neměnného průřezu



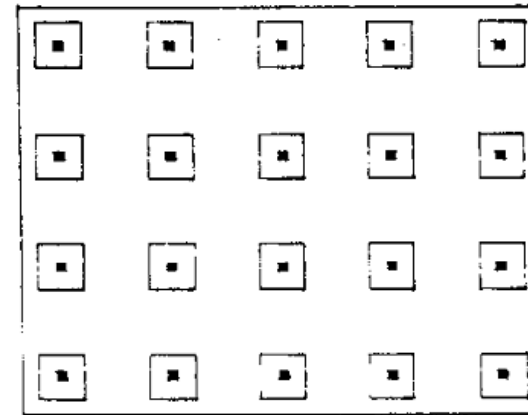
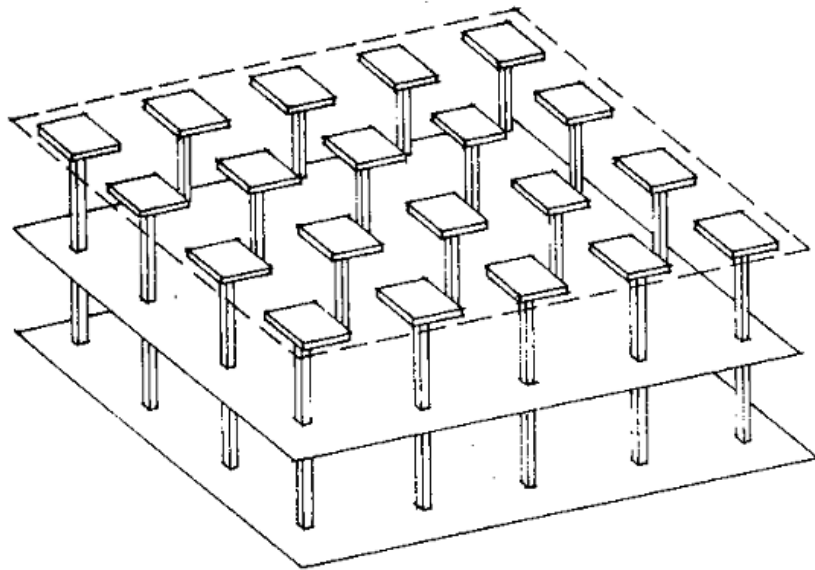
d) Osamělý moment



	Připojení prutu			
$\overline{R}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{ab}^* \\ \overline{Z}_{ab}^* \\ \overline{M}_{ab}^* \\ \overline{X}_{ba}^* \\ \overline{Z}_{ba}^* \\ \overline{M}_{ba}^* \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 6Mab/l^3 \\ -Mb(2l-3b)/l^2 \\ 0 \\ -6Mab/l^3 \\ -Ma(2l-3a)/l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 3M(l^2-b^2)/(2l^3) \\ -M(l^2-3b^2)/(2l^2) \\ 0 \\ -3M(l^2-b^2)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 3M(l^2-a^2)/(2l^3) \\ 0 \\ 0 \\ -3M(l^2-a^2)/(2l^3) \\ M(l^2-3a^2)/(2l^2) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ M/l \\ 0 \\ 0 \\ -M/l \\ 0 \end{Bmatrix}$

Konstrukční systém a nosná funkce

Skeletový systém hlavicový



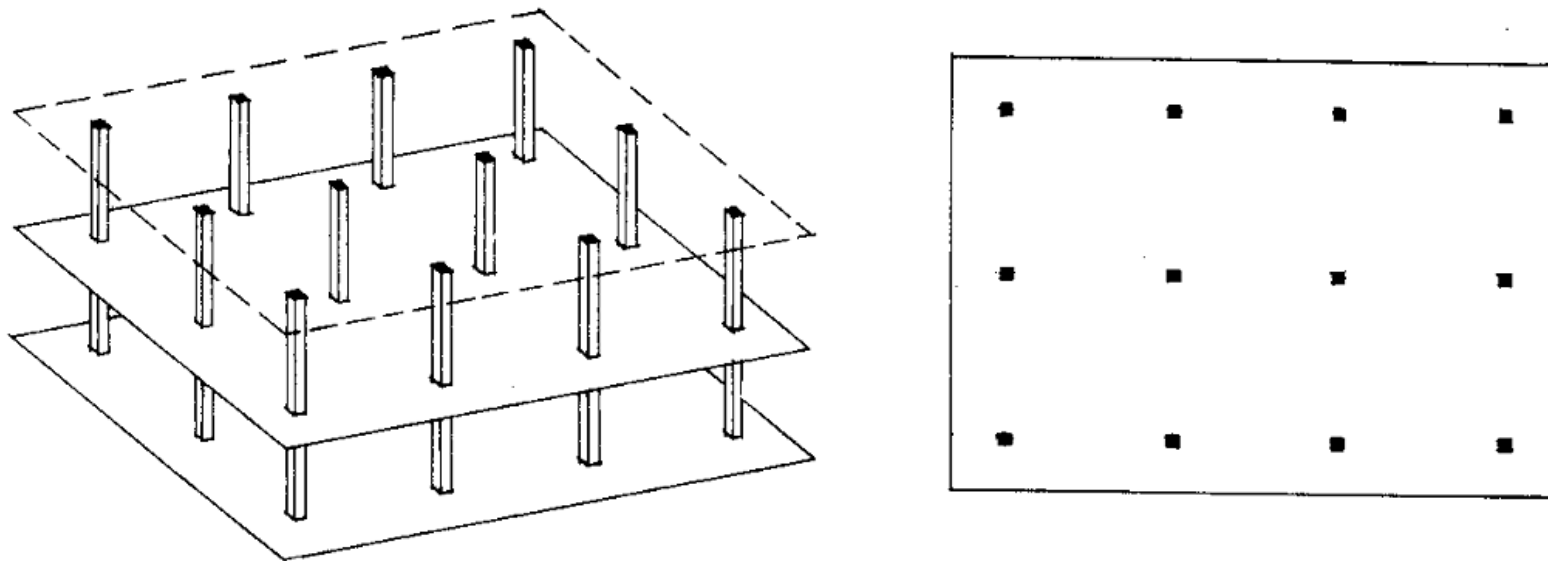
Obr. 12 Skeletová hřibová konstrukce

Matoušková, D. Pozemní stavitelství I, VUT Brno

- Hlavice snižují efektivní rozpětí desky,
- Vysoká únosnost,
- Tuhost zajištěna při min. 3 polích.

Konstrukční systém a nosná funkce

Skeletový systém deskový

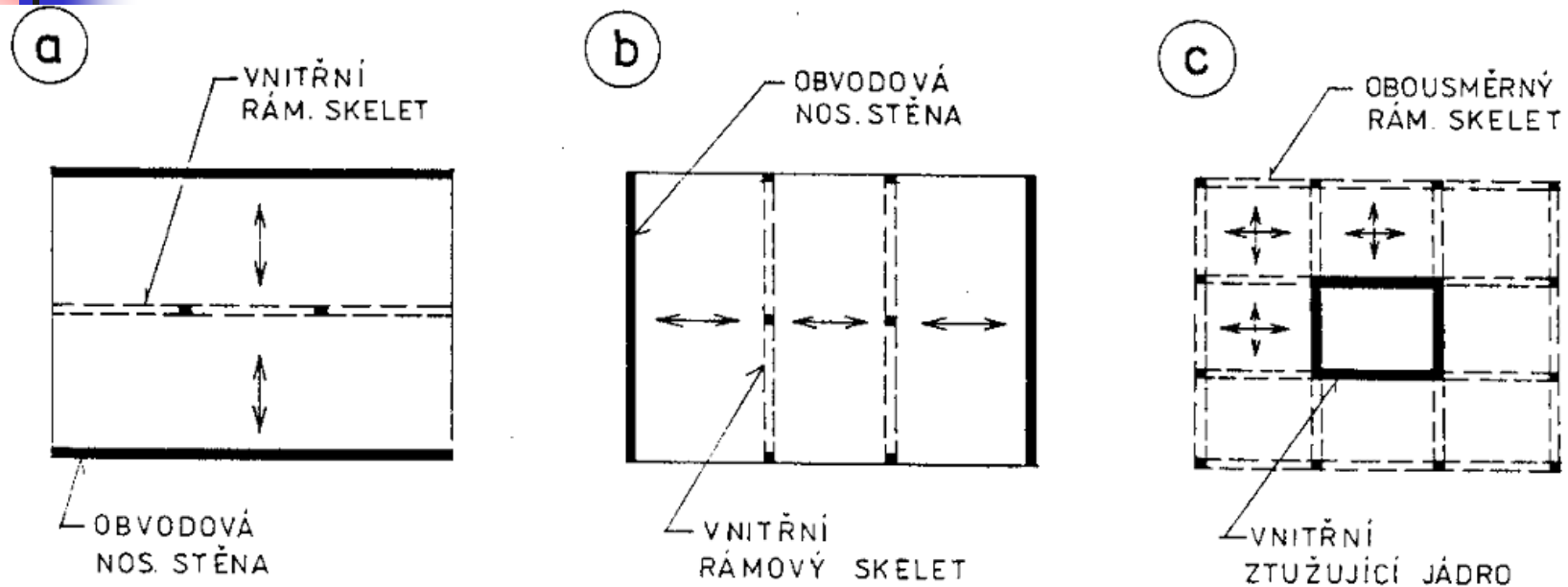


Obr. 13 Skeletová desková konstrukce. Matoušková, D. Pozemní stavitelství I, VUT Brno

- Riziko „propíchnutí desky“,
- Zesílení výztuže (okolo sloupu, skryté průvlaky),
- Nízká tuhost (nutno kombinovat se ztužujícími konstrukcemi),

Konstrukční systém a nosná funkce

Kombinovaný systém



Obr. 14 Kombinované konstrukční systémy

0

Přenáší se:

Matoušková, D. Pozemní stavitelství I, VUT Brno

- svislé síly (sloupy, stěny, průvlak)
- Vodorovné síly (stěny, jádro)

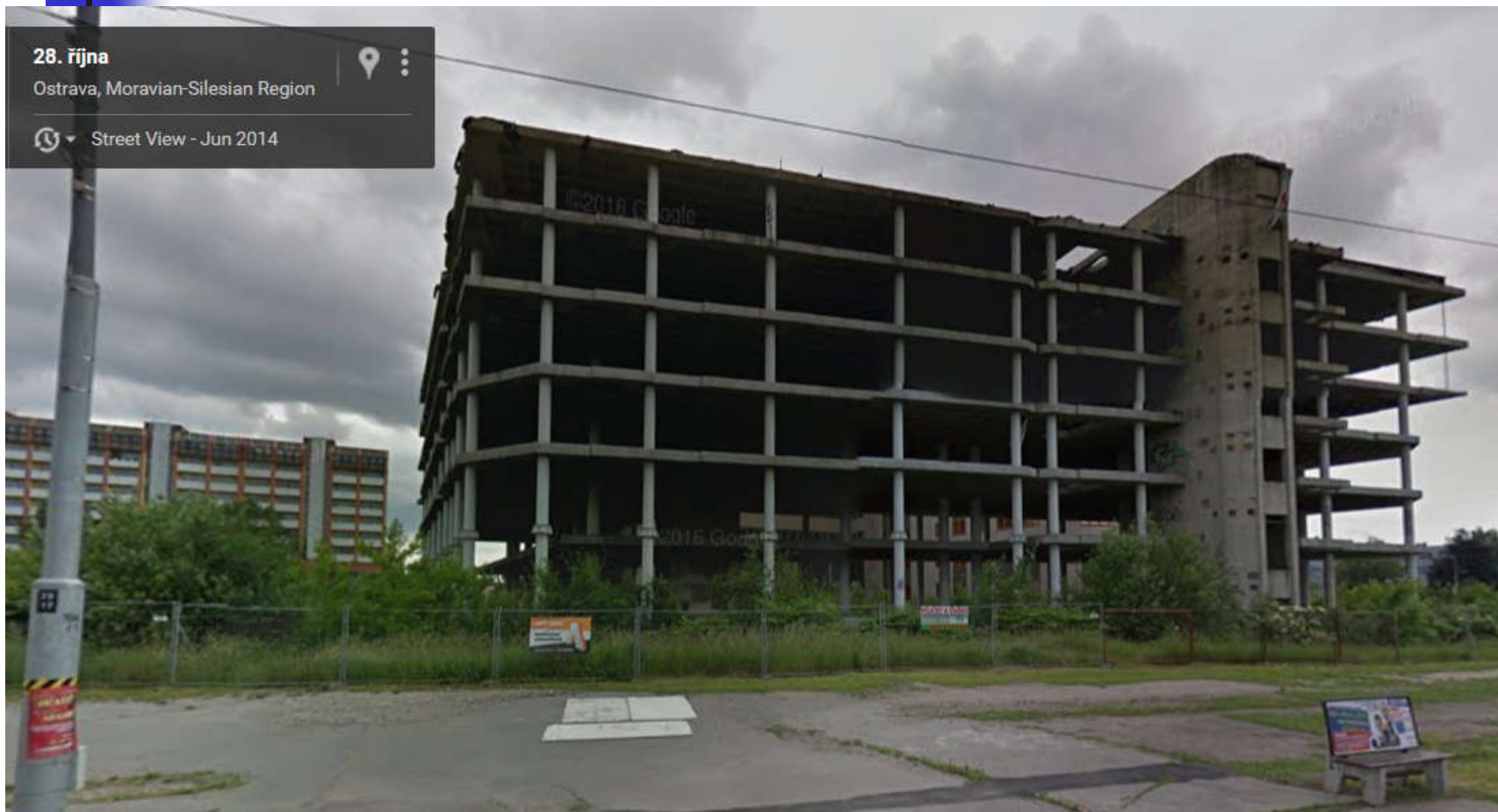
Kombinovaný konstrukční systém



Nedostavěný krajský sjezdový palác KSČ a OSSZ v Ostravě

Kombinovaný konstrukční systém

Deskový skelet a ztužující jádro



Nedostavěný krajský sjezdový palác KSČ, zdroj:

Kombinovaný konstrukční systém

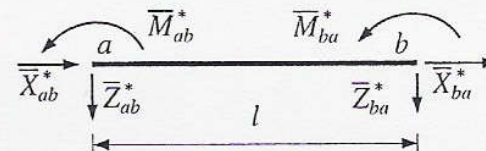
Detail stropní desky

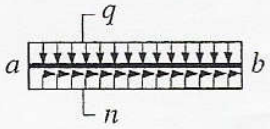
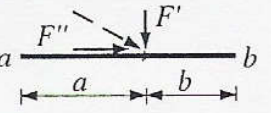
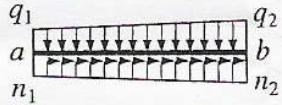
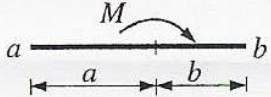


Nedostavěný krajský sjezdový palác KSČ, zdroj: maps.google.com

Primární vektory koncových sil prutu konstantního průřezu [1]

Tabulka 11.2. Primární vektory koncových sil $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{ \bar{X}_{ab}^*, \bar{Z}_{ab}^*, \bar{M}_{ab}^*, \bar{X}_{ba}^*, \bar{Z}_{ba}^*, \bar{M}_{ba}^* \}^T$ prutu konstantního průřezu



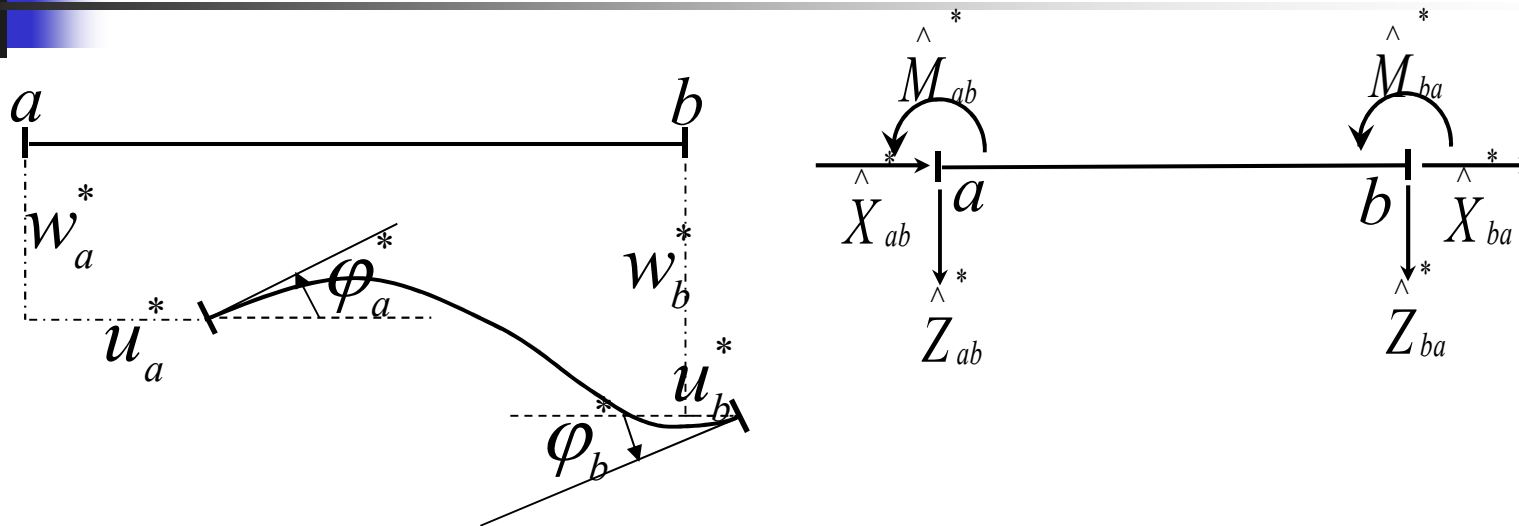
(a) Plné spojité zatížení		(c) Osamělá síla	
$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -5ql/8 \\ ql^2/8 \\ -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F''b/l \\ -F'b^2(l+2a)/l^3 \\ F'ab^2/l^2 \\ -F''a/l \\ -F'a^2(l+2b)/l^3 \\ -F'a^2b/l^2 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -F''b/l \\ -F'b(3l^2-b^2)/(2l^3) \\ F'ab(l+b)/(2l^2) \\ -F''a/l \\ -F'a^2(3l-a)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$
(b) Plné lichoběžníkové zatížení		(d) Osamělý moment	
$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -(2n_1+n_2)l/6 \\ -(7q_1+3q_2)l/20 \\ (3q_1+2q_2)l^2/60 \\ -(n_1+2n_2)l/6 \\ -(3q_1+7q_2)l/20 \\ -(2q_1+3q_2)l^2/60 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} -(2n_1+n_2)l/6 \\ -(16q_1+9q_2)l/40 \\ (8q_1+7q_2)l^2/120 \\ -(n_1+2n_2)l/6 \\ -(4q_1+11q_2)l/40 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6Mab/l^3 \\ -Mb(2l-3b)/l^2 \\ 0 \\ -6Mab/l^3 \\ -Ma(2l-3a)/l^2 \end{Bmatrix}$	$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3M(l^2-b^2)/(2l^3) \\ -M(l^2-3b^2)/(2l^2) \\ 0 \\ -3M(l^2-b^2)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$



Sekundární stav

- V sekundárním stavu dochází v koncových bodech prutů k přetvoření, která se podílejí na splnění podmínek rovnováhy v uzlech.
- Přetvoření způsobují deformační zatížení prutů.

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut



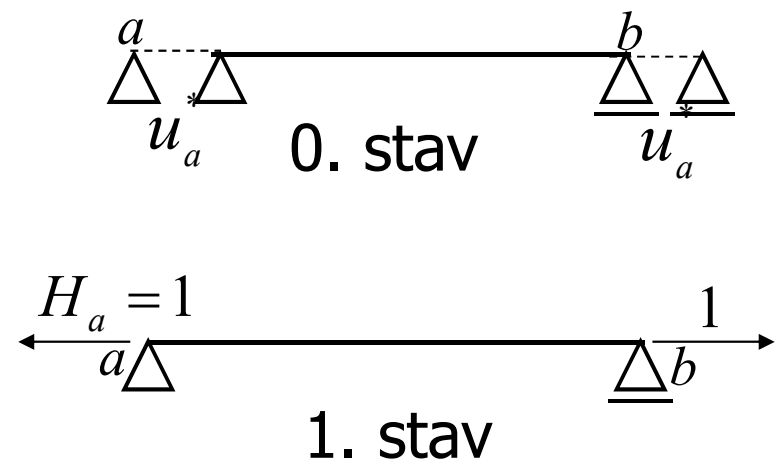
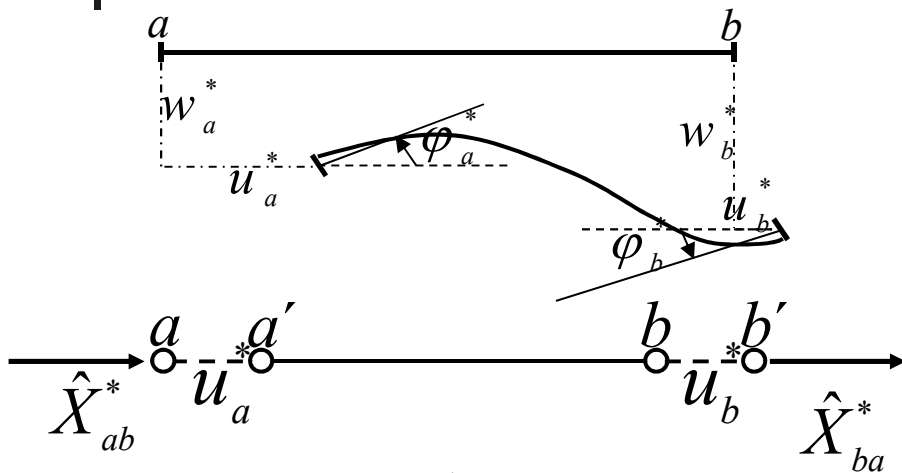
V sekundárním stavu je prut osově a příčně deformačně zatížen

Osově zatížení způsobují posunutí u_a^* a u_b^*

Příčné zatížení způsobují posunutí w_a^* a w_b^* a pootočení φ_a^* a φ_b^*

Koncové síly sekundárního stavu řešíme silovou metodou

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, osové deformační zatížení



$$\hat{X}_{ba}^* \delta_{11} + \delta_{10} = d_1$$

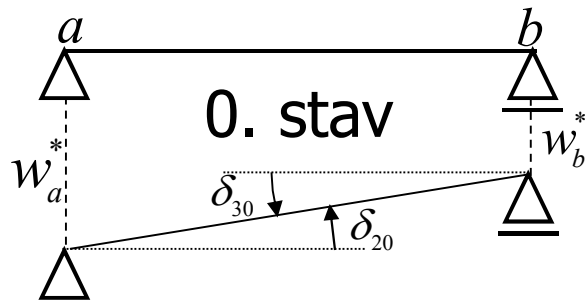
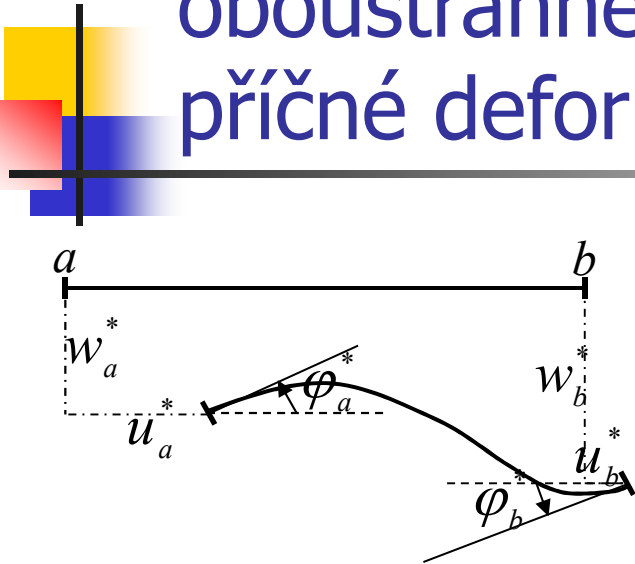
$$d_1 = u_b^*$$

$$\delta_{10} = -(-u_a^*) = u_a^*$$

$$\hat{X}_{ba}^* = (d_1 - \delta_{10}) \frac{1}{\delta_{11}} = (u_b^* - u_a^*) \frac{1}{\delta_{11}}$$

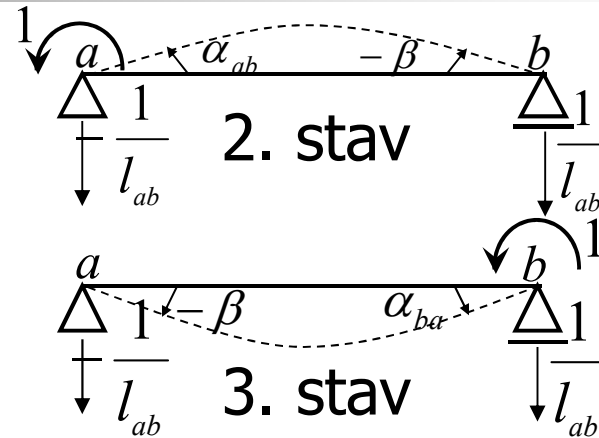
$$\hat{X}_{ab}^* + \hat{X}_{ba}^* = 0 \Rightarrow \hat{X}_{ab}^* = -\hat{X}_{ba}^* = (u_a^* - u_b^*) \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{u_a^*}{\delta_{11}} - \frac{u_b^*}{\delta_{11}}$$

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, příčné deformační zatížení



$$\hat{M}_{ab}^* \delta_{22} + \hat{M}_{ba}^* \delta_{23} + \delta_{20} = d_2$$

$$\hat{M}_{ab}^* \delta_{32} + \hat{M}_{ba}^* \delta_{33} + \delta_{30} = d_3$$



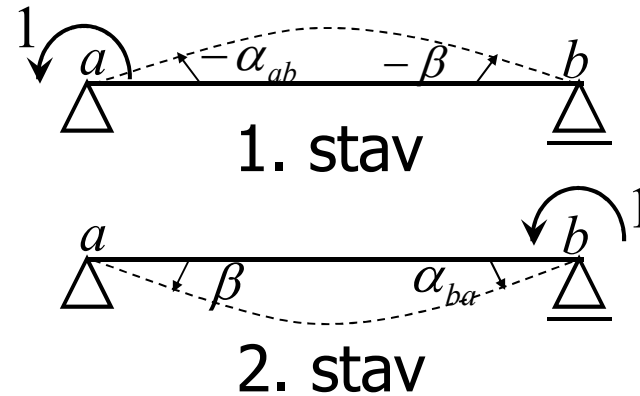
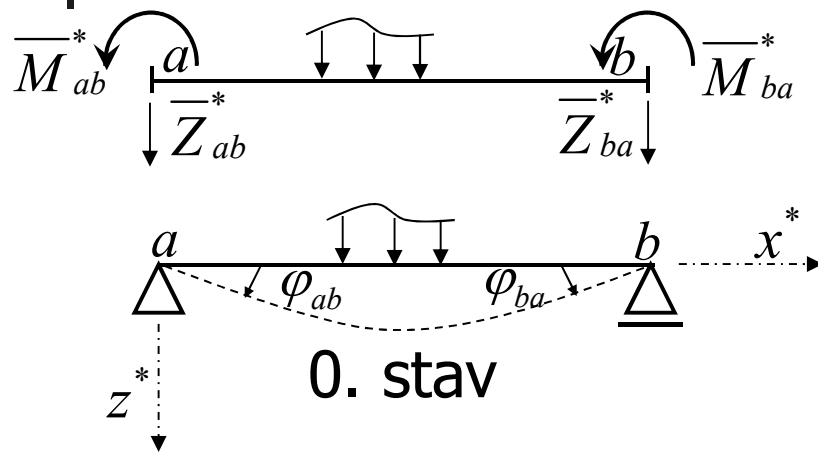
$$d_2 = \varphi_a \quad \delta_{20} = \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}}$$

$$d_3 = \varphi_b \quad \delta_{30} = \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}}$$

$$\delta_{22} = \alpha_{ab} \quad \delta_{23} = -\beta$$

$$\delta_{23} = -\beta \quad \delta_{33} = \alpha_{ba}$$

Analogie k odvození primárního stavu



Deformační podmínky

$$-\overline{M}_{ab}^* \cdot \alpha_{ab} + \overline{M}_{ba}^* \cdot \beta + \varphi_{ab} = 0$$

$$-\overline{M}_{ab}^* \cdot \beta + \overline{M}_{ba}^* \cdot \alpha_{ba} + \varphi_{ba} = 0$$

Řešení

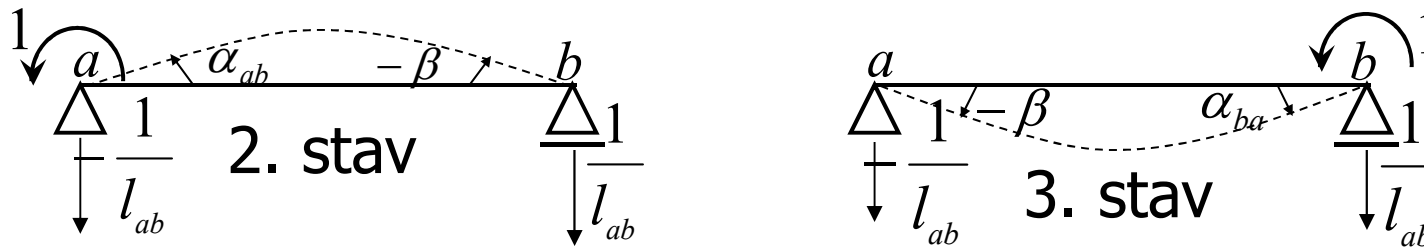
$$\overline{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab} \alpha_{ba} - \varphi_{ba} \beta}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2}$$

$$\overline{M}_{ba}^* = \frac{\varphi_{ab} \beta - \varphi_{ba} \alpha_{ab}}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2}$$

$$|\alpha_{ab}| = \alpha_{ba} = \frac{l}{3EI}$$

$$\beta = \frac{l}{6EI}$$

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, pokračování



Řešení

$$\hat{M}_{ab}^* = \frac{\left(\varphi_{ab} - \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}}\right)\alpha_{ba} - \left(\varphi_{ba} - \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}}\right)\beta}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2}$$

$$|\alpha_{ab}| = \alpha_{ba} = \frac{l}{3EI}$$

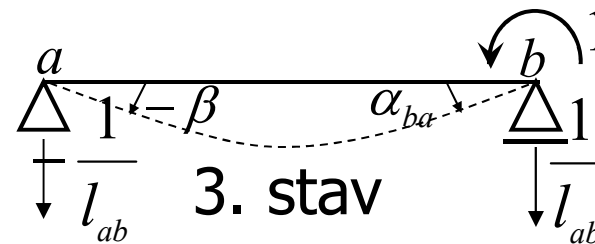
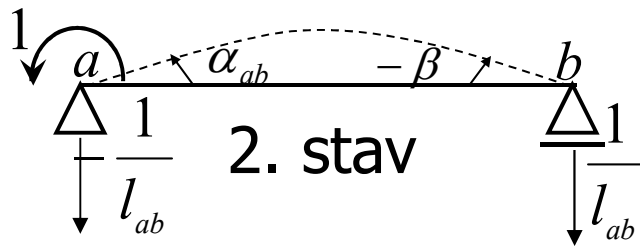
$$\hat{M}_{ba}^* = \frac{\left(\varphi_{ab} - \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}}\right)\beta - \left(\varphi_{ba} - \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}}\right)\alpha_{ab}}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2}$$

$$\beta = \frac{l}{6EI}$$

$$\hat{M}_{ab}^* = -\frac{6EJ}{l^2}w_a^* + \frac{4EJ}{l}\varphi_a^* + \frac{6EJ}{l^2}w_b^* + \frac{2EJ}{l}\varphi_b^*$$

$$\hat{M}_{ba}^* = -\frac{6EJ}{l^2}w_a^* + \frac{2EJ}{l}\varphi_a^* + \frac{6EJ}{l^2}w_b^* + \frac{4EJ}{l}\varphi_b^*$$

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, výpočet \hat{M}_{ab}^*



$$\hat{M}_{ab}^* \alpha_{ab} - \hat{M}_{ba}^* \beta = -\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_a^*$$

$$-\hat{M}_{ab}^* \beta + \hat{M}_{ba}^* \alpha_{ba} = -\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_b^*$$

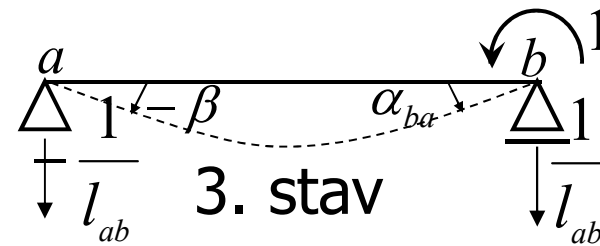
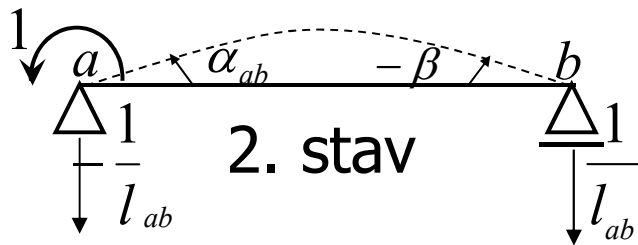
$$D = \alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2$$

$$D_1 = \left(-\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_a^* \right) \alpha_{ba} - \left(-\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_b^* \right) (-\beta)$$

$$D_1 = -w_a^* \frac{\alpha_{ba} + \beta}{l_{ab}} + \varphi_a^* \alpha_{ba} + w_b^* \frac{\alpha_{ba} + \beta}{l_{ab}} + \varphi_b^* \beta$$

$$\hat{M}_{ab}^* = \frac{D_1}{D} = -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{D l_{ab}} w_a^* + \frac{\alpha_{ba}}{D} \varphi_a^* + \frac{\alpha_{ba} + \beta}{D l_{ab}} w_b^* + \frac{\beta}{D} \varphi_b^*$$

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, výpočet \hat{M}_{ba}^*



$$\hat{M}_{ab}^* \alpha_{ab} - \hat{M}_{ba}^* \beta = -\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_a^*$$

$$-\hat{M}_{ab}^* \beta + \hat{M}_{ba}^* \alpha_{ba} = -\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_b^*$$

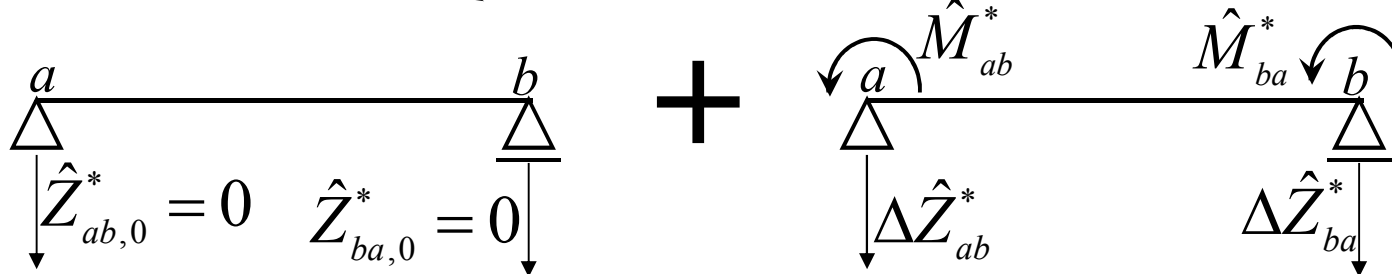
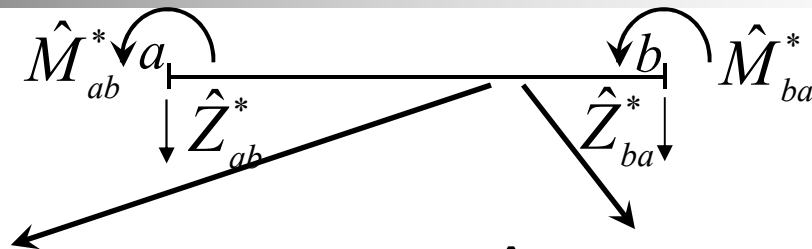
$$D = \alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2$$

$$D_2 = \left(-\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_b^* \right) \alpha_{ab} - \left(-\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} + \varphi_a^* \right) (-\beta)$$

$$D_2 = -w_a^* \frac{\alpha_{ab} + \beta}{l_{ab}} + \varphi_a^* \beta + w_b^* \frac{\alpha_{ab} + \beta}{l_{ab}} + \varphi_b^* \alpha_{ab}$$

$$\hat{M}_{ba}^* = \frac{D_2}{D} = -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{D l_{ab}} w_a^* + \frac{\beta}{D} \varphi_a^* + \frac{\alpha_{ab} + \beta}{D l_{ab}} w_b^* + \frac{\alpha_{ab}}{D} \varphi_b^*$$

Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, pokračování výpočtu



$$\sum M_{i,b} = 0$$

$$\hat{Z}_{ab}^* = \hat{Z}_{ab,0}^* + \Delta \hat{Z}_{ab}^*$$

$$\Delta \hat{Z}_{ab}^* \cdot l_{ab} + \hat{M}_{ab}^* + \hat{M}_{ba}^* = 0$$

$$\hat{Z}_{ab}^* = \Delta \hat{Z}_{ab}^* = -\frac{\hat{M}_{ab}^* + \hat{M}_{ba}^*}{l_{ab}}$$

$$\sum M_{i,a} = 0$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = \hat{Z}_{ba,0}^* + \Delta \hat{Z}_{ba}^*$$

$$-\Delta \hat{Z}_{ba}^* \cdot l_{ab} + \hat{M}_{ab}^* + \hat{M}_{ba}^* = 0$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = \Delta \hat{Z}_{ba}^* = \frac{\overline{M}_{ab}^* + \overline{M}_{ba}^*}{l_{ab}}$$



Sekundární stav, oboustranně monoliticky připojený prut, pokračování výpočtu

$$\hat{Z}_{ab}^* = -\frac{1}{l_{ab}} \left(\hat{M}_{ab}^* + \hat{M}_{ba}^* \right)$$

$$\hat{Z}_{ab}^* = \frac{12EJ}{l^3} w_a^* - \frac{6EJ}{l^2} \varphi_a^* - \frac{12EJ}{l^3} w_b^* - \frac{6EJ}{l^2} \varphi_b^*$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = \frac{1}{l} \left(\hat{M}_{ab}^* + \hat{M}_{ba}^* \right)$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = -\frac{12EJ}{l^3} w_a^* + \frac{6EJ}{l^2} \varphi_a^* + \frac{12EJ}{l^3} w_b^* + \frac{6EJ}{l^2} \varphi_b^*$$

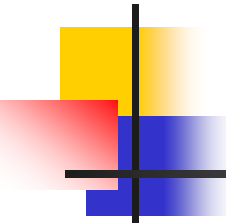
Sekundární stav, koncové síly prismatického prutu (konstantního a neměnného průřezu) oboustranně připojeného

$$l_{ab} = l \quad \delta_{11} = \frac{l}{EA}$$

$$\hat{X}_{ab}^* = \frac{u_a^*}{\delta_{11}} - \frac{u_b^*}{\delta_{11}} = \frac{EA}{l} u_a^* - \frac{EA}{l} u_b^*$$

$$\hat{Z}_{ab}^* = \frac{12 EJ}{l^3} w_a^* - \frac{6 EJ}{l^2} \varphi_a^* - \frac{12 EJ}{l^3} w_b^* - \frac{6 EJ}{l^2} \varphi_b^*$$

$$\hat{M}_{ab}^* = -\frac{6 EJ}{l^2} w_a^* + \frac{4 EJ}{l} \varphi_a^* + \frac{6 EJ}{l^2} w_b^* + \frac{2 EJ}{l} \varphi_b^*$$



Sekundární stav, koncové síly prismatického prutu (konstantního a neměnného průřezu) oboustranně připojeného, pokračování

$$\hat{X}_{ba}^* = -\frac{u_a^*}{\delta_{11}} + \frac{u_b^*}{\delta_{11}} = -\frac{EA}{l}u_a^* + \frac{EA}{l}u_b^*$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = -\frac{12EJ}{l^3}w_a^* + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_a^* + \frac{12EJ}{l^3}w_b^* + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_b^*$$

$$\hat{M}_{ba}^* = -\frac{6EJ}{l^2}w_a^* + \frac{2EJ}{l}\varphi_a^* + \frac{6EJ}{l^2}w_b^* + \frac{4EJ}{l}\varphi_b^*$$



Maticový zápis

$$\hat{R}_{ab}^* = \begin{pmatrix} \hat{X}_{ab}^* \\ \hat{Z}_{ab}^* \\ \hat{M}_{ab}^* \\ \hat{X}_{ab}^* \\ \hat{Z}_{ab}^* \\ \hat{M}_{ab}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_{ab}^* = k_{ab}^* \cdot r_{ab}^*$$



Maticový zápis

$$\hat{R}_{ab}^* = k_{ab}^* \cdot r_{ab}^*$$

\hat{R}_{ab}^* ... sekundární vektor koncových sil v LSS

k_{ab}^* ... lokální matice tuhosti prismatického prutu

r_{ab}^* ... lokální vektor parametrů deformace prutu v LSS



Maticový zápis

Pro oboustranně monoliticky připojený prut je

$$k_{ab}^* = \begin{vmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{vmatrix}$$

$$r_{ab}^* = \left\{ u_a^* \quad w_a^* \quad \varphi_a^* \quad u_b^* \quad w_b^* \quad \varphi_b^* \right\}^T$$



Výsledné lokální koncové síly

$$R_{ab}^* = \overline{R}_{ab}^* + \hat{R}_{ab}^* = \overline{R}_{ab}^* + k_{ab}^* \cdot r_{ab}^*$$

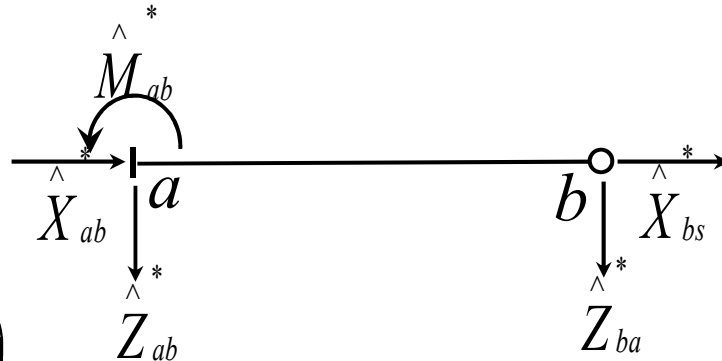
$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} X_{ab}^* \\ Z_{ab}^* \\ M_{ab}^* \\ X_{ba}^* \\ Z_{ba}^* \\ M_{ba}^* \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \overline{X}_{ab}^* \\ \overline{Z}_{ab}^* \\ \overline{M}_{ab}^* \\ \overline{X}_{ba}^* \\ \overline{Z}_{ba}^* \\ \overline{M}_{ba}^* \end{array} \right| + \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \hat{X}_{ab}^* \\ \hat{Z}_{ab}^* \\ \hat{M}_{ab}^* \\ \hat{X}_{ba}^* \\ \hat{Z}_{ba}^* \\ \hat{M}_{ba}^* \end{array} \right| \end{array}$$

Sekundární stav, pravostranně kloubově připojený prut

$$\hat{M}_{ab}^* \alpha_{ab} + \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} = \varphi_a^*$$

$$\hat{M}_{ab}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab}} \left(\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} - \varphi_a^* \right)$$

$$\hat{M}_{ab}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}} w_a^* + \frac{1}{\alpha_{ab}} \varphi_a^* + \frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}} w_b^*$$

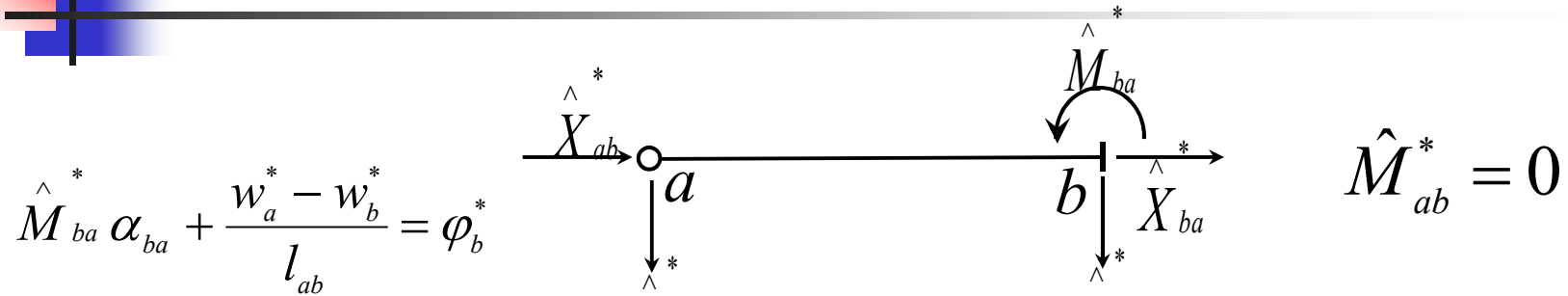


$$\hat{M}_{ba}^* = 0$$

$$\hat{Z}_{ab}^* = -\frac{1}{l_{ab}} \hat{M}_{ab}^* = \frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}^2} w_a^* - \frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}} \varphi_a^* - \frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}^2} w_b^*$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = \frac{1}{l_{ab}} \hat{M}_{ab}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}^2} w_a^* + \frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}} \varphi_a^* + \frac{1}{\alpha_{ab} l_{ab}^2} w_b^*$$

Sekundární stav, levostranně kloubově připojený prut



$$\hat{M}_{ba}^* \alpha_{ba} + \frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} = \varphi_b^*$$

$$\hat{M}_{ba}^* = -\frac{1}{\alpha_{ba}} \left(\frac{w_a^* - w_b^*}{l_{ab}} - \varphi_b^* \right)$$

$$\hat{M}_{ab}^* = -\frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}} w_a^* + \frac{1}{\alpha_{ba}} \varphi_a^* + \frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}} w_b^*$$

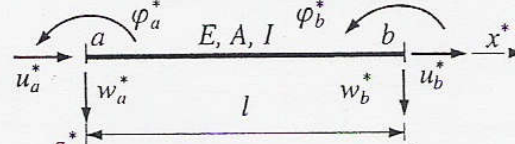
$$\hat{Z}_{ab}^* = -\frac{1}{l_{ab}} \hat{M}_{ba}^* = \frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}^2} w_a^* - \frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}} \varphi_a^* - \frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}^2} w_b^*$$

$$\hat{Z}_{ba}^* = \frac{1}{l_{ab}} \hat{M}_{ba}^* = -\frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}^2} w_a^* + \frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}} \varphi_a^* + \frac{1}{\alpha_{ba} l_{ab}^2} w_b^*$$

Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu [1]

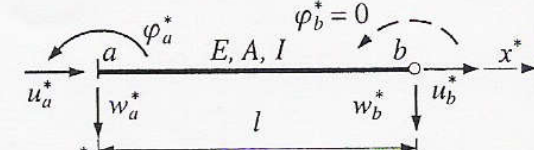
Tabulka 11.3. Lokální matice tuhosti prutu konstantního průřezu

(a) Prut oboustranně monoliticky připojený



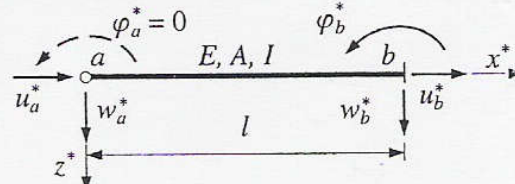
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(b) Prut pravostranně kloubově připojený



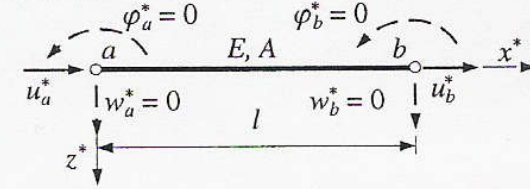
$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prut levostranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

(d) Prut oboustranně kloubově připojený



$$k_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

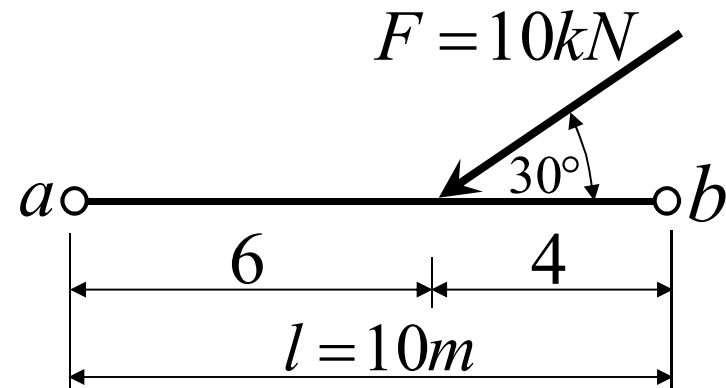


Použitá literatura

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J., Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Učebnice, druhé vydání. VUTIUM, Brno 2004.

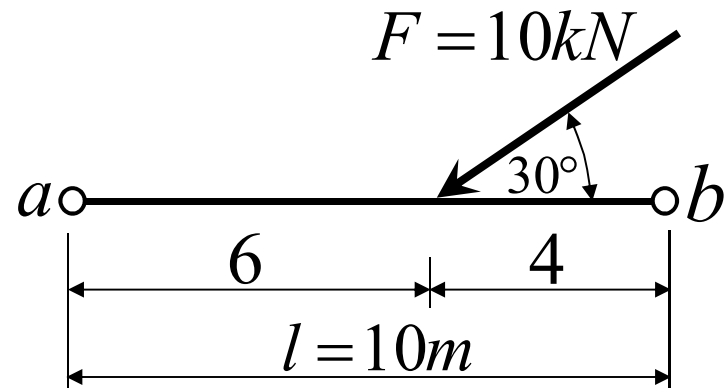
Testovací příklad 1

- Určete primární koncové síly prutu a-b v LSS, je-li zatížen dle obr.:



Testovací příklad 1

- Určete primární koncové síly prutu a-b v LSS, je-li zatížen dle obr.:



Řešení:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = -10 \cdot 0,866 = -8,66 \quad F_z = F \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 0,5 = 5$$

Dále aplikujeme a) silovou metodu nebo b) použijeme tabulky

$$\bar{R}_{ab}^* = \begin{vmatrix} \bar{X}_{ab}^* & \bar{Z}_{ab}^* & \bar{M}_{ab}^* & \bar{X}_{ba}^* & \bar{Z}_{ba}^* & \bar{M}_{ba}^* \end{vmatrix}^T$$

$$\bar{R}_{ab}^* = \begin{vmatrix} 3,464 & -2 & 0 & 5,196 & -3 & 0 \end{vmatrix}^T$$